
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3433 06274648 6

PAA
Arch

Archiv de
mathemati
und physik

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Dreissigster Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1858.

Inhaltsverzeichniss des dreissigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Praktische Geometrie.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber die geometrischen Eigenschaften der gravitas acceleratrix Newton's und ihre Consequenzen für die Atomenlehre.

Von

Herrn Doctor *Fr. W. K. Gensler,*

Pastor zu Grossmölsen im Grossherzogthume Sachsen-Weimar.

§. 1.

Newton schloss aus den Keppler'schen Gesetzen der Planetenbewegung, dass die Schwere, mit welcher verschiedene Massen zu einem und demselben Centralkörper streben, im umgekehrten Verhältnisse ihrer quadrirten Abstände vom Gravitationscentrum stehe. Denkt man sich also um das Gravitationscentrum mit beliebigen Halbmessern Kugelflächen beschrieben, so bleibt die Schwere für jeden auf einer dieser Kugelflächen liegenden materiellen Punkt dieselbe, und ändert sich nur von einer Kugelfläche zur andern; eine Eigenschaft, welche eine naturgesetzliche Abhängigkeit der Schwere von der Ausbreitung des Raumes um das Gravitationscentrum anzeigt. Diese rein-geometrische Bedingtheit der Schwere, welche Newton in der defin. VIII. seiner Princ. phil. natur. mit den Worten: „vim acceleratricem ad locum corporis (licet referre) tanquam efficaciam quandam de centro per loca singula in circuitu diffusam ad movenda corpora, quae in ipsis sunt" andeutet, theilt der Schwere Eigenschaften mit, die eine besondere Betrachtung verdienen, indem sie namentlich auf die Berechtigung der atomistischen Theorie der Körper ein unerwartetes Licht werfen.

Um aber der Betrachtung der geometrischen Eigenschaften der Schwere die nöthige Schärfe zu geben, erscheint es zweck-

mässig, den Begriff einer Schwerecapacität eines Raumes einzuführen, so dass unter der Schwerecapacität eines Raumtheiles die Quantität der Schwere oder die Summe aller Sollicitationen verstanden wird, welche demselben vermöge einer darauf bezogenen Centralmasse zukommt, sobald derselbe von wägbarer Materie lückenlos erfüllt ist. Der Begriff der Schwerecapacität eines Raumtheiles geht daher sofort in den Begriff der in diesem Raumtheile wirklich thätigen Schwere über, wenn derselbe mit schwerer Materie wirklich erfüllt gedacht wird.

Die Continuität der mathematischen Theorie bringt es übrigens mit sich, dass man nicht bloss die Schwerecapacität von Raumtheilen, sondern auch von Flächen, Linien und Punkten zu berücksichtigen hat, wie ja auch die Statik ihre Theorie nicht auf schwere Körper beschränkt, sondern dieselbe auch auf schwere Flächen, Linien und Punkte erstreckt.

§. 2.

Um die Schwerecapacität eines Raumtheils oder Volumens der Rechnung zu unterwerfen, kann man die Summe der in allen Punkten möglichen Sollicitationen der Schwere mit der Quantität einer Flüssigkeit vergleichen, deren Dichtigkeit sich von Punkt zu Punkt nach demselben Gesetze ändert, wie die Intensität der Sollicitationen der Schwere.

Ist also k die Schwerecapacität eines Punktes, welche nach gegebenen Bedingungen veränderlich und als das Element der Schwerecapacität des ganzen Volumens gedacht werden soll; ist ferner K die gesuchte Schwerecapacität des ganzen Volumens und v das Volumen selbst, so hat man

$$K = \iiint k \partial^3 v. \tag{1}$$

Bedenkt man nun, dass die Schwerecapacität aller Punkte, welche auf derselben Kugelfläche liegen, für alle gleich sein soll, so bietet sich zur Integration von (1) ein System von Polarcoordinaten dar, deren Pol mit dem Gravitationscentrum zusammenfällt. Ist daher ϑ der Winkel, welchen der radius vector r mit der Axe der x, und ψ der Winkel, welchen die durch den radius vector und die Axe der x gelegte Ebene mit der Ebene der Axen der x und y macht, so hat man bekanntlich

$$\partial^3 v = r^2 \sin\vartheta \partial r \partial\vartheta \partial\psi. \tag{2}$$

Nimmt man nun mit Newton an, dass die Veränderlichkeit von k, so weit sie sich auf ein und dasselbe Gravitationscentrum bezieht, durch die Relation

$$k = \frac{g}{r^2},$$

worin g die Schwerecapacität eines Punktes in der Einheit der Entfernung vom Gravitationscentrum ist, vollständig gegeben sei, so wird

$$K = g \iiint \sin\vartheta\, \partial r\, \partial\vartheta\, \partial\psi. \tag{3}$$

Soll beispielsweise die Schwerecapacität einer Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt mit dem Gravitationscentrum zusammenfällt, gefunden werden, so ergiebt sich aus (3), weil $\int \partial r$ von den Winkeln ϑ und ψ unabhängig ist,

$$K = gr . \iint \sin\vartheta\, \partial\vartheta\, \partial\psi.$$

Dieses Integral von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und dann von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ erstreckt, giebt dann als Schwerecapacität der Kugel:

$$K = 4\pi g r. \tag{4}$$

Die Schwerecapacität einer Kugel, deren Mittelpunkt das Gravitationscentrum darstellt, steht also im geraden einfachen Verhältnisse ihres Radius oder der Kubikwurzel ihres Inhaltes.

§. 3.

Die Schwerecapacität eines Volumens v, dessen Ausdehnung in der Richtung der Gravitation im Verhältnisse zu seinem mittleren Abstande r vom Gravitationscentrum für unbeträchtlich gelten darf, so dass die Schwere innerhalb dieses Volumens für constant genommen wird, ist dem Volumen v einfach proportional.

Denn unter diesen Bedingungen ist $k = \frac{g}{r^2}$ constant, also aus (1):

$$K = kv. \tag{5}$$

§. 4.

Die Geschwindigkeiten c, c', welche zwei Schwerecapacitäten (oder die ihnen entsprechenden wirklichen Schwerequantitäten) k, k' von constanter Intensität den Massen m, m', deren absolute Dichtigkeiten d, d' und deren Volumina v, v' sind, mittheilen, sind

$$c : c' = \frac{k}{d} : \frac{k'}{d'}. \tag{6}$$

Es verhält sich nämlich die Summe der in einer lückenlosen Masse möglichen Sollicitationen der Schwere bei innerhalb des Volumens constanter Intensität der Schwere wie das Product der constanten Schwerecapacität eines Punktes in das Volumen der Masse (§. 3.); die auf die Massen m, m' wirkenden Schwerkräfte sind also kv und $k'v'$. Es verhalten sich aber die von zwei Kräften in gleichen Zeiten erzeugten Geschwindigkeiten zweier Massen gerade wie die Kräfte und umgekehrt wie die bewegten Massen (Euler, Mechan. Petersb. 1755. tom. I. prop. 16. coroll. 2. S. 55.). Daher ist

$$c:c'=\frac{kv}{m}:\frac{k'v'}{m'}, \qquad (7)$$

oder, insofern $m=vd$, $m'=v'd'$ ist,

$$c:c'=\frac{k}{d}:\frac{k'}{d'}.$$

Zusatz 1. Aus (6) ergiebt sich als Verhältnissgleichung der Schwerecapacitäten und daher der Schwerekräfte selbst:

$$k:k'=cd:c'd', \qquad (8)$$

daher bei gleicher absoluter Dichtigkeit der bewegten Massen:

$$k:k'=c:c'. \qquad (9)$$

Also nur dann, wenn zwei von der Schwere bewegte Massen gleiche absolute Dichtigkeiten haben, verhalten sich die treibenden Schwerkräfte wie die in gleichen Zeiten erzeugten Geschwindigkeiten.

Zusatz 2. Das Corollar. 6. zur lex. III. in Newton's Princ. phil. natur. gilt also nur bei gleichen absoluten Dichtigkeiten der bewegten Massen; dazu ist noch Folgendes zu bemerken:

Newton unterschied bekanntlich die Schwere nach drei Gesichtspunkten der theoretischen Betrachtung in die gravitas absoluta, motrix und acceleratrix. Mit der gravitas absoluta bezeichnet er die Intensität der Schwere, sofern sie von der Masse des Centralkörpers bedingt ist; mit der gravitas motrix das mechanische Moment der durch die Schwere bewegten Masse oder auch das Gewicht derselben; mit der gravitas acceleratrix den Quotienten aus der von der Schwere bewegten Masse in das mechanische Moment derselben, oder in die gravitas motrix.

Demgemäss schliesst Newton bei der Betrachtung der gravitas acceleratrix sowohl die Rücksicht auf die Masse des Gravitationscentrums, als des von der Schwere bewegten Körpers

aus, und macht also ausschliesslich die rein-geometrischen Eigenschaften der Schwereerscheinungen zum Gegenstande seiner Theorie der gravitas acceleratrix, was er in der unter §. 1. angeführten Stelle auch ausdrücklich zu erkennen giebt.

Es scheint daher die Theorie der Schwerecapacität mit der Newton'schen Lehre von der gravitas acceleratrix ganz zusammenzufallen, und in der That würde es so sein, wenn Newton diese räumliche Bedingtheit der Schwere, wie sie das Gesetz $k = \frac{g}{r^2}$ anzeigt, wirklich zum Entwickelungsprincip der vis acceleratrix gemacht hätte. Allein Newton hat sich darauf beschränkt, eine durch Induction gewonnene Thatsache, nämlich die Gleichheit der in gleichen Fallzeiten erzeugten Geschwindigkeiten schwerer Massen, die sich in gleichem Abstande von einem und demselben Gravitationscentrum befinden, zum wesentlichen Merkmale seiner gravitas acceleratrix zu machen und mittelst dieses Merkmales allein die Rechnung einzurichten; so setzt er in der defin. VI. Princ. phil. natur. fest: „Vis centripetae quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.“ Diese empirische Regel gilt aber nur für einen besonderen Fall des aus den räumlichen Eigenschaften der Schwere fliessenden allgemeinern Gesetzes, welches in §. 4. unter (4) dargestellt ist, nämlich nur dann, wenn die Massen gleiche absolute Dichtigkeiten haben, wie sich unter (9) ergiebt, so dass die Schwerecapacität eine etwas allgemeinere Bedeutung hat, als die vis acceleratrix Newton's.

Die Beschränkung aber, in welcher Newton die Theorie der gravitas acceleratrix aufgefasst hat, musste die principielle Entwickelung derselben wesentlich hindern, und ist späterhin die Veranlassung zu mancherlei Unklarheiten geworden. Schon die ersten Commentatoren Newton's, Lesueur und Jacquier, verwischten den rein-geometrischen Charakter der gravitas acceleratrix, und fassten sie als die Einheit der vis motrix (Princ. phil. nat. perpet. comment. illustr. Lesueur et Jacquier. tom. I. not. 15.), wozu wohl die analytische Darstellung, vermöge deren z. B. Hermann in seiner Phoronomie (Amsterdam 1716. §. 145. S. 65.) die beschleunigende Kraft aus der bewegenden herleitet (indem er in $\partial t = \frac{m \partial u}{g}$ die Masse m der Einheit gleich setzt), Veranlassung gegeben haben mag; ebenso definiren Kästner (Anfangsgründe der höhern Mechanik, erster Abschnitt, cap. 3. §. 49.), Poisson (Traité de Mécanique, tom. II. livr. III. §. 316.) und mehrere Andere. Aber auch die grossen

Mathematiker, die der Newton'schen Auffassung der gravitas acceleratrix treuer blieben, wie Leonhard Euler, der nur den Namen änderte (Mechanica, tom. I. §. 263.), d'Alembert, der das Element der Geschwindigkeit an die Stelle der Geschwindigkeit selbst setzte (Dynamique, part. I. §. 22.), ferner Lagrange, Laplace u. A. haben gegen die geometrischen Eigenschaften der Schwere gefehlt, indem sie voraussetzten, dass die letzten Elemente der Körper von verschiedener Dichtigkeit sein könnten, was bei der Abhängigkeit des Gesetzes (9) in §. 4. von dem unter (8) dargestellten durchaus unstatthaft ist und auch der ausdrücklichen Annahme Newton's (Princ. ph. nat. lib. III. prop. 6. coroll. 3.) widerstreitet. So schreibt Leonhard Euler in der Mechan. tom. I. cap. 2. §. 139. schol.: „Puncta vero ea inter se aequalia censeri debent, non quae aeque sunt parva, sed in quae eadem potentia aequales exerit effectus", und Laplace in der Mécanique cel. part. I. livr. 1. chap. 3. §. 13. sagt ganz ähnlich: „Ce que nous venons de dire suppose que les corps sont composés de points matériels semblables, ... Mais il est possible, qu'il y ait des differences essentielles entre leurs molécules integrantes. Heureusement on peut sans craindre aucune erreur en faire usage, pourvu que par points matériels semblables on entende des points qui se choquant avec des vitesses égales et contraires se font mutuellement l'équilibre, que soit leur nature."

Ueberdies hat die hier hervortretende theoretische Gleichstellung von materiellen Punkten und den Massentheilchen der Körper ohne Zweifel vorzüglich mit dazu beigetragen, die Einsicht in die Bildung der Massen aus ihren Elementen zu verdunkeln. Die materiellen Punkte haben, als Differentiale der Massen betrachtet, vermöge der mathematischen Continuität ihre gute theoretische Bedeutung; sie führen aber vom einfachen Element zum Ganzen nicht durch Aggregirung der Elemente, sondern durch eine genetische, lückenlose Construction; in der Form des Calcüls, also nicht durch Addition der Elemente, sondern durch Integration, die nur bildlicher Weise als Summirung bezeichnet werden kann. Die Physik aber, soweit sie die Veränderungen in der Gestalt der Massen begreiflich machen will, kann ihr Geschäft mittelst entsprechender Anordnung der Massentheilchen ausführen und bedarf nicht einer eigenthümlichen Construction, vermöge deren Theile einer Masse aus einem der Materie ungleichartigen Etwas so erzeugt werden müssten, wie aus einem bewegten Punkte ein begrenzter geometrischer Körper hervorgehen kann. Sie kann sich daher, wenn sie nicht ohne alle Veranlassung transcendent werden will, des Begriffes eines materiellen Punktes nur als einer wissenschaftlichen Hilfsvorstellung bedienen, die im Gebiete ge-

wisser geistiger Operationen ihr gesundes Leben und ihre reale Bedeutung hat; ist aber weder genöthigt, noch veranlasst, demselben einen physisch-realen oder empirischen Werth beizulegen. Das kann der Physiker nicht fest genug im Auge behalten, wenn er den seit Leibnitz so oft wiederholten Ansprüchen einer sogenannten dynamischen Naturphilosophie begegnet, welche die auf inductivem Grunde ruhende, sicher und rastlos fortschreitende Physik in die Schicksale der immer noch streitenden Philosophenschulen zu verflechten versucht.

§. 5.

Nach Newton's vielfach bestätigten und erweiterten Untersuchungen der planetarischen und der Pendelbewegung sind die Fallgeschwindigkeiten aller Körper im leeren Raume nach gleichen Fallzeiten und in gleichen Entfernungen von einem und demselben Gravitationscentrum gleich gross; desgleichen verhalten sich die Massen aller Körper wie ihre Gewichte. (Princ. ph. nat. lib. II. prop. 24. u. lib. III. prop. 6. — Bessel: Untersuchungen über die Länge des Secundenpendels in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1830.)

Für gleiche Entfernungen von einem und demselben Gravitationscentrum folgt also vermöge der eben angeführten Newton-schen Inductionen aus §. 4. No. (6): $c:c' = \frac{k}{d}:\frac{k'}{d'}$, dass $c = c'$, also auch

$$\frac{k}{d} = \frac{k'}{d'} \qquad (10)$$

sein muss, eine Bedingung, die dadurch erfüllt wird, dass entweder $k = k'$ und zugleich $d = d'$ genommen wird, oder dass allgemein

$$k:k' = d:d'$$

ist. Im letztern Falle würde bei $n$facher Dichtigkeit einer lückenlosen Masse auch ihre Schwerecapacität die $n$fache von der Schwerecapacität eines Körpers von gleichem Volumen, aber von einfacher absoluter Dichtigkeit sein. Da nun bei $n$facher Dichtigkeit der Masse in einem und demselben Volumen auch $n$mal mehr Masse ist, als bei der einfachen Dichtigkeit, und das Gewicht dem Producte der beschleunigenden Kraft oder der Schwerecapacität in die Masse gleich ist, so würden sich die Gewichte solcher Massen verhalten wie $mk:n^2mk$, oder wie $1:n^2$, also nicht wie die Massen selbst, was der zweiten der oben angeführten inductiven Regeln Newton's widerspricht.

Es ist also die Annahme einer **specifischen** Schwerecapacität, der gemäss die Gravitation verschiedenartiger Massen gegen eine und dieselbe Centralmasse verschiedene Intensitätsgrade haben sollte, nicht zulässig, da die einzige Form einer specifischen Gravitation, welche das möglichst allgemeine Gesetz in §. 4. No. (6) als denkbar erscheinen lässt, wie eben bewiesen wurde, der Erfahrung widerspricht.

Es ist also für alle Massen, so weit die Newton'schen und spätern Inductionen reichen, $k = k'$, und daher aus (10) auch $d = d'$, also erwiesen, dass die absoluten Dichtigkeiten aller Massen von einerlei Grösse sind.

§. 6.

Mit diesem mathematisch-inductiven Beweise der gleichen absoluten Dichtigkeit aller Körper ist die Thatsache der empirischen Ungleichheit der specifischen Gewichte verschiedener Massen nur mittelst der Annahme zu vereinigen, dass die Materie die Körper unter deren geometrisch-begrenztem Volumen nicht lückenlos erfüllt, dass sie vielmehr aus einem Aggregate getrennter materieller Theile bestehe, welche in allen Körpern einerlei Dichtigkeit haben, so dass bei allen Körpern absolutes und relatives specifisches Gewicht unterschieden werden muss.

Es sei nemlich die allgemeine gleiche absolute Dichtigkeit aller Materie d, so ist die Masse m eines Körpers vom Volumen v bei lückenloser Erfüllung $m = vd$. Ein anderer Körper, der dasselbe Gewicht hat oder eine gleich grosse Masse m unter dem Volumen v' enthält, hat dieselbe absolute Dichtigkeit d, und es wäre daher

$$v'd = vd,$$

wenn beide Massen ihr Volumen lückenlos erfüllten.

Wegen der Thatsache der Verschiedenheit der empirischen specifischen Dichtigkeiten oder Gewichte der Körper wird aber $v' \gtrless v$, also

$$(v \pm \Delta v) d = vd \qquad (11)$$

sein, woraus $\pm \Delta v . d = 0$ folgt. Da nun $\Delta v . d$ die Masse oder das Gewicht der den Raumtheil Δv erfüllenden Materie darstellt, so muss dieses Volumen, von dem die scheinbare Verschiedenheit des specifischen Gewichtes oder der Dichtigkeit der Materie abhängt, von Materie leer gedacht werden.

Die bekannte Thatsache, dass v' unter dem Einflusse der Wärme ohne Ende wachsen, dagegen bei Entziehung derselben nicht ohne Ende abnehmen kann, entscheidet dafür, dass in (11) nur der Werth $v+\Delta v$, nicht aber $v-\Delta v$ brauchbar ist, weil die absolute Dichtigkeit eines Körpers nur da gesucht werden kann, wo sich ein veränderliches Volumen bei constanter Masse einer festen Grenze ohne Ende nähert. Das Volumen v eines Körpers und der leere Raum desselben werden also um so grösser, je geringer das empirische specifische Gewicht desselben ist. Dadurch ist denn bewiesen, dass alle Körper, so lange sie bei constanter Masse ihr Volumen verringern können, als Aggregate getrennter Theile, welche letzteren ihre Volumina lückenlos erfüllen, anzusehen sind, und bei allen solchen Körpern absolutes und specifisches Gewicht zu unterscheiden ist.

§. 7.

Das absolute specifische Gewicht eines Körpers, oder die Dichtigkeit der ihre Volumina lückenlos erfüllenden Massentheile desselben, muss das grösste bekannte relative specifische Gewicht noch übertreffen, wenn derselbe bei constanter Masse sein Volumen verringern kann. Setzt man jedoch die grösste bekannte relative Dichtigkeit der absoluten Dichtigkeit aller Materie nahe gleich, so kann man das Gesammtvolumen der materiellen Theile jedes Körpers, dessen specifisches Gewicht bestimmt ist, wenigstens annähernd finden. Denn ist v das Gesammtvolumen aller dieser Massentheile eines Körpers, dessen relative Dichtigkeit d' und dessen äusserlich geometrisch-begrenztes Volumen v' ist, und ist d die grösste vorkommende relative Dichtigkeit eines Körpers, also etwa die des Platin, so hat man, wenn gleiche Gewichtstheile genommen werden, $vd=v'd'$, also das Gesammtvolumen der Massentheile

$$v=\frac{v'd'}{d}, \tag{12}$$

und die Summe aller leeren Zwischenräume:

$$v'-v=\frac{(d-d')v'}{d}. \tag{13}$$

Nimmt man z. B. die Dichtigkeit des Platins etwa 22, so können die Massentheilchen des Wasserstoffgases bei 0°° höchstens $\frac{1}{22.770.14}$ oder $\frac{1}{240000}$ des ganzen Volumens, also in einem Ku-

bikfuss Wasserstoffgas höchstens $12\frac{1}{2}$ Kubiklinien einnehmen und der leere Raum muss wenigstens $2985971\frac{1}{2}$ Kubiklinien betragen.

§. 8.

Es ist noch nicht gelungen, die Dimensionen der Massentheile, deren Aggregate die Körper bilden, zu messen oder dem Auge sichtbar zu machen; die Beobachtungen und Schlüsse Ehrenberg's (Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie. 1832. S. 1. ff.) beweisen aber schon so viel, dass dieselben noch weit unter $\frac{1}{6000000}$ par. Linie liegende Durchmesser haben. Ferner sind die Erfahrungen der Chemie bis jetzt jeder Veränderlichkeit der Massen dieser Grundtheilchen entgegen; man darf also dieselben immer noch Atome nennen, wenn man damit nur ihre physische und empirische Untheilbarkeit bezeichnet.

Setzt man voraus, dass in den chemischen Verbindungen zweier Stoffe, aus denen ihre Mischungsgewichte berechnet sind, die Atome von beiden Seiten in gleicher Anzahl zusammentreten, so würden die Zahlen der Mischungsgewichte durchgängig die relativen Gewichte der Atome selbst darstellen. Wenn aber auch zur Zeit die Chemiker bezüglich der Atomzahlen noch nicht in durchgängiger Uebereinstimmung sind (vergl. G. Rose: über die Atomgewichte der einfachen Körper in Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie. 1857. S. 270. ff.), so beruhen doch die Unterschiede hauptsächlich auf Verdoppelung derselben oder Herabsetzung auf die Hälfte; nimmt man also die gebräuchlichsten Mischungsgewichte vorläufig für die relativen Atomgewichte, so kennt man wenigstens den Umfang der etwa später erforderlichen Verbesserungen derselben im Voraus.

Da die Atome alle gleiche Dichtigkeit haben, so verhalten sich ihre relativen Volumina wie ihre relativen Gewichte, also ebenfalls wie ihre Mischungsgewichte.

Man kann daher gegenwärtig annehmen, dass die relativen Gewichte und Volumina der Atome zwischen den Grenzen 1 (für den Wasserstoff) und 216 (für das Silber) enthalten sind; dürfte man die geometrische Aehnlichkeit aller Atome annehmen, was bei der grossen Verschiedenheit der Krystallaxen nach Neigung und relativer Länge wohl kaum zu wagen ist, so würden die grössten Unterschiede ihrer homologen linearen Dimensionen zwischen 1 und 6 fallen.

II.

Ueber den Flächeninhalt in oder um eine Ellipse beschriebener Dreiecke und Vierecke.

Von
dem Herausgeber.

Ich habe schon in früheren Abhandlungen (Thl. XXIV. Nr. XXIX. S. 370. — Thl. XXVI. Nr. IX. S. 198.) auf den wichtigen und fruchtbaren Gebrauch aufmerksam gemacht, welcher sich von den sogenannten Anomalien in der Theorie der Ellipse und Hyperbel machen lässt. In der vorliegenden Abhandlung werde ich eine Reihe sehr merkwürdiger und interessanter Ausdrücke für die Flächenräume in oder um eine Ellipse beschriebener Dreiecke und Vierecke entwickeln, welche, wie ich hoffe, die Wichtigkeit jenes Gebrauchs in noch helleres Licht setzen werde, wobei ich noch bemerke, dass die von mir im Folgenden entwickelten Ausdrücke in einer sehr bemerkenswerthen Analogie zu gewissen, längst bekannten, für den Fall des Kreises geltenden Ausdrücken stehen.

I.

Das in die Ellipse beschriebene Dreieck.

Wir wollen die Anomalien dreier beliebiger Punkte A_0, A_1, A_2 einer Ellipse respective durch u_0, u_1, u_2, und die diese Punkte mit einander verbindenden Sehnen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0, welche die Seiten des in die Ellipse beschriebenen Dreiecks $A_0A_1A_2$ sind, durch $s_{0,1}$, $s_{1,2}$, $s_{2,0}$ bezeichnen. Die Gleichungen der Sehnen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 sind: *)

*) Thl. XXIV. S. 373.

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$
$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$
$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

und die Längen dieser Sehnen werden durch die folgenden Formeln bestimmt: *)

$$s_{0,1}^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\},$$
$$s_{1,2}^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)^2\},$$
$$s_{2,0}^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2\}.$$

Bezeichnen wir nun die Winkel des Dreiecks $A_0A_1A_2$ durch A_0, A_1, A_2, so lassen sich für dieselben aus den Gleichungen der Sehnen mittelst der bekannten Formeln der analytischen Geometrie leicht Ausdrücke durch die Anomalien ableiten. Etwa für den Winkel A_0 findet man mittelst dieser Formeln sogleich:

$$\operatorname{tang}A_0^2=\frac{\frac{b^2}{a^2}\{\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2}{\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2}$$

oder

$$\operatorname{tang}A_0^2=\frac{a^2b^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2}{\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2},$$

und hieraus dann ferner mittelst bekannter goniometrischer Formeln:

$$\sin A_0^2=\frac{\frac{b^2}{a^2}\{\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2}{\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2\}},$$

$$\cos A_0^2=\frac{\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2}{\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}\{1+\frac{b^2}{a^2}\cot\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2\}};$$

oder:

$$\sin A_0^2$$
$$=\frac{a^2b^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2}{\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2\}},$$

$$\cos A_0^2$$
$$=\frac{\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2}{\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2\}}.$$

*) A. a. O. S. 374.

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2=\frac{s_{0,1}{}^2}{4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2},$$

$$a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)^2=\frac{s_{2,0}{}^2}{4\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2};$$

also ist:

$$\sin A_0{}^2=\frac{16a^2b^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2}{s_{0,1}{}^2\,.\,s_{2,0}{}^2}$$

und

$$\cos A_0{}^2$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}16\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2\\ \times\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2\end{array}\right\}}{s_{0,1}{}^2\,.\,s_{2,0}{}^2}.$$

Nehmen wir an, dass, wenn man sich von dem Halbmesser der Ellipse an, von welchem an die Anomalien von 0 bis 360° gezählt werden, nach der Richtung hin bewegt, nach welcher die Anomalien gezählt werden, man zuerst auf den Punkt A_0, dann auf den Punkt A_1, dann auf den Punkt A_2 trifft, so sind offenbar die Sinus

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

sämmtlich positiv, und das Product

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

so wie auch das Product

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

ist folglich positiv. Daher hat man unter der gemachten Voraussetzung nach dem Obigen die drei folgenden merkwürdigen Formeln:

$$s_{0,1}\,.\,s_{2,0}\,.\sin A_0=4ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$s_{1,2}\,.\,s_{0,1}\,.\sin A_1=4ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$s_{2,0}\,.\,s_{1,2}\,.\sin A_2=4ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0).$$

Bezeichnet nun $\varDelta$ den Flächeninhalt des in die Ellipse beschriebenen Dreiecks $A_0A_1A_2$, so ist bekanntlich

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}s_{0,1}\,.\,s_{2,0}\,.\sin A_0=\tfrac{1}{2}s_{1,2}\,.\,s_{0,1}\,.\sin A_1=\tfrac{1}{2}s_{2,0}\,.\,s_{1,2}\,.\sin A_2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\varDelta = 2ab \sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

welches jedenfalls ein sehr merkwürdiger Ausdruck für den Flächeninhalt eines in eine Ellipse beschriebenen Dreiecks ist.

Leicht sieht man übrigens ein, dass dieser Ausdruck auch dann noch richtig bleibt, wenn die Punkte A_0, A_1, A_2 nur so auf einander folgen, dass man sich, wenn man sie in der vorstehenden Ordnung durchläuft, nach der Richtung bewegt, nach welcher die Anomalien gezählt werden.

Die Gleichungen der den Seiten

$$A_0A_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_0$$

des Dreiecks $A_0A_1A_2$ parallelen Durchmesser der Ellipse sind: *)

$$y = -\frac{b}{a} x \cot\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1), \quad y = -\frac{b}{a} x \cot\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad y = -\frac{b}{a} x \cot\tfrac{1}{2}(u_2 + u_0).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte des ersten dieser Durchmesser mit der Ellipse durch $x_{0,1}$, $y_{0,1}$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{x_{0,1}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_{0,1}}{b}\right)^2 = 1, \quad y_{0,1} = -\frac{b}{a} x_{0,1} \cot\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1);$$

woraus sich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander leicht ergiebt:

$$x_{0,1} = \pm a \sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1), \quad y_{0,1} = \mp b \cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1);$$

und ist nun $r_{0,1}$ der mit A_0A_1 parallele Halbmesser der Ellipse, so ist

$$r_{0,1}^2 = x_{0,1}^2 + y_{0,1}^2 = a^2 \sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)^2 + b^2 \cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)^2 = \frac{s_{0,1}^2}{4 \sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)^2},$$

also:

$$s_{0,1} = 2r_{0,1} \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad s_{1,2} = 2r_{1,2} \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1),$$
$$s_{2,0} = 2r_{2,0} \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0);$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{s_{0,1}}{r_{0,1}} \cdot \frac{s_{1,2}}{r_{1,2}} \cdot \frac{s_{2,0}}{r_{2,0}},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\varDelta = \frac{ab}{4} \cdot \frac{s_{0,1}}{r_{0,1}} \cdot \frac{s_{1,2}}{r_{1,2}} \cdot \frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}.$$

---

*) A. a. O. S. 373.

Für den Kreis ist $r_{0,1}=r_{1,2}=r_{2,0}=r$ und auch $a=b=r$, also:

$$\Delta=\frac{s_{0,1}\,s_{1,2}\,s_{2,0}}{4r},$$

welches ein längst bekannter Ausdruck ist, den folglich der vorhergehende sehr merkwürdige, allgemein für die Ellipse geltende Ausdruck als einen besonderen Fall enthält.

Mittelst bekannter goniometrischer Zerlegungen erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_0),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)-\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_0),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$
$$=4\sin\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_0),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$
$$=4\sin\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_0);$$

also ist das Product der vier Grössen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen:

$$4^4.\sin\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)^2\cos\tfrac{1}{4}(u_1-u_0)^2.\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)^2\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_1)^2$$
$$\times\sin\tfrac{1}{4}(u_2-u_0)^2\cos\tfrac{1}{4}(u_2-u_0)^2,$$

folglich:

$$4\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2$$

oder

$$4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\Delta^2}{a^2b^2}.$$

Nun ist aber nach den oben gefundenen Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)=\tfrac{1}{2}.\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}},\quad \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)=\tfrac{1}{2}.\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}},\quad \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)=\tfrac{1}{2}.\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}};$$

folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)-\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}-\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right);$$

also obiges Product auch:

$$\frac{1}{16}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\left(\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\right)\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\right)$$
$$\times\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}-\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right).$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so erhält man die folgende, gleichfalls sehr bemerkenswerthe Formel:

$$\varDelta=\tfrac{1}{4}ab\sqrt{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\left(\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\right)\\ \times\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\right)\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}-\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\end{array}\right\}},$$

welche für den Fall des Kreises in den bekannten Ausdruck für den Inhalt des Dreiecks durch seine drei Seiten übergeht.

Weil nun natürlich auch im Falle der Ellipse

$$\varDelta=\tfrac{1}{4}\sqrt{(s_{0,1}+s_{1,2}+s_{2,0})(s_{1,2}+s_{2,0}-s_{0,1})(s_{0,1}+s_{2,0}-s_{1,2})(s_{0,1}+s_{1,2}-s_{2,0})}$$

ist, so erhält man die folgende, ebenfalls sehr merkwürdige, für jede drei Punkte der Ellipse geltende Relation:

$$ab=\sqrt{\frac{\left\{\begin{array}{c}(s_{0,1}+s_{1,2}+s_{2,0})(s_{1,2}+s_{2,0}-s_{0,1})(s_{0,1}+s_{2,0}-s_{1,2})\\ \times(s_{0,1}+s_{1,2}-s_{2,0})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\left(\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\right)\\ \times\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\right)\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}-\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\end{array}\right\}}},$$

oder:

$$a^2b^2=\frac{(s_{0,1}+s_{1,2}+s_{2,0})(s_{1,2}+s_{2,0}-s_{0,1})(s_{0,1}+s_{2,0}-s_{1,2})(s_{0,1}+s_{1,2}-s_{2,0})}{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\left(\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\right)\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}-\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\right)\\ \times\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}-\frac{s_{2,0}}{r_{2,0}}\right)\end{array}\right\}}.$$

Sind u_0', u_1', u_2' drei andere Anomalien, und bezeichnet $\varDelta'$ den Inhalt des entsprechenden Dreiecks, so ist

$$\varDelta' = 2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0'-u_1')\sin\tfrac{1}{2}(u_1'-u_2')\sin\tfrac{1}{2}(u_2'-u_0').$$

Ist nun

$$u_0-u_1=u_0'-u_1',\quad u_1-u_2=u_1'-u_2'$$

oder

$$u_1-u_0=u_1'-u_0',\quad u_2-u_1=u_2'-u_1';$$

so ist, wie hieraus auf der Stelle durch Addition folgt, auch

$$u_2-u_0=u_2'-u_0',$$

also $\varDelta=\varDelta'$, woraus sich der sehr merkwürdige Satz ergiebt, dass alle in eine Ellipse beschriebene Dreiecke, für welche die Differenzen der Anomalien der einander entsprechenden Ecken oder Spitzen gleich sind, gleiche Flächenräume haben.

Sind zwei Dreiecke in zwei Ellipsen beschrieben, welche die Halbaxen a, b und a', b' haben, und sind für diese beiden Dreiecke die Anomalien u_0, u_1, u_2 und u_0', u_1', u_2'; so ist, wenn die Flächenräume der Dreiecke durch $\varDelta$ und $\varDelta'$ bezeichnet werden:

$$\varDelta=2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$\varDelta'=2a'b'\sin\tfrac{1}{2}(u_0'-u_1')\sin\tfrac{1}{2}(u_1'-u_2')\sin\tfrac{1}{2}(u_2'-u_0');$$

also, wenn

$$u_1-u_0=u_1'-u_0',\quad u_2-u_1=u_2'-u_1',\quad u_2-u_0=u_2'-u_0'$$

ist:

$$\frac{\varDelta}{\varDelta'}=\frac{ab}{a'b'}.$$

Aehnliche bemerkenswerthe Beziehungen würden sich noch manche andere aus dem Obigen ableiten lassen.

Insbesondere setzt uns das Vorhergehende in den Stand, auf eine sehr merkwürdige und höchst einfache Weise das grösste Dreieck zu bestimmen, welches sich in eine gegebene Ellipse beschreiben lässt.

Setzen wir nämlich

$$u_1-u_0=v,\quad u_2-u_1=w,\quad u_2-u_0=v+w;$$

so ist nach dem Obigen:

$$\varDelta=2ab\sin\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}w\sin\tfrac{1}{2}(v+w).$$

Die gemeinschaftlichen Bedingungen des Maximums und Minimums sind, indem man alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten als partielle zu betrachten hat:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial \varDelta}{\partial w}=0.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial v}=ab\sin\tfrac{1}{2}w\sin(v+\tfrac{1}{2}w),$$

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial w}=ab\sin\tfrac{1}{2}v\sin(w+\tfrac{1}{2}v);$$

und hat also die beiden Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}w\sin(v+\tfrac{1}{2}w)=0,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}v\sin(w+\tfrac{1}{2}v)=0.$$

Die beiden Gleichungen

$$\sin\tfrac{1}{2}w=0,\quad \sin\tfrac{1}{2}v=0$$

würden, wenn k und k_1 positive ganze Zahlen bezeichnen, zu den beiden Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}w=k\pi,\quad \tfrac{1}{2}v=k_1\pi \quad\text{oder}\quad w=2k\pi,\quad v=2k_1\pi$$

führen, und sind also offenbar unzulässig, weil v und w augenscheinlich weder verschwinden, noch Vielfache von 2π, auch nicht 2π selbst, sein können. Also kann, indem immer k und k_1 positive ganze Zahlen bezeichnen, nur

$$v+\tfrac{1}{2}w=k\pi,\quad w+\tfrac{1}{2}v=k_1\pi$$

sein, welche Gleichungen unmittelbar aus den beiden Gleichungen

$$\sin(v+\tfrac{1}{2}w)=0,\quad \sin(w+\tfrac{1}{2}v)=0$$

folgen. Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich:

$$2v+w=2k\pi,\quad v+2w=2k_1\pi;$$

also

$$3(v+w)=2(k+k_1)\pi,\quad v-w=2(k-k_1)\pi;$$

woraus ferner

$$6v=4(2k-k_1)\pi,\quad 6w=4(2k_1-k)\pi$$

oder

$$3v=2(2k-k_1)\pi,\quad 3w=2(2k_1-k)\pi$$

folgt. Da $v = u_1 - u_0$, $w = u_2 - u_1$ unter den gemachten Voraussetzungen positiv sind, so sind $2k - k_1$ und $2k_1 - k$ positive ganze Zahlen, und wir können daher kürzer, wenn k' und k_1' solche Zahlen bezeichnen,

$$3v = 2k'\pi, \quad 3w = 2k_1'\pi$$

setzen. Keine der beiden positiven ganzen Zahlen k', k_1' kann verschwinden, weil keine der Differenzen v, w verschwinden kann, insofern es sich um ein in die Ellipse zu beschreibendes wirkliches Dreieck handelt. Keine der beiden positiven ganzen Zahlen k', k_1' kann 3 sein, weil, wenn dies der Fall wäre, eine der Differenzen v, w gleich 2π wäre, was wieder offenbar nicht möglich ist; noch weniger kann natürlich eine der beiden positiven ganzen Zahlen k', k_1' grösser als 3 sein. Endlich kann auch nicht die eine der beiden positiven ganzen Zahlen k', k_1' die Einheit, die andere 2 sein; denn aus den obigen Gleichungen folgt

$$3(v + w) = 2(k' + k_1')\pi,$$

also

$$3(u_2 - u_0) = 2(k' + k_1')\pi,$$

und unter der gemachten Voraussetzung, dass eine der beiden positiven ganzen Zahlen k', k_1' die Einheit, die andere 2 wäre, würde folglich $u_2 - u_0 = 2\pi$ sein, was wieder nicht möglich ist; noch weniger können natürlich beide Zahlen k', k_1' gleich 2 sein. Also bleibt nichts Anderes übrig, als dass $k' = 1$, $k_1' = 1$, folglich nach dem Obigen

$$3v = 2\pi, \quad 3w = 2\pi, \quad 3(v + w) = 4\pi;$$

also

$$v = \tfrac{2}{3}\pi, \quad w = \tfrac{2}{3}\pi, \quad v + w = \tfrac{4}{3}\pi$$

oder

$$u_1 - u_0 = \tfrac{2}{3}\pi, \quad u_2 - u_1 = \tfrac{2}{3}\pi, \quad u_2 - u_0 = \tfrac{4}{3}\pi$$

oder

$$u_1 - u_0 = \tfrac{2}{3}\pi, \quad u_2 - u_1 = \tfrac{2}{3}\pi, \quad 2\pi - (u_2 - u_0) = \tfrac{2}{3}\pi$$

ist.

Wir müssen nun noch untersuchen, ob die Bedingungen des Maximums wirklich erfüllt sind. Zu dem Ende erhalten wir durch fernere Differentiation aus dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial v^2} = ab \sin \tfrac{1}{2}w \cos (v + \tfrac{1}{2}w), \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial w^2} = ab \sin \tfrac{1}{2}v \cos (w + \tfrac{1}{2}v)$$

und

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial v\partial w}=\tfrac{1}{2}ab\sin(v+w).$$

Nun ist nach dem Obigen:

$$\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{3}\pi,\quad \tfrac{1}{2}w=\tfrac{1}{3}\pi;\quad v+\tfrac{1}{2}w=\pi,\quad w+\tfrac{1}{2}v=\pi;$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \sin\tfrac{1}{2}w=\tfrac{1}{2}\sqrt{3};\quad \cos(v+\tfrac{1}{2}w)=-1,\ \cos(w+\tfrac{1}{2}v)=-1;$$

folglich für diese Werthe von v und w:

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial v^2}=-\tfrac{1}{2}ab\sqrt{3},\quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial w^2}=-\tfrac{1}{2}ab\sqrt{3};$$

so dass also die zweiten Differentialquotienten negativ sind, wie es das Maximum bekanntlich fordert.

Ferner ist nach dem Obigen $v+w=\tfrac{4}{3}\pi$, also

$$\sin(v+w)=-\sin\tfrac{1}{3}\pi=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial v\partial w}=-\tfrac{1}{4}ab\sqrt{3};$$

also ist

$$\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial v\partial w}\right)^2-\frac{\partial^2\Delta}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial w^2}=(\tfrac{3}{16}-\tfrac{3}{4})a^2b^2=-\tfrac{9}{16}a^2b^2,$$

und diese Grösse folglich negativ, wie es nöthig ist, wenn wirklich ein Maximum Statt finden soll, woraus wir nun sehen, dass die Bedingungen des Maximums vollständig erfüllt sind.

Ueberhaupt führt uns die vorhergehende Betrachtung zu dem folgenden jedenfalls sehr merkwürdigen Satze:

> Jedes der in eine Ellipse beschriebenen, einander gleichen Dreiecke, für welche die Differenzen der Anomalien ihrer Ecken 120° betragen, ist ein Maximum;

und wer erkennt hier nicht auf der Stelle eine sehr interessante Analogie mit dem längst bekannten Satze, dass unter allen Dreiecken, welche sich in einen Kreis beschreiben lassen, das gleichseitige den grössten Flächeninhalt hat, welcher Satz in dem obigen merkwürdigen Satze von der Ellipse als ein besonderer Fall enthalten ist?

Wie man mittelst des obigen Satzes sehr leicht das grösste Dreieck in eine Ellipse beschreiben kann, ist klar.

Weil überhaupt

$$\varDelta = 2ab\sin\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}w\sin\tfrac{1}{2}(v+w)$$

ist, so ist, wenn jetzt $\varDelta$ den Inhalt des grössten Dreiecks bezeichnet, welches sich in die Ellipse beschreiben lässt:

$$\varDelta = 2ab\sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\tfrac{2}{3}\pi = 2ab\sin 60^{\circ}.\sin 60^{\circ}.\sin 120^{\circ}$$
$$= 2ab.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

also:

$$\varDelta = \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Für den mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis giebt dies die bekannte Formel:

$$\varDelta = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Ellipse durch E, so ist bekanntlich $E = ab\pi$, also, wenn jetzt immer $\varDelta$ den Flächeninhalt des grössten Dreiecks bezeichnet:

$$\frac{\varDelta}{E} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \text{ oder } \frac{E}{\varDelta} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}};$$

und dieses Verhältniss ist folglich für alle Ellipsen constant; oder die Flächenräume der Ellipsen verhalten sich wie die Flächenräume der in sie beschriebenen grössten Dreiecke.

II.

Das um die Ellipse beschriebene Dreieck.

Wir wollen nun zur Betrachtung der um die Ellipse beschriebenen Dreiecke übergehen, wobei wir wieder drei durch die Anomalien u_0, u_1, u_2 bestimmte Punkte A_0, A_1, A_2 der Ellipse betrachten, in denen dieselbe von den Seiten des um sie beschriebenen Dreiecks berührt wird.

Die Gleichungen der die Ellipse in den Punkten A_0, A_1, A_2 berührenden Seiten des um sie beschriebenen Dreiecks sind nach der Ordnung: *)

*) A. a. O. S. 375.

$$\frac{x}{a}\cos u_0 + \frac{y}{b}\sin u_0 = 1,$$

$$\frac{x}{a}\cos u_1 + \frac{y}{b}\sin u_1 = 1,$$

$$\frac{x}{a}\cos u_2 + \frac{y}{b}\sin u_2 = 1.$$

Die Coordinaten der Spitzen unsers Dreiecks, so wie dieselben durch die Durchschnittspunkte der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und ersten der drei vorhergehenden Linien bestimmt werden, seien:

$$x_{0,1},\ y_{0,1};\quad x_{1,2},\ y_{1,2};\quad x_{2,0},\ y_{2,0}.$$

Dann haben wir etwa zur Bestimmung von $x_{0,1}$, $y_{0,1}$ die folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_{0,1}}{a}\cos u_0 + \frac{y_{0,1}}{b}\sin u_0 = 1,$$

$$\frac{x_{0,1}}{a}\cos u_1 + \frac{y_{0,1}}{b}\sin u_1 = 1;$$

woraus leicht

$$\frac{x_{0,1}}{a}\sin(u_0-u_1) = \sin u_0 - \sin u_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1),$$

$$\frac{y_{0,1}}{b}\sin(u_0-u_1) = -(\cos u_0 - \cos u_1) = 2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1);$$

also

$$\frac{x_{0,1}}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)},\quad \frac{y_{0,1}}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}$$

erhalten wird; und wir haben daher überhaupt:

$$\frac{x_{0,1}}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)},\quad \frac{y_{0,1}}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)};$$

$$\frac{x_{1,2}}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(u_1+u_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)},\quad \frac{y_{1,2}}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)};$$

$$\frac{x_{2,0}}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},\quad \frac{y_{2,0}}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}.$$

Die Seiten des um die Ellipse beschriebenen Dreiecks, welche dieselbe in den Punkten A_0, A_1, A_2 berühren, sollen respective durch s_0, s_1, s_2 bezeichnet werden; dann ist:

$$s_0^2 = (x_{0,1} - x_{2,0})^2 + (y_{0,1} - y_{2,0})^2,$$
$$s_1^2 = (x_{1,2} - x_{0,1})^2 + (y_{1,2} - y_{0,1})^2,$$
$$s_2^2 = (x_{2,0} - x_{1,2})^2 + (y_{2,0} - y_{1,2})^2.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$\frac{x_{0,1} - x_{2,0}}{a} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0) - \cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$\frac{y_{0,1} - y_{2,0}}{b} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0) - \sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)};$$

und zerlegt man nun die in den Zählern dieser Brüche vorkommenden Producte auf bekannte Weise, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{x_{0,1} - x_{2,0}}{a} = -\frac{\sin u_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$\frac{y_{0,1} - y_{2,0}}{b} = \frac{\cos u_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)};$$

folglich:

$$s_0^2 = \frac{(a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2}.$$

Auf diese Weise ist also überhaupt:

$$s_0^2 = \frac{(a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2}{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2},$$

$$s_1^2 = \frac{(a^2\sin u_1^2 + b^2\cos u_1^2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2}{\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2},$$

$$s_2^2 = \frac{(a^2\sin u_2^2 + b^2\cos u_2^2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2}{\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt die drei Winkel des um die Ellipse beschriebenen Dreiecks durch $A_{0,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,0}$; so ist nach den oben angegebenen Gleichungen der Seiten des Dreiecks:

$$\operatorname{tang} A_{0,1}^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2}(\cot u_0 - \cot u_1)^2}{(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot u_0 \cot u_1)^2},$$

und folglich:

$$\sin A_{0,1}^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2}(\cot u_0 - \cot u_1)^2}{(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot u_0^2)(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot u_1^2)},$$

oder:

$$\sin A_{0,1}{}^2 = \frac{a^2b^2\sin(u_0-u_1)^2}{(a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2)(a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2)},$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$\sin A_{0,1}{}^2 = \frac{a^2b^2\sin(u_0-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2}{s_0{}^2s_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^4\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2},$$

also:

$$s_0{}^2s_1{}^2\sin A_{0,1}{}^2 = 4a^2b^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2.$$

Bezeichnet nun D den Flächeninhalt des um die Ellipse beschriebenen Dreiecks, so ist

$$D = \tfrac{1}{2}s_0s_1\sin A_{0,1},$$

welches mittelst des Vorhergehenden unmittelbar zu dem folgenden überaus merkwürdigen Ausdrucke führt:

$$D^2 = a^2b^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2.$$

Indem wir jetzt aber D selbst mittelst dieser Formel durch Ausziehung der Quadratwurzel bestimmen wollen, erhalten wir natürlich ein doppeltes Vorzeichen, und es entsteht dann die Frage, wie man das Vorzeichen zu nehmen hat, eine Frage, die hier sehr wichtig ist und des Folgenden wegen auf die gründlichste Weise beantwortet werden muss.

Sehen wir uns aber die Sache etwas genauer an, so ergiebt sich auf der Stelle, dass ein um eine Ellipse, d. h. überhaupt so beschriebenes Dreieck, dass seine drei Seiten die Ellipse berühren, entweder die Ellipse ganz einschliessen oder selbst ganz ausserhalb der Ellipse liegen kann, so dass nämlich eigentlich die Ellipse im ersten Falle ganz innerhalb, im zweiten Falle ganz ausserhalb des Dreieckes liegt, welche zwei Fälle wir daher von einander zu unterscheiden haben werden.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall, wenn nämlich das Dreieck die Ellipse ganz umschliesst oder die Ellipse ganz innerhalb des Dreiecks liegt. Bezeichnen wir also z. B. die Entfernung der Spitze $A_{0,1}$ von dem Berührungspunkte A_0 durch $s_{0,(0,1)}$ und die übrigen derartigen Entfernungen in ähnlicher Weise, so wird der Fall, mit dem wir uns jetzt zu beschäftigen beabsichtigen, durch die drei folgenden Gleichungen charakterisirt:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=s_0,\quad s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=s_1,\quad s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=s_2.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der drei Berührungspunkte durch

$$x_0,\ y_0;\quad x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;$$

so ist:

$$x_0 = a\cos u_0,\quad y_0 = b\sin u_0;$$

$$x_1 = a\cos u_1,\quad y_1 = b\sin u_1;$$

$$x_2 = a\cos u_2,\quad y_2 = b\sin u_2.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$x_0 - x_{0,1} = a\left\{\cos u_0 - \frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\right\},$$

$$y_0 - y_{0,1} = b\left\{\sin u_0 - \frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\right\}$$

und

$$x_0 - x_{2,0} = a\left\{\cos u_0 - \frac{\cos\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}\right\},$$

$$y_0 - y_{2,0} = b\left\{\sin u_0 - \frac{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}\right\};$$

woraus mittelst keiner Schwierigkeit unterliegender goniometrischer Transformationen

$$x_0 - x_{0,1} = -a\sin u_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$y_0 - y_{0,1} = \quad b\cos u_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)$$

und

$$x_0 - x_{2,0} = \quad a\sin u_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$y_0 - y_{2,0} = -b\cos u_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

also

$$s^2_{0,(0,1)} = (a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2,$$

$$s^2_{0,(2,0)} = (a^2\sin u_0^2 + b^2\cos u_0^2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2$$

gefunden wird.

Die Gleichungen der den Seiten des um die Ellipse beschriebenen Dreiecks parallelen Halbmesser der Ellipse, welche wir selbst durch r_0, r_1, r_2 bezeichnen wollen, sind nach dem Obigen:

$$y = -\frac{b}{a}x\cot u_0,\quad y = -\frac{b}{a}x\cot u_1,\quad y = -\frac{b}{a}x\cot u_2.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der Gleichung der Ellipse erhält man leicht:

$$r_0{}^2 = a^2 \sin u_0{}^2 + b^2 \cos u_0{}^2,$$
$$r_1{}^2 = a^2 \sin u_1{}^2 + b^2 \cos u_1{}^2,$$
$$r_2{}^2 = a^2 \sin u_2{}^2 + b^2 \cos u_2{}^2.$$

Also ist nach dem Obigen und ferner in ganz ähnlicher Weise:

$$s^2_{0,(0,1)} = r_0{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)^2, \quad s^2_{0,(2,0)} = r_0{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)^2;$$
$$s^2_{1,(1,2)} = r_1{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2, \quad s^2_{1,(0,1)} = r_1{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)^2;$$
$$s^2_{2,(2,0)} = r_2{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)^2, \quad s^2_{2,(1,2)} = r_2{}^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2.$$

Auch ist nach dem Obigen:

$$s_0{}^2 = \frac{r_0{}^2 \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_1)^2}{\cos \frac{1}{2}(u_1 - u_0)^2 \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_0)^2},$$
$$s_1{}^2 = \frac{r_1{}^2 \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_0)^2}{\cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 \cos \frac{1}{2}(u_1 - u_0)^2},$$
$$s_2{}^2 = \frac{r_2{}^2 \sin \frac{1}{2}(u_1 - u_0)^2}{\cos \frac{1}{2}(u_2 - u_0)^2 \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1)^2}.$$

Unter den früher gemachten Voraussetzungen, die wir auch hier festhalten, sind die Grössen

$$\sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

sämmtlich positiv; rücksichtlich der Grössen

$$\cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

oder der mit denselben gleiche Vorzeichen habenden Grössen

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

können die folgenden Zeichen-Combinationen eintreten:

$$\begin{array}{ccc} \pm & \pm & \pm \\ \pm & \pm & \mp \\ \pm & \mp & \pm \\ \pm & \mp & \mp \end{array}$$

Im ersten Falle ist nach dem Obigen zu setzen:

$$s_0 = +\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1 = +\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2 = +\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = \pm r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad s_{0,(2,0)} = \pm r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$s_{1,(1,2)} = \pm r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad s_{1,(0,1)} = \pm r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$

$$s_{2,(2,0)} = \pm r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),\quad s_{2,(1,2)} = \pm r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1).$$

Also ist

$$s_{0,(0,1)} + s_{0,(2,0)} = \pm\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_1-2u_0+u_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)} + s_{1,(0,1)} = \pm\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = \pm\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)};$$

und die drei Gleichungen

$$s_{0,(0,1)} + s_{0,(2,0)} = s_0,$$

$$s_{1,(1,2)} + s_{1,(0,1)} = s_1,$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = s_2$$

sind folglich offenbar nicht erfüllt.

Im zweiten Falle muss man setzen:

$$s_0 = -\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1 = +\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2 = -\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = \pm r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad s_{0,(2,0)} = \mp r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$s_{1,(1,2)} = \pm r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad s_{1,(0,1)} = \pm r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$

$$s_{2,(2,0)} = \mp r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),\quad s_{2,(1,2)} = \pm r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1).$$

Also ist

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)};$$

und die drei Gleichungen

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=s_0,$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=s_1,$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=s_2$$

sind also erfüllt, wenn man die oberen Zeichen nimmt.

Im dritten Falle muss man

$$s_0=+\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1=-\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=-\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)}=\pm r_0\tang\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad s_{0,(2,0)}=\pm r_0\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$s_{1,(1,2)}=\mp r_1\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad s_{1,(0,1)}=\pm r_1\tang\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$

$$s_{2,(2,0)}=\pm r_2\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),\quad s_{2,(1,2)}=\mp r_2\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$

setzen. Also ist

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)};$$

und die drei Gleichungen

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=s_0,\quad s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=s_1,\quad s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=s_2$$

sind folglich nicht erfüllt.

Im vierten Falle muss man

$$s_0 = -\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1 = -\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2 = +\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = \pm r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0), \quad s_{0,(2,0)} = \mp r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$s_{1,(1,2)} = \mp r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1), \quad s_{1,(0,1)} = \pm r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$

$$s_{2,(2,0)} = \mp r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0), \quad s_{2,(1,2)} = \mp r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$

setzen. Also ist

$$s_{0,(0,1)} + s_{0,(2,0)} = \mp\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)} + s_{1,(0,1)} = \mp\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = \mp\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)};$$

und die drei Gleichungen

$$s_{0,(0,1)} + s_{0,(2,0)} = s_0,$$

$$s_{1,(1,2)} + s_{1,(0,1)} = s_1,$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = s_2$$

sind folglich auch in diesem Falle nicht erfüllt.

In Folge dieser Betrachtung ist also nur der zweite der vier vorhergehenden Fälle, wenn man in demselben die oberen Zeichen nimmt, zulässig. Es ist also

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0), \quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1), \quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

und

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

respective

positiv, positiv, negativ

und man hat:

$$s_0 = -\frac{r_0 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$
$$s_1 = +\frac{r_1 \sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$
$$s_2 = -\frac{r_2 \sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = +r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0), \quad s_{0,(2,0)} = -r_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$
$$s_{1,(1,2)} = +r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1), \quad s_{1,(0,1)} = +r_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$
$$s_{2,(2,0)} = -r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0), \quad s_{2,(1,2)} = +r_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$

zu setzen.

Das Product

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

ist negativ, und weil nun nach dem Obigen

$$D^2 = a^2b^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2$$

ist, so ist, wenn man die Quadratwurzel auszieht, da D natürlich eine positive Grösse ist, im vorliegenden Falle

$$D = -ab \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

zu setzen.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{s_0}{r_0} = -\frac{\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}, \quad \frac{s_1}{r_1} = +\frac{\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$
$$\frac{s_2}{r_2} = -\frac{\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

ist, so ist von

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2}$$

der Zähler:

$$-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1) + \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\sin(u_0-u_1)+\sin(u_1-u_2)+\sin(u_2-u_0)\}$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

also:

$$\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}$$

$$=-2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}\right).$$

Für die Kugel ist $r_0=r_1=r_2=r$ und auch $a=b=r$, also:

$$D=\frac{r(s_0+s_1+s_2)}{2},$$

welches eine längst bekannte Formel ist.

Wir gehen jetzt zu der Betrachtung des Falls über, wenn die Ellipse und das Dreieck ganz ausserhalb einander liegen, in welchem Falle dann ferner die drei in Taf. I. Fig. 1. mit I., II., III. bezeichneten Fälle Statt finden können.

In dem Falle I. müssen die drei folgenden Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=s_0,$$
$$s_{1,(1,2)}-s_{1,(0,1)}=s_1,$$
$$s_{2,(1,2)}-s_{2,(2,0)}=s_2.$$

Die erste Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1-2u_0+u_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}-s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(1,2)}-s_{2,(2,0)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die zweite Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0(2,0)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(1,2)}-s_{2,(2,0)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_0-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die dritte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}-s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(1,2)}-s_{2,(2,0)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die vierte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}+s_{0,(2,0)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}-s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(1,2)}-s_{2,(2,0)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Also ist bloss die vierte Zeichen-Combination, indem man die oberen Zeichen nimmt, möglich, und es ist daher

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

so wie auch

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

respective

positiv, negativ, negativ

und man hat

$$s_0=-\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1=-\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=+\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)}=+r_0\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad s_{0,(2,0)}=-r_0\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0);$$

$$s_{1,(1,2)}=-r_1\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad s_{1,(0,1)}=+r_1\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0);$$

$$s_{2,(2,0)}=-r_2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),\quad s_{2,(1,2)}=-r_2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$

zu setzen.

Das Product

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

ist positiv, also

$$D=ab\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0).$$

Der Zähler von

$$\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_0}{r_0}$$

ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)$$
$$=-\tfrac{1}{2}\{\sin(u_0-u_1)+\sin(u_1-u_2)+\sin(u_2-u_0)\}$$
$$=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

also:

$$\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_0}{r_0}=2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

und folglich:

$$D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_0}{r_0}\right).$$

In dem Falle II. müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=s_0,$$
$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=s_1,$$
$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=s_2.$$

Die erste Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die zweite Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die dritte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die vierte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Also ist bloss die erste Zeichen-Combination möglich, indem man die oberen Zeichen nimmt. Daher ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

so wie auch

$$\tan\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \tan\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \tan\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

respective

positiv, positiv, positiv

und man hat

$$s_0=+\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1=+\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=+\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = + r_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad s_{0,(2,0)} = + r_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0);$$
$$s_{1,(1,2)} = + r_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad s_{1,(0,1)} = + r_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0);$$
$$s_{2,(2,0)} = + r_2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0), \quad s_{2,(1,2)} = + r_2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)$$

zu setzen.

Das Product

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

ist positiv, also

$$D = ab \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0).$$

Der Zähler von

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}$$

ist

$$\begin{aligned} &\sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) - \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \\ &\quad + \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \\ &= -\tfrac{1}{2}\{\sin(u_0 - u_1) + \sin(u_1 - u_2) + \sin(u_2 - u_0)\} \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0), \end{aligned}$$

also:

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1} = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

und folglich:

$$D = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}\right).$$

In dem Falle III. müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$s_{0,(0,1)} - s_{0,(2,0)} = s_0,$$
$$s_{1,(0,1)} - s_{1,(1,2)} = s_1,$$
$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = s_2.$$

Die erste Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)} - s_{0,(2,0)} = \mp \frac{r_0 \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)},$$

$$s_{1,(0,1)} - s_{1,(1,2)} = \pm \frac{r_1 \sin \tfrac{1}{2}(2u_1 - u_0 - u_2)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = \pm \frac{r_2 \sin \tfrac{1}{2}(2u_2 - u_0 - u_1)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)}.$$

Die zweite Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}-s_{0,(2,0)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(0,1)}-s_{1,(1,2)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(2u_1-u_0-u_2)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die dritte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}-s_{0,(2,0)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(0,1)}-s_{1,(1,2)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die vierte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)}-s_{0,(2,0)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(0,1)}-s_{1,(1,2)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}+s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Also ist bloss die dritte Zeichen-Combination zulässig, indem man die unteren Zeichen nimmt. Daher ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

so wie

$$\tang\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

respective

negativ, positiv, negativ,

und man hat

$$s_0=+\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1=-\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=-\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = -r_0 \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad s_{0,(2,0)} = -r_0 \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0);$$

$$s_{1,(1,2)} = +r_1 \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad s_{1,(0,1)} = -r_1 \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0);$$

$$s_{2,(2,0)} = -r_2 \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0), \quad s_{2,(1,2)} = +r_2 \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)$$

zu setzen.

Das Product

$$\tan \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

ist positiv, also

$$D = ab \tan \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0).$$

Der Zähler von

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2}$$

ist

$$\begin{aligned}
&\sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) - \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \\
&\qquad + \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \\
&= -\tfrac{1}{2}\{\sin(u_0 - u_1) + \sin(u_1 - u_2) + \sin(u_2 - u_0)\} \\
&= \;\; 2 \sin \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),
\end{aligned}$$

also:

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2} = 2 \tan \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

und folglich

$$D = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2}\right).$$

Ich habe diese Discussion rücksichtlich der Vorzeichen vollständig mitgetheilt, weil ich sie für lehrreich halte, und weil leider in dieser Beziehung noch vielfach gefehlt wird, indem man sich häufig mit nur ganz oberflächlichen Anschauungsweisen zu begnügen pflegt, was durchaus nicht zu billigen ist.

Im Allgemeinen schliesst man aus dem Vorhergehenden, dass

$$D = \mp ab \tan \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \tan \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \tan \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

ist, mit der Bestimmung, dass man in dieser jedenfalls sehr merkwürdigen Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen

hat, jenachdem die Ellipse innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegt, von dessen drei Seiten sie berührt wird. Leicht sieht man ein, dass der obige Ausdruck auch dann noch richtig bleibt, wenn die Punkte A_0, A_1, A_2 nur so auf einander folgen, dass man sich, wenn man sie in der vorstehenden Ordnung durchläuft, nach der Richtung bewegt, nach welcher die Anomalien gezählt werden.

Auch ist im ersten Falle

$$D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}\right),$$

und im zweiten Falle ist

$$D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_0}{r_0}\right),\quad \text{oder}\quad D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_1}{r_1}\right),$$

$$\text{oder}\quad D=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}-\frac{s_2}{r_2}\right),$$

jenachdem die Ellipse und das Dreieck auf entgegengesetzten Seiten der die Ellipse in A_0, oder in A_1, oder in A_2 berührenden Seite des Dreiecks liegen, was in Taf. I. Fig. 1. I. II. III. seine nähere Erläuterung findet.

Setzt man wie früher

$$u_1-u_0=v,\quad u_2-u_1=w,\quad u_2-u_0=v+w;$$

so ist

$$D=\mp ab\tang\tfrac{1}{2}v\tang\tfrac{1}{2}w\tang\tfrac{1}{2}(v+w),$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie oben.

Dass man über die der Ellipse umschriebenen Dreiecke ähnliche Betrachtungen anstellen könnte, wie über die derselben eingeschriebenen Dreiecke, ist klar, bedarf aber einer weiteren Erläuterung hier nicht. Dagegen wollen wir jetzt untersuchen, ob auch die umschriebenen Dreiecke ein Maximum oder ein Minimum darbieten.

Entwickeln wir zu dem Ende die partiellen Differentialquotienten von D in Bezug auf v und w, so erhalten wir:

$$\frac{\partial D}{\partial v}=\mp\tfrac{1}{2}ab\frac{\sin\frac{1}{2}w\sin(v+\frac{1}{2}w)}{\cos\frac{1}{2}v^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2},$$

$$\frac{\partial D}{\partial w}=\mp\tfrac{1}{2}ab\frac{\sin\frac{1}{2}v\sin(w+\frac{1}{2}v)}{\cos\frac{1}{2}w^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2};$$

und haben also als gemeinschaftliche Bedingungen des Maximums und Minimums die Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}w\sin(v+\tfrac{1}{2}w)=0,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}v\sin(w+\tfrac{1}{2}v)=0;$$

welche ganz die nämliche Auflösung zulassen, wie dieselben Gleichungen in I., und daher zu den folgenden Werthen von v und w führen:

$$v=\tfrac{2}{3}\pi,\quad w=\tfrac{2}{3}\pi,\quad v+w=\tfrac{4}{3}\pi.$$

Mit Rücksicht darauf, dass die vorstehenden Gleichungen erfüllt sind, und also auch nur für die denselben genügenden Werthe von v und w, erhält man ferner leicht:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}=\mp\tfrac{1}{2}ab\,\frac{\sin\frac{1}{2}w\cos(v+\frac{1}{2}w)}{\cos\frac{1}{2}v^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2},$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial w^2}=\mp\tfrac{1}{2}ab\,\frac{\sin\frac{1}{2}v\cos(w+\frac{1}{2}v)}{\cos\frac{1}{2}w^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v\partial w}=\mp\tfrac{1}{4}ab\,\frac{\sin(v+w)}{\cos\frac{1}{2}v^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2},$$

oder

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v\partial w}=\mp\tfrac{1}{4}ab\,\frac{\sin(v+w)}{\cos\frac{1}{2}w^2\cos\frac{1}{2}(v+w)^2}.$$

Weil nun

$$\sin\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{2};\quad \sin\tfrac{1}{2}w=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos\tfrac{1}{2}w=\tfrac{1}{2};$$
$$\cos(v+\tfrac{1}{2}w)=-1,\quad \cos(w+\tfrac{1}{2}v)=-1;$$
$$\sin(v+w)=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos\tfrac{1}{2}(v+w)=-\tfrac{1}{2}$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}=\pm 4ab\sqrt{3},\quad \frac{\partial^2 D}{\partial w^2}=\pm 4ab\sqrt{3},\quad \frac{\partial^2 D}{\partial v\partial w}=\pm 2ab\sqrt{3};$$

also:

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial v\partial w}\right)^2-\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial w^2}=12a^2b^2-48a^2b^2=-36a^2b^2.$$

Nimmt man also die oberen Zeichen, so sind die Grössen

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 D}{\partial w^2},\quad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial v\partial w}\right)^2-\frac{\partial^2 D}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial w^2}$$

respective

positiv, positiv, negativ,

welches die Bedingungen des Minimums sind; nimmt man dagegen die unteren Zeichen, so sind die Grössen

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 D}{\partial w^2},\quad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial v \partial w}\right)^2 - \frac{\partial^2 D}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial w^2}$$

respective

negativ, negativ, negativ,

welches die Bedingungen des Maximums sind.

Bestimmen wir nun aber den kleinsten oder grössten Werth von D selbst, so erhalten wir, indem das obere Zeichen sich auf den ersteren, das untere sich auf den letzteren bezieht:

$$D = \mp ab\,.\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\,.\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\,.\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}},$$

also

$$D = \pm 3ab\sqrt{3},$$

und sehen hieraus, dass das untere Zeichen, also auch das obige Maximum, im vorliegenden Falle überhaupt gar nicht statthaft ist.

Uebrigens aber ersieht man auch auf der Stelle, dass die um die Ellipse beschriebenen Dreiecke, ausserhalb welcher die Ellipse liegt, bis zum Verschwinden klein werden können, wobei man zugleich zu bemerken hat, dass die Gleichungen

$$\sin\tfrac{1}{2}w \sin(v+\tfrac{1}{2}w) = 0,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}v \sin(w+\tfrac{1}{2}v) = 0$$

auch durch $v=0$, $w=0$ erfüllt werden, was zu $D=0$ führt. Noch etwas Weiteres hierüber zu bemerken, halten wir für überflüssig.

Die aus dem Vorhergehenden sich ergebende höchst merkwürdige Construction des Maximums in I. und des hier in II. Statt findenden Minimums ist nun folgende. Ueber der Hauptaxe der gegebenen Ellipse*) als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, wie Taf. I. Fig. 2. zeigt, und theile diesen Kreis in den Punkten A_0', A_1', A_2' in drei gleiche Theile, wo immer einer dieser Punkte beliebig angenommen werden kann. Von diesen Punkten fälle man auf die Hauptaxe Perpendikel, welche die Ellipse in den Punkten A_0, A_1, A_2 schneiden, verbinde diese Punkte durch Sehnen der Ellipse und ziehe durch dieselben Berührende an die Ellipse, so bestimmen die ersteren das Maximum

*) Man könnte auch die Nebenaxe wählen, in welcher Rücksicht Thl. XXIV. S. 371. und dort Taf. XII. Fig. 1. zu vergleichen ist.

der in die Ellipse, die letzteren das Minimum der um die Ellipse beschriebenen Dreiecke *).

III.

Das in die Ellipse beschriebene Viereck.

Vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 der Ellipse, die in dieser Ordnung auf einander folgen, so dass A_0 der erste ist, auf welchen man trifft, wenn man sich von dem Halbmesser der Ellipse an, von welchem an die Anomalien nach einer gewissen Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden, nach dieser Richtung hin bewegt, seien durch die Anomalien u_0, u_1, u_2, u_3 bestimmt; so ist, wenn F den Flächeninhalt des in die Ellipse beschriebenen Vierecks $A_0A_1A_2A_3$ bezeichnet, nach I. offenbar:

$$F = 2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$
$$+2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)$$
$$=2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\},$$

woraus man ferner mittelst einiger leichten goniometrischen Transformationen den folgenden merkwürdigen Ausdruck erhält:

$$F=\pm 2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_3)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3).$$

Bezeichnen wir die Seiten

$$A_0A_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad A_3A_0$$

des Vierecks $A_0A_1A_2A_3$ durch

$$s_{0,1},\quad s_{1,2},\quad s_{2,3},\quad s_{3,0}$$

und die denselben parallelen Halbmesser der Ellipse durch

$$r_{0,1},\quad r_{1,2},\quad r_{2,3},\quad r_{3,0};$$

so ist nach I.:

$$\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}=2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}=2\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}=2\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_2),$$
$$\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}=2\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_0);$$

---

*) Ueber die Seiten, Winkel, u. s. w. dieser beiden Dreiecke lassen sich noch viele interessante Untersuchungen anstellen, und manche dieselben betreffende merkwürdige Relationen finden, was aber Alles nach dem Obigen keiner Schwierigkeit unterliegt und füglich dem Leser überlassen werden kann.

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\pm\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die dritte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\pm\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\pm\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(2u_2-u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Die vierte Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(2,0)}-s_{0,(0,1)}=\mp\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-2u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_{1,(1,2)}+s_{1,(0,1)}=\mp\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)}-s_{2,(1,2)}=\mp\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}.$$

Also ist bloss die erste Zeichen-Combination möglich, indem man die oberen Zeichen nimmt. Daher ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

so wie auch

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

respective

positiv, positiv, positiv

und man hat

$$s_0=+\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_1=+\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=+\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}$$

und

$$s_{0,(0,1)} = +r_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0), \quad s_{0,(2,0)} = +r_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0);$$
$$s_{1,(1,2)} = +r_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1), \quad s_{1,(0,1)} = +r_1 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0);$$
$$s_{2,(2,0)} = +r_2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0). \quad s_{2,(1,2)} = +r_2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)$$

zu setzen.

Das Product

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

ist positiv, also

$$D = ab \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0).$$

Der Zähler von

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}$$

ist

$$\begin{aligned} &\sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) - \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \\ &\qquad + \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \\ &= -\tfrac{1}{2}\{\sin(u_0 - u_1) + \sin(u_1 - u_2) + \sin(u_2 - u_0)\} \\ &= \; 2 \sin \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0), \end{aligned}$$

also:

$$\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1} = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

und folglich:

$$D = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}\right).$$

In dem Falle III. müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} s_{0,(0,1)} - s_{0,(2,0)} &= s_0, \\ s_{1,(0,1)} - s_{1,(1,2)} &= s_1, \\ s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} &= s_2. \end{aligned}$$

Die erste Zeichen-Combination liefert:

$$s_{0,(0,1)} - s_{0,(2,0)} = \mp \frac{r_0 \sin \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)},$$

$$s_{1,(0,1)} - s_{1,(1,2)} = \pm \frac{r_1 \sin \tfrac{1}{2}(2u_1 - u_0 - u_2)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)},$$

$$s_{2,(2,0)} + s_{2,(1,2)} = \pm \frac{r_2 \sin \tfrac{1}{2}(2u_2 - u_0 - u_1)}{\cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)}.$$

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-2u_1+u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_2-2u_3+u_0)\}$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_3)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3);$$

folglich ist nach dem Obigen offenbar:

$$\mathfrak{F}=-ab\,\frac{\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_3)\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_3)},$$

woraus sich, in Verbindung mit III., das folgende merkwürdige Resultat ergiebt:

$$\frac{F}{\mathfrak{F}}=-2\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_3),$$

wobei wir zugleich noch bemerken wollen, dass nach I. und II. auch

$$\frac{\Delta}{D}=\mp 2\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)$$

oder

$$\frac{\Delta}{D}=\mp 2\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

ist, wo wegen des Zeichens immer die aus II. bekannten Vorschriften gelten.

Nach den in II. bewiesenen Formeln ist auch, wobei die Bedeutung einiger der nachher gebrauchten Bezeichnungen von selbst aus Taf. I. Fig. 3. erhellen wird:

$$\mathfrak{F}=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0'}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_0'}{r_2}\right)-\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0''}{r_0}+\frac{s_2''}{r_2}-\frac{s_3}{r_3}\right)$$
$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0'-s_0''}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2'-s_2''}{r_0}+\frac{s_3}{r_3}\right),$$

also:

$$\mathfrak{F}=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_3}{r_3}\right).$$

Ist $\mathfrak{F}'$ der Flächeninhalt des in Taf. I. Fig. 4. um die Ellipse beschriebenen Fünfecks, so ist hiernach und nach II.:

$$\mathfrak{F}'=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0'}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_3'}{r_3}\right)-\frac{ab}{2}\left(\frac{s_2''}{r_0}+\frac{s_3''}{r_3}-\frac{s_4}{r_4}\right)$$
$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0'-s_0''}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_3'-s_3''}{r_3}+\frac{s_4}{r_4}\right),$$

also:

$$\mathfrak{F}'=\frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_2}{r_2}+\frac{s_3}{r_3}+\frac{s_4}{r_4}\right).$$

Ist $\mathfrak{F}''$ der Flächeninhalt des in Taf. I. Fig. 5. um die Ellipse beschriebenen Sechsecks, so ist nach vorstehendem Ausdrucke für den Flächeninhalt des Fünfecks und nach II.:

$$\mathfrak{F}'' = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0'}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \frac{s_4'}{r_4}\right) - \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0''}{r_0} + \frac{s_4''}{r_4} - \frac{s_5}{r_5}\right)$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0' - s_0''}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \frac{s_4' - s_4''}{r_4} + \frac{s_5}{r_5}\right),$$

also:

$$\mathfrak{F}'' = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \frac{s_4}{r_4} + \frac{s_5}{r_5}\right).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und wir werden daher hierdurch zu dem folgenden sehr merkwürdigen allgemeinen Satze geführt:

Wenn $\mathfrak{F}$ der Flächeninhalt eines um eine Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, beschriebenen beliebigen Vielecks von n Seiten ist, und die Seiten dieses Vielecks durch

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4, \ldots . s_{n-1};$$

die denselben parallelen Halbmesser der Ellipse durch

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4, \ldots . r_{n-1}$$

bezeichnet werden; so ist immer

$$\mathfrak{F} = \frac{ab}{2}\left(\frac{s_0}{r_0} + \frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \ldots . + \frac{s_{n-1}}{r_{n-1}}\right).$$

Für den mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis geht hieraus auf der Stelle die einfache, längst bekannte Formel

$$\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}r(s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots . + s_{n-1})$$

hervor.

Für so merkwürdig ich auch alle im Obigen bewiesenen Sätze von der Ellipse halte, und so wünschenswerth es mir auch scheint, dass diese Untersuchungen weiter geführt und, wo möglich, zu noch grösserer Allgemeinheit erhoben werden: so will ich dieselben doch, um dieser Abhandlung nicht eine zu grosse Ausdehnung zu geben, für jetzt abbrechen, indem ich mir übrigens vorbehalte, auf dieselben zurückzukommen, insofern nicht ein Anderer dadurch veranlasst wird, diesen Gegenstand weiter zu studiren, was mir zu grosser Freude gereichen würde, wobei es sich zugleich ganz von selbst versteht, dass ich alle hierauf bezüglichen Untersuchungen sehr gern in diese Zeitschrift aufnehmen werde.

III.

Augustin Louis Cauchy *).

(EXTRAITS D'UNE LETTRE DE M. BIOT A M. DE FALLOUX.)

Augustin Cauchy a eu le bonheur d'appartenir à cette classe moyenne de la société qui n'est exposée, ni aux souffrances de la pauvreté, ni aux dangers de la richesse. Né le 21 août 1789 d'une famille pieuse, les désordres qui suivirent cette époque n'atteignirent point son enfance. Son éducation classique, commencée de bonne heure par son père, se continua plus tard, sous d'habiles professeurs, à l'école centrale du Panthéon. Il en sortit en 1804, à l'âge de quinze ans, après deux années de rhétorique, remportant au concours général le deuxième prix de discours latin; le premier de version grecque; le premier de vers latins. Cette universalité de succès lui fit décerner par l'Institut la couronne réservée à l'élève des écoles centrales qui s'était le plus distingué en humanités.

Après avoir suivi, pendant une seule année, le cours public de mathématiques d'un excellent professeur, Dinet, le jeune Cauchy se trouva en état de se présenter aux examens d'admission de l'École polytechnique. Il fut reçu le deuxième de la liste, en 1805, à seize ans; et ses deux années de cours étant terminées, il sortit le troisième en 1807. En quittant l'école, il choisit la carrière des ponts et chaussées, où il entra le premier de sa promotion. Il en parcourut rapidement les grades inférieurs, fut employé à plusieurs travaux de construction, et devint ingénieur en chef en 1825.

N'étant encore qu'aspirant ingénieur, le 6 mai 1811, à l'âge de vingt-deux ans, il présenta à la classe des sciences mathématiques de l'Institut un Mémoire sur les polyèdres géométriques, qui fut extrêmement remarqué. Il y généralisait un théorème d'Euler, et complétait la théorie d'une nouvelle espèce de polyè-

*) Gestorben am 23. Mai 1857.

dres réguliers découverts par M. Poinsot. Legendre, le plus austère de nos géomètres, regarda ce Mémoire „comme la production d'un talent déjà exercé, et qui devait par la suite, obtenir de plus grands succès.“ Il engagea le jeune auteur à poursuivre ce genre de recherches, pour tâcher d'établir un théorème également relatif aux polyèdres, que supposent certaines définitions d'Euclide, et dont la démonstration n'avait pas encore été obtenue. Cauchy la donna en 1812. Dans le rapport que Legendre en fit à l'Académie, il exprima son approbation avec un entraînement qui lui était peu ordinaire. „Nous n'avions voulu, dit-il, que donner une idée de cette démonstration, et nous l'avons rapportée presque tout entière. Nous avons ainsi fourni une nouvelle preuve de la sagacité avec laquelle ce jeune géomètre est parvenu à vaincre une difficulté qui avait arrêté les maîtres de l'art, et qu'il importait de résoudre pour perfectionner et compléter la théorie des corps solides.“

Ces deux premiers mémoires de Cauchy auraient pu faire présager une aptitude spéciale et exclusive pour les problèmes de géométrie pure. On ne tarda pas à s'apercevoir que la capacité de ce jeune esprit avait une étendue bien plus grande. Dans les années 1813 et 1814, Cauchy produisit deux remarquables mémoires de haute analyse; et en 1815, il présenta un Mémoire sur la théorie des nombres, où il démontrait, en l'étendant, un théorème énoncé par Fermat, théorème dont quelques particularités seulement avaient pu être jusqu'alors établies par les mathématiciens les plus habiles dans ces matières, Legendre et Gauss. Cette même année, l'Académie avait proposé, comme sujet du grand prix de mathématiques, d'établir la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. Cauchy résolut complétement la question. Son Mémoire, qui fut couronné en 1816, est imprimé au tome 1er des volumes de prix. Il porte pour épigraphe ce vers de Virgile:

Nosse quot Ionii veniant ad littora fluctus. (Géorg. II.)

application littéraire d'autant plus heureuse que ce vers renferme l'énoncé complet et tout à fait exact du problème proposé.

Ces débuts si rapides et déjà si féconds d'un jeune homme de vingt-sept ans, lui assuraient la première place qui deviendrait vacante dans les sections mathématiques de l'Institut. Une circonstance regrettable pour les sciences et pour lui-même l'introduisit officiellement parmi eux. A la suite de la crise passagère des Cent Jours, une ordonnance royale, datée du 21 mars 1816, rétablit les anciennes académies sous leurs dénominations primitives, d'Académie française, des sciences, des inscriptions et

belles-lettres, des beaux-arts, et fixa la composition des académies restaurées. Dans celles des sciences, deux noms célèbres, ceux de Carnot et de Monge, étaient remplacés par deux noms nouveaux, Bréguet et Cauchy. Vers la fin de 1813 Cauchy fut nommé professeur adjoint d'analyse à l'École polytechnique, et devint professeur titulaire en 1816. Il était, avant toutes choses, l'homme du devoir. Appelé à enseigner, il tourna toutes ses pensées vers l'enseignement. De 1816 à 1826, il publia son cours d'analyse algébrique, de calcul différentiel, d'application de l'analyse infinitésimale à la théorie des courbes: trois ouvrages excellents, bien ordonnés, procédant par des démonstrations toujours rigoureuses, et riches de détails nouveaux; où l'on ne saurait désirer qu'un peu de condescendance à éclairer les abstractions de l'analyse par les considérations géométriques. Dans cette même période de temps, il publia un Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, qui a été pour plusieurs de nos jeunes géomètres l'origine d'importants travaux. Tout cela ne suffisait pas encore à son ardeur infatigable. Il entreprit et commença de faire paraître, en 1826, une sorte de revue périodique, propre à lui, qu'il appela *Exercices mathématiques*, où toutes les parties des mathématiques, les plus élémentaires comme les plus sublimes, étaient abordées avec tant de généralité, de fécondité, de puissance inventive, qu'à la lecture de ces publications, Abel, un des plus profonds analystes de notre temps, écrivait à un de ses amis: „Cauchy est actuellement le géomètre qui comprend le mieux comment les mathématiques doivent être étudiées.“ En effet, les créations de méthodes et les aperçus de voies nouvelles, répandus dans ces exercices, ont été, non-seulement pour l'auteur, mais aussi pour beaucoup d'autres géomètres, les initiatives fécondes d'une multitude de brillants travaux. Cauchy continua la publication et l'alimentation de ce trésor mathématique jusqu'à sa mort.

Son existence paisible, toute concentrée dans les joies morales et les purs plaisirs de l'intelligence, se trouva inopinément troublée et brisée par la révolution de 1830. A cette époque, il était marié et père de deux filles. Il s'était allié à une famille honorable, dont la position sociale, les goûts, les sentiments, étaient assortis aux siens. Outre son emploi de professeur à l'École polytechnique, il occupait une chaire à la Faculté des sciences de Paris, et il était suppléant du cours de physique mathématique au collége de France. Le gouvernement nouveau jugea nécessaire de légitimer ses titres de fait par un serment de fidélité imposé à tous les fonctionnaires publics, même à ceux qui n'avaient

d'autre charge que d'enseigner les sciences physiques ou mathématiques.

Cauchy se réfugia en Suisse pour garder sa foi. La présence d'un géomètre de cet ordre, dans la patrie des Bernoulli et des Euler, ne pouvait rester longtemps ignorée. Le roi de Sardaigne, informé de son exil volontaire, créa pour lui, dans l'université de Turin, une chaire spéciale de mathématiques, que Cauchy vint remplir avec éclat, tout en poursuivant ses autres travaux. La France perdit ainsi un de ses géomètres les plus illustres, un de ses professeurs les plus habiles.

Dans l'année 1832, Cauchy quitta cette chaire hospitalière, étant appelé à Prague par le roi Charles X pour être attaché à l'éducation du comte de Chambord. Alors il fit venir près de lui sa femme et ses deux filles, suivit avec elles les princes à Görz; et pendant les six années que dura cette honorable tâche, son activité incessante lui fit trouver encore assez de loisir pour composer sur les diverses parties des mathématiques une multitude de mémoires précieux, qui, aujourd'hui répandus en Allemagne, sont pour nous très-difficiles à rassembler. Vers la fin de 1838, les fonctions qu'il avait à remplir étant terminées, il se sépara de son royal élève dont il s'était acquis l'affection et l'estime; puis il rentra en France, et vint reprendre sa place parmi les membres de l'Institut, sans autre condition que de le vouloir, comme cela s'est toujours pratiqué. Dès ce moment n'étant plus distrait, je dirais volontiers, contenu par aucun devoir de professorat, ne sortant de ses calculs que pour s'occuper d'oeuvres morales ou de bienfaisance que sa piété et sa générosité lui suggéraient, Cauchy laissa épancher dans nos réunions l'intarissable abondance de son génie mathématique. Pendant ces dix-neuf dernières années de sa vie, il composa, et publia dans les volumes de l'Académie ou dans les comptes rendus, plus de cinq cents Mémoires, outre une multitude de rapports sur les Mémoires présentés par des étrangers. Dans cette masse immense de travaux, rapidement produits, beaucoup ont une grande valeur propre; d'autres présentent des initiatives d'idées, de méthodes, qui ont été déjà ou qui seront plus tard fécondes. Tous portent sur les sujets les plus élevés des mathématiques: le perfectionnement et l'extension de l'analyse pure, la recherche et la détermination directe des mouvements planétaires et de leurs inégalités les plus complexes, la théorie du mouvement ondulatoire de la lumière considéré dans son entière généralité. Je me borne à cette indication sommaire. Malheureusement sa précipitation à produire ne lui laissait pas la patience de mûrir ses travaux. Chaque voie nouvelle qui se pré-

sentait à son esprit le passionnait exclusivement, et, pour la suivre, il quittait celle qu'il avait commencé d'explorer, même sans avoir pris le temps de reconnaître jusqu'où elle pouvait conduire. Pour aller plus vite, il condensait presque toujours ses nouveaux aperçus dans des notations inusitées, qui les rendaient inintelligibles à tout autre que lui, jusqu'à ce qu'on se les fût appropriées; et souvent il ne s'aperçut pas que ces innovations ne faisaient que déguiser sous une forme étrange des résultats déjà connus. L'exubérance de son génie n'aurait pu être contenue qu'étant dirigée vers un but marqué par le devoir. Il se présenta une occasion de le lui offrir.

En 1840, la mort de Poisson laissa une place vacante au bureau des longitudes. Ce corps scientifique, de même que l'Institut, se renouvelait alors par l'élection libre sous l'approbation du chef de l'État. Nous élûmes Cauchy à l'unanimité. Il était évident pour tout le monde que Cauchy ne prêterait pas et ne pouvait pas prêter serment; sa nomination ne fut pas ratifiée. La science en souffrit, car, engagé dès lors par devoir dans les travaux d'astronomie, il s'y serait porté avec son ardeur accoutumée, et la mécanique céleste lui aurait dû très-probablement des découvertes dont elle sera longtemps privée.

Ce fut en effet sa fidélité à remplir un devoir pareil qui devint l'occasion et la cause du grand service qu'il rendit à l'astronomie, en lui fournissant le moyen d'évaluer directement, par des formules analytiques d'une application générale et sûre, les inégalités à longues périodes des mouvements planétaires, qui rendent les tables de ces mouvements progressivement fautives tant qu'elles n'y sont pas appréciées. En 1843, Cauchy se trouva chargé par l'Académie de vérifier la détermination d'une inégalité de cette nature, que M. Le Verrier annonçait avoir découverte dans le mouvement de la planète Pallas, et dont la période embrasse sept cent quatre-vingt-quinze années. Elle était fort importante à connaître, son effet, sur la longitude de la planète, surpassant 15 minutes sexagésimales, dans son maximum, d'après l'évaluation de M. Le Verrier. A défaut d'un procédé d'analyse direct, il en avait obtenu la mesure par une interpolation numérique extrêmement hardie qui avait nécessité d'immenses calculs. Pour se soustraire à l'énorme travail de patience que la vérification de tant de nombres aurait exigé, Cauchy inventa une méthode analytique par laquelle toutes les inégalités de ce genre se déterminent directement, dans tous les cas, et avec d'autant plus de précision qu'elles sont d'un ordre plus élevé. Il retrouva ainsi les chiffres

de M. Le Verrier; et désormais, dans ces problèmes, la puissance de la science abstraite remplaça l'effort individuel.

En 1848, Cauchy reprit, à la Faculté des sciences de Paris, sa chaire de mathématiques, la seule de ses anciennes places qui ne se trouvât pas occupée.

En 1851, Cauchy cessa de nouveau son enseignement; mais un peu plus tard, le ministre de l'Instruction publique, M. Fortoul, obtint facilement de l'Empereur l'autorisation de le renvoyer tout simplement à sa chaire, sans condition ni exigence politique, lui laissant ainsi la liberté d'être reconnaissant. Il le fut aussi et le témoigna de la manière la plus noble. Tout son traitement de la Faculté se dépensait en oeuvres de bienfaisance pour la commune de Sceaux, où il résidait. Et, une fois que le maire, qui était l'intermédiaire éclairé de ses charités, lui témoignait quelque hésitation à le voir si prodigue: „Allez, lui dit-il, ne craignez rien. *C'est l'Empereur qui paye.*“ Je ne crains pas de dire que cette parole est la récompense de l'Empereur.

L'exposé que je viens de faire des circonstances extérieures dans lesquelles Cauchy a vécu, ne nous montre pas seulement ce qu'il a été, mais ce qu'il aurait pu être pour les sciences mathématiques. Si sa vie, comme celle d'Euler et de Lagrange, avait pu s'écouler sans trouble dans leurs paisibles spéculations, il aurait été une de leurs plus grandes lumières. Par l'effet de l'inconstance et du désordre que les événements ont imprimés à son génie, l'influence qu'il a exercée sur elles ne sera complétement sentie qu'après que le temps en aura développé toutes les conséquences.

J'ai seulement esquissé ici le portrait du savant et de l'homme lettré. Qui pourra peindre dignement l'homme privé, le fils affectionné, le frère dévoué, le bon père de famille, le citoyen bienfaisant; pour tout dire en un mot, le vrai chrétien, remplissant avec foi et amour tous les devoirs de loyauté, de probité, de charité affectueuse, que la religion nous prescrit envers nous-mêmes et envers les autres! On l'a vu s'occuper à faire du bien autour de lui jusqu'à ses derniers moments; attendant, acceptant la mort avec la sérénité confiante qu'une foi profonde peut seule inspirer. Heureux celui en qui Dieu, pour notre exemple, a voulu ainsi réunir les dons du génie et ceux du coeur!

Nachschrift des Herausgebers.

Ich kann es mir nicht versagen, dem Obigen noch die schönen Worte hinzuzufügen, mit denen der treffliche Tortolini den

Lesern seiner für die mathematische Literatur so ungemein wichtigen **Annali di scienze matematiche e fisiche** Nachricht von dem unersetzlichen Verluste gegeben hat, welchen die mathematischen Wissenschaften durch **Cauchy's** Tod erlitten haben, Worte, die, eben so, wie alle Schilderungen, die mir über **Cauchy** bekannt geworden sind, darauf deutlich hinweisen, dass der Grundzug seines ganzen Wesens vor Allem wahrhaft christliche Gesinnung, fortwährender Hinblick auf das Höchste im Leben, das tiefste Rechtsgefühl und die aufopferndste Hingebung an die Wissenschaft und deren Mittheilung an die ihm anvertrauten Schüler waren. Möge Jeder in allen diesen Beziehungen ihn sich zum Vorbilde nehmen! Wer aber soll und kann ihn ersetzen? Friede seiner Asche! G.

Necrologia.

Nel 23 Maggio 1857 cessò di vivere **Agostino Luigi Cauchy** Membro dell' Accademia Imperiale delle Scienze di Parigi. Il gran Geometra si trovava nel sessantottesimo anno di sua vita toltagli da brevissima malattia. L'Esercizio più scrupoloso di tutte le virtù cristiane specialmente diretto al bene del suo prossimo, le grandi scoperte in tutte le parti delle Matematiche pure, ed applicate provenienti dalla sua straordinaria intelligenza resero queste uomo ammirabile a tutta l'Europa. Le Opere pubblicate dal medesimo sono cognite ai geometri e la sua carriera scientifica contava più di cinquantadue anni. Le Memorie, le note, gli articoli, i rapporti sparsi nelle differenti collezioni scientifiche, e specialmente nei *Comptes Rondus* sono innumerevoli. Il **Cauchy** nei scorsi anni ci dava una speranza, che non si è realizzata, cioé la pubblicazione d'un Trattato di Meccanica molecolare: a fronte di questo trattato si avea da porre il numeroso Catalogo di tutte le Opere, Memorie, note da esso pubblicate *).

---

*) Il compilatore di questo catalogo è il P. *Jullien* della Compagnia di Gesù, giovane geometra assai distinto, ed Autore dell' interessante Opera tanto per gli allievi, quanto i professori sotto il titolo *Problèmes de Mécanique* vol. 2. in 8°. Paris 1855. Chez Bachelier. Il P. *Jullien* è presentemente studente di Sacra Teologia in Collegio Romano ed avanti la sua partenza da Parigi avea consegnato al sig. Bachelier il nominato Catalogo per la stampa. Mi sia permesso qui di fare un'osservazione relativa alle tre diverse Catedre da me occupate per l'insegnamento in Roma. Alcuni dotti stranieri miei amici confondendo forse *Università Romana* con *Collegio Romano* credono che io sia Professore in questo. Il Collegio Romano si chiama anche *Università Gregoriana:* le pubbliche

Il Cauchy deve aver lasciato un gran numero di Memorie inedite, ed alcune di esse presentate già all' Accademia delle Scienze da molti anni a questa parte. Io non dubito che l'Accademia medesima sempre intenta all' avanzamento delle scienze vorrà presto collocarle fra i volumi delle sue Memorie, e si conoscerà sempre più quanto grande, ed irreparabile sia stata la perdita di questo uomo, che al suo alto sapere congiungeva un' esattissima osservanza di tutti i suoi doveri Christiani. Io penso di non poter terminar meglio il breve cenno dato del Cauchy se non col ripetere le stesse parole, che il medesimo diceva di Ampère alla fine di una sua lunga Memoria litografica pubblicata a Praga nell' Agosto 1836 *sur la théorie de la Lumière,* qual Memoria io conservo diligentemente come una delle prime gentilmente donatemi dall' Autore, da che fu da me conosciuto in Roma nel 1832. Il Cauchy adunque alla pag. 96. ed ultima di questa Memoria dice che alcuni resultati sulla teoria della luce erano stati già da esso comunicati a Mr. Ampère „qui après avoir sur la terre par ses „importantes découvertes dans plusieurs branches des connaissan- „ces humaines, montré jusqu'où peuvent atteindre les ressources „de l'analyse, et les méditations de la science, est allé dans une „meilleure patrie contempler la beauté suprême de ce Dieu de- „vant lequel s'abaissait son puissant génie, et se plonger avec „délices dans la vive et douce lumière de l'Eternelle Vérité.“

B. T.

---

scuole di questa Università sono affidate ai P. Gesuiti exclusivamente, e non appartenendo io a questo Ordine Religioso non posso occupare in quella alcuna Catedra. Io sono Professore *nel Collegio Urbano* celebre Collegio detto di *Propaganda-Fide,* e fondato da Papa Urbano VIII per le Missioni Cattoliche nei paesi esteri. In qualche circostanza, il titolo di Professore al Collegio Urbano di Propaganda-Fide é stato cangiato in Collegio Romano della Propagazione della Fede, come pure per l'Università Romana della Sapienza, si é detto *Collegio Romano della Sapienza.* Infine il Pontificio Seminario Romano nel quale anche son Professore é sotto la cura immediata dell' Emo Cardinal Vicario *pro tempore.* Le scuole di questo Seminario sono affidate ad Ecclesiastici secolari, cioè non spettanti a speciali Religiose corporazioni.

IV.

Ueber die Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

Von
dem Herausgeber.

Bei der Auflösung der Gleichungen durch Näherung hat mir oft eine, auf eine einfache Transformation der Gleichungen sich gründende Methode sehr gute Dienste geleistet, die ich in diesem Aufsatze mittheilen will. Ich werde diese Methode zuerst an den Gleichungen des fünften Grades erläutern und dann einiges Allgemeinere über dieselbe beibringen.

Die aufzulösende Gleichung des fünften Grades sei

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0.$$

Eine neue unbekannte Grösse u einführend, setze man

$$x=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

wo x und u immer gleiche Vorzeichen haben, so ist, wie man leicht findet:

$$u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

woraus man sieht, dass sich die erste Gleichung, insofern sie überhaupt reelle Wurzeln hat, immer durch reelle Werthe von u erfüllen lässt, die, absolut genommen, nicht grösser als die Einheit sind oder zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegen. Führt man nun den obigen Ausdruck von x durch u in die gegebene Gleichung ein, so wird dieselbe, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{c} au^5+cu^3(1-u^2)+eu(1-u^2)^2 \\ +\{bu^4+du^2(1-u^2)+f(1-u^2)^2\}\sqrt{1-u^2} \end{array}\right\}=0,$$

oder, weil

$$au^5 + cu^3(1-u^2) + eu(1-u^2)^2 = (a-c+e)u^5 + (c-2e)u^3 + eu,$$
$$bu^4 + du^2(1-u^2) + f(1-u^2)^2 = (b-d+f)u^4 + (d-2f)u^2 + f$$

ist, wenn man der Kürze wegen

$$\Phi(u) = (a-c+e)u^5 + (c-2e)u^3 + eu,$$
$$\Phi_1(u) = \{(b-d+f)u^4 + (d-2f)u^2 + f\}\sqrt{1-u^2}$$

oder

$$\Phi(u) = \{(a-c+e)u^4 + (c-2e)u^2 + e\}u,$$
$$\Phi_1(u) = \{(b-d+f)u^4 + (d-2f)u^2 + f\}\sqrt{1-u^2}$$

setzt:

$$\Phi(u) + \Phi_1(u) = 0.$$

Bestimmt man nun aus dieser Gleichung durch Näherung die Grösse u, wobei man den grossen Vortheil hat, dass man weiss, dass u zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, oder dass der absolute Werth von u nicht grösser als die Einheit ist, so kann man x mittelst der Formel

$$x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

berechnen, d. h. für jeden der Gleichung

$$\Phi(u) + \Phi_1(u) = 0$$

genügenden Werth von u den entsprechenden Werth von x finden.

Zu bemerken hat man hierbei, dass, was für die Leichtigkeit der Rechnung ein nicht unwichtiger Umstand ist, für absolut gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von u die Werthe von $\Phi(u)$ absolut gleich und entgegengesetzt, die Werthe von $\Phi_1(u)$ aber einander gleich sind.

Der Kürze wegen werden wir im Folgenden

$$F(u) = \Phi(u) + \Phi_1(u)$$

setzen, so dass also

$$F(u)=0$$

die aufzulösende Gleichung ist, und wollen nun diese Methode durch ein, so weit es hier nöthig ist, vollständig ausgerechnetes Beispiel erläutern, indem wir nur noch bemerken, dass man die aufzulösende Gleichung auch unter der Form

$$\frac{(a-c+e)u^4+(c-2e)u^2+e}{(b-d+f)u^4+(d-2f)u^2+f}+\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}=0$$

darstellen könnte, was manche Vortheile, aber auch manche Nachtheile haben würde, hier jedoch jetzt nicht weiter erläutert werden soll.

Die aufzulösende Gleichung sei die Gleichung

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0,$$

welche auch Fourier in seinem berühmten Werke mehrfach als Beispiel gebraucht hat, so ist:

$$a=1,\quad b=-3,\quad c=-24,\quad d=95,\quad e=-46,\quad f=-101;$$

also:

$$a-c+e=-21,\quad c-2e=+68,\quad e=-46;$$

$$b-d+f=-199,\quad d-2f=+297,\quad f=-101;$$

folglich:

$$\Phi(u)=-21u^5+68u^3-46u,$$

$$\Phi_1(u)=-199u^4\sqrt{1-u^2}+297u^2\sqrt{1-u^2}-101\sqrt{1-u^2};$$

oder:

$$\Phi(u)=(-21u^4+68u^2-46)u,$$

$$\Phi_1(u)=(-199u^4+297u^2-101)\sqrt{1-u^2}.$$

Ich habe mir nun zuerst die folgenden Tafeln berechnet, welche bei allen solchen Rechnungen Anwendung finden, und also nur ein für alle Mal berechnet zu werden brauchen, wobei ich die weitere Ausdehnung dieser Tafeln für sehr wünschenswerth halte und hierüber weiter unten noch Einiges sagen werde.

u	u^2	u^3	u^4	u^5
0,0	0,00	0,000	0,0000	0,00000
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,00032
0,3	0,09	0,027	0,0081	0,00243
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,01024
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,07776
0,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,32768
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,00000

u	$\sqrt{1-u^2}$	$u\sqrt{1-u^2}$	$u^2\sqrt{1-u^2}$	$u^3\sqrt{1-u^2}$	$u^4\sqrt{1-u^2}$
0,0	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,99499	0,09950	0,00995	0,00099	0,00010
0,2	0,97980	0,19596	0,03919	0,00784	0,00157
0,3	0,95394	0,28618	0,08585	0,02576	0,00773
0,4	0,91652	0,36661	0,14664	0,05866	0,02346
0,5	0,86603	0,43302	0,21651	0,10825	0,05413
0,6	0,80000	0,48000	0,28800	0,17280	0,10368
0,7	0,71414	0,49990	0,34993	0,24495	0,17147
0,8	0,60000	0,48000	0,38400	0,30720	0,24576
0,9	0,43589	0,39230	0,35307	0,31776	0,28599
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Ich habe diese Tafeln des allgemeineren Gebrauchs wegen hier mitgetheilt, bemerke aber, dass die fernere Berechnung des vorliegenden Beispiels nicht mit Hülfe derselben, sondern *auf andere Weise mittelst der Logarithmen geführt worden ist*, weshalb ich noch besonders hinzufüge, dass für

$u = 0{,}0$ resp. $\log\sqrt{1-u^2} = 0{,}0000000$
$= 0{,}1 \qquad\qquad = 0{,}9978176-1$
$= 0{,}2 \qquad\qquad = 0{,}9911356-1$
$= 0{,}3 \qquad\qquad = 0{,}9795207-1$
$= 0{,}4 \qquad\qquad = 0{,}9621397-1$
$= 0{,}5 \qquad\qquad = 0{,}9375307-1$
$= 0{,}6 \qquad\qquad = 0{,}9030900-1$
$= 0{,}7 \qquad\qquad = 0{,}8537851-1$
$= 0{,}8 \qquad\qquad = 0{,}7781513-1$
$= 0{,}9 \qquad\qquad = 0{,}6393768-1$
$= 1{,}0 \qquad\qquad = -\infty$

ist. Da an den Zahlen der zweiten der beiden obigen Tafeln nach den gewöhnlichen Regeln mehrfache Abkürzungen angebracht sind und dieselben nur bis zur fünften Decimale richtig sind, so können die mittelst dieser Tafeln berechneten Resultate nicht ganz mit den im Folgenden angegebenen, auf andere Weise gefundenen Zahlen übereinstimmen, was ich hier ausdrücklich bemerke, um jedem Missverständnisse vorzubeugen, wenn sich, wie dies wirklich der Fall ist, Abweichungen der im Folgenden enthaltenen Zahlen von den mittelst der obigen Tabellen erhaltenen Zahlen zeigen. Es ist und soll ja Alles hier nur beispielsweise gegeben sein. Die weiter unten folgenden Beispiele sind mittelst der obigen Tafeln berechnet.

Für die Functionen $\Phi(u)$ und $\Phi_1(u)$ habe ich nun die in der folgenden Tafel angegebenen Werthe erhalten:

u	$\Phi(u)$	$\Phi_1(u)$
0,0	∓ 0,00000	− 101,00000
0,1	− 4,53037	− 97,55842
0,2	− 8,66272	− 87,63136
0,3	− 12,01503	− 72,38672
0,4	− 14,26304	− 53,68437
0,5	− 15,15625	− 33,93739
0,6	− 15,14496	− 15,89632
0,7	− 12,40547	− 2,32089
0,8	− 8,86528	+ 4,54176
0,9	− 4,22829	+ 3,92567
1,0	+ 1,00000	± 0,00000

und hieraus haben sich mir ferner, mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung über die Werthe, welche $\Phi(u)$ und $\Phi_1(u)$ für absolut gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von u erhalten, für $F(u)$ die folgenden Werthe ergeben:

u	$F(u)$
−1,0	− 1,00000
−0,9	+ 8,15396
−0,8	+ 13,40704
−0,7	+ 10,08458
−0,6	− 0,75136
−0,5	− 18,78114
−0,4	− 39,42133
−0,3	− 60,37169
−0,2	− 78,96864
−0,1	− 93,02805
∓0,0	−101,00000
+0,1	−102,08879
+0,2	− 96,29408
+0,3	− 84,40175
+0,4	− 67,94741
+0,5	− 49,09364
+0,6	− 31,04128
+0,7	− 14,72636
+0,8	− 4,32352
+0,9	− 0,30262
+1,0	+ 1,00000

Hieraus sieht man, dass unsere Gleichung zwei reelle negative Wurzeln und eine positive Wurzel zwischen

−1,0 und −0,9; −0,7 und −0,6; +0,9 und +1,0

hat; und da man nun schon so enge Gränzen dieser reellen Wurzeln kennt, so hat es gar keine Schwierigkeit, dieselben selbst durch die einfachsten und elementarsten Näherungsmethoden mit jeder beliebigen Genauigkeit zu finden. Sind a und b die beiden Gränzwerthe von u, und A und B die beiden entsprechenden Werthe von $F(u)$, so findet man einen neuen Näherungswerth von u mittelst der bekannten Formeln:

$$u=a-\frac{a-b}{A-B}A=b-\frac{a-b}{A-B}B$$

oder

$$u=a-\frac{b-a}{B-A}A=b-\frac{b-a}{B-A}B.$$

Fourier, der, wie gesagt, dieses Beispiel auch berechnet hat, findet nach seiner Methode auch drei reelle Wurzeln; unsere Methode führt aber immer zugleich auf schon sehr enge Gränzen der Wurzeln, von denen man unmittelbar mittelst der einfachsten und leichtesten Methoden zur weiteren Annäherung Gebrauch machen kann.

Ueber die Art der beiden anderen Wurzeln, welche ausser den drei vorher gefundenen reellen Wurzeln die Gleichung noch hat, lässt sich im vorliegenden Falle auf folgende Weise urtheilen.

Die Gleichung, mittelst welcher u gefunden wird, ist nach dem Obigen:

$$\{(a-c+e)u^4+(c-2e)u^2+e\}u+\{(b-d+f)u^4+(d-2f)u^2+f\}\sqrt{1-u^2}=0$$

oder, wenn man diese Gleichung rational macht:

$$\{(a-c+e)u^4+(c-2e)u^2+e\}^2u^2+\{(b-d+f)u^4+(d-2f)u^2+f\}^2(u^2-1)=0,$$

wo nun u^2 die unbekannte Grösse ist. Entwickelt man diese Gleichung nach den Potenzen von u, beschränkt sich dabei aber auf die beiden Anfangsglieder und das Endglied, so erhält man die Gleichung:

$$u^{10}+\frac{2\{(a-c+e)(c-2e)+(b-d+f)(d-2f)\}}{(a-c+e)^2+(b-d+f)^2}u^8\ldots$$

$$\ldots-\frac{f^2}{(a-c+e)^2+(b-d+f)^2}=0,$$

deren Wurzeln wir durch α, β, γ, δ, ε bezeichnen wollen, so dass also

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=-\frac{2\{(a-c+e)(c-2e)+(b-d+f)(d-2f)\}}{(a-c+e)^2+(b-d+f)^2},$$

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon=\frac{f^2}{(a-c+e)^2+(b-d+f)^2}$$

ist. Nach dem Obigen ist also, wie man leicht findet:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\frac{121062}{40042},\quad \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon=\frac{10201}{40042};$$

oder:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=3{,}023;\quad \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon=0{,}255.$$

Sind nun α, β, γ die drei reellen positiven Wurzeln, welche nach dem Obigen die vorstehende Gleichung hat, so ist nach der obigen Rechnung:

$$0{,}81<\alpha<1{,}00$$

$$0{,}36<\beta<0{,}49$$

$$0{,}81<\gamma<1{,}00;$$

also:

$$1{,}980<\alpha+\beta+\gamma<2{,}490$$

$$0{,}236<\alpha\beta\gamma<0{,}490.$$

Die beiden anderen Werthe von u, um deren nähere Bestimmung es sich hier handelt, sind entweder beide reell oder beide imaginär. Sollte nun das Erste der Fall sein, so würden δ und ε, die beiden entsprechenden Werthe von u^2, zwei reelle positive Grössen sein; und nach dem Obigen hätten wir offenbar die folgenden Vergleichungen:

$$1{,}980+\delta+\varepsilon<3{,}023<2{,}490+\delta+\varepsilon,$$

$$0{,}236.\delta\varepsilon<0{,}255<0{,}490.\delta\varepsilon;$$

woraus sich

$$0{,}533<\delta+\varepsilon<1{,}043,$$

$$0{,}520<\delta\varepsilon<1{,}081$$

ergiebt. Weil nun hiernach

$$\delta+\varepsilon<1{,}043$$

und nach dem Obigen $\delta+\varepsilon$ positiv ist, so ist

$$(\delta+\varepsilon)^2<1{,}088;$$

und weil

$$\delta\varepsilon>0{,}520,\quad\text{also}\quad 4\delta\varepsilon>2{,}080$$

ist, so ist

$$(\delta+\varepsilon)^2-4\delta\varepsilon<1{,}088-2{,}080;$$

also:

$$\delta^2-2\delta\varepsilon+\varepsilon^2<-0{,}992$$

oder

$$(\delta - \varepsilon)^2 < -0{,}992,$$

was offenbar ungereimt ist, da $(\delta - \varepsilon)^2$ stets eine positive Grösse ist. Daher ist die Annahme falsch, dass die Gleichung ausser den drei oben gefundenen reellen Wurzeln noch zwei reelle Wurzeln habe, und diese beiden noch übrigen Wurzeln sind folglich imaginär, so dass also die Gleichung überhaupt eine negative Wurzel zwischen $-1{,}0$ und $-0{,}9$; eine negative Wurzel zwischen $-0{,}7$ und $-0{,}6$; eine positive Wurzel zwischen $+0{,}9$ und $+1{,}0$; und zwei imaginäre Wurzeln hat. Dass auch x zwei reelle negative Werthe, einen reellen positiven Werth und zwei imaginäre Werthe hat, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Die cubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

führt mittelst der obigen Transformation zu der Gleichung:

$$\{(a-c)u^2 + c\}u + \{(b-d)u^2 + d\}\sqrt{1-u^2} = 0,$$

so dass also hier:

$$\Phi(u) = \{(a-c)u^2 + c\}u,$$

$$\Phi_1(u) = \{(b-d)u^2 + d\}\sqrt{1-u^2}$$

oder

$$\Phi(u) = (a-c)u^3 + cu,$$

$$\Phi_1(u) = (b-d)u^2\sqrt{1-u^2} + d\sqrt{1-u^2}$$

ist. Auch hier setzen wir wie früher wieder

$$F(u) = \Phi(u) + \Phi_1(u).$$

Nehmen wir die schon so oft als Beispiel gebrauchte Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \text{ *)},$$

so ist

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -2, \quad d = -5;$$

also

$$a - c = 3, \quad b - d = 5;$$

---

*) Schon Newton hat diese Gleichung als Beispiel benutzt. Dieses und das folgende Beispiel sind mittelst der obigen Tabellen gerechnet.

und folglich:

$$\Phi(u) = (3u^2 - 2)u = 3u^3 - 2u,$$

$$\Phi_1(u) = (5u^2 - 5)\sqrt{1-u^2} = 5u^2\sqrt{1-u^2} - 5\sqrt{1-u^2}.$$

Mit Hülfe der beiden obigen Tabellen erhält man mit der grössten Leichtigkeit:

u	$\Phi(u)$	$\Phi_1(u)$
0,0	∓0,00000	−5,00000
0,1	−0,19700	−4,92520
0,2	−0,37600	−4,70305
0,3	−0,51900	−4,34045
0,4	−0,60800	−3,84940
0,5	−0,62500	−3,24760
0,6	−0,55200	−2,56000
0,7	−0,37100	−1,82105
0,8	−0,06400	−1,08000
0,9	+0,38700	−0,41410
1,0	+1,00000	±0,00000

und hieraus ferner:

u	$F(u)$
−1,0	−1,00000
−0,9	−0,80110
−0,8	−1,01600
−0,7	−1,45005
−0,6	−2,00800
−0,5	−2,62260
−0,4	−3,24140
−0,3	−3,82145
−0,2	−4,32705
−0,1	−4,72820
∓0,0	−5,00000
+0,1	−5,12220
+0,2	−5,07905
+0,3	−4,85945
+0,4	−4,45740
+0,5	−3,87260
+0,6	−3,11200
+0,7	−2,19205
+0,8	−1,14400
+0,9	−0,02710
+1,0	+1.00000

Also hat die Gleichung eine reelle positive Wurzel zwischen $+0,9$ und $1,0$; und die weitere annähernde Bestimmung dieser Wurzel unterliegt nun nicht der geringsten Schwierigkeit.

Ueber die Art der beiden anderen Wurzeln kann man auf folgende Weise urtheilen.

Die Gleichung, aus welcher u bestimmt werden muss, ist nach dem Obigen:

$$\{(a-c)u^2+c\}u+\{(b-d)u^2+d\}\sqrt{1-u^2}=0,$$

oder, wenn man diese Gleichung rational macht:

$$\{(a-c)u^2+c\}^2u^2+\{(b-d)u^2+d\}^2(u^2-1)=0;$$

folglich, wenn man nach Potenzen von u ordnet:

$$u^6+\frac{2\{(a-c)c+(b-d)d\}}{(a-c)^2+(b-d)^2}u^4\ldots.-\frac{d^2}{(a-c)^2+(b-d)^2}=0,$$

und daher in dem vorliegenden speciellen Falle:

$$u^6-\frac{62}{34}u^4\ldots.-\frac{25}{34}=0,$$

oder

$$u^6-1,824.u^4\ldots.-0,735=0,$$

so dass also, wenn wir uns ähnlicher Bezeichnungen wie oben bedienen,

$$\alpha+\beta+\gamma=1,824;\quad \alpha\beta\gamma=0,735$$

ist.

Nach dem Obigen ist

$$0,81<\alpha<1,00;$$

also:

$$0,81+\beta+\gamma<1,824<1,00+\beta+\gamma;$$

$$0,81.\beta\gamma<0,735<1,00.\beta\gamma;$$

und folglich:

$$0,824<\beta+\gamma<1,014;$$

$$0,735<\beta\gamma<0,907.$$

Wären nun die beiden anderen Wurzeln unserer obigen Gleichung auch reell und folglich β und γ reelle positive Grössen, so wäre

$$(\beta+\gamma)^2 < 1{,}028;$$
$$4\beta\gamma > 2{,}940;$$

also:

$$(\beta+\gamma)^2 - 4\beta\gamma < -1{,}912;$$

folglich

$$\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 < -1{,}912 \quad \text{oder} \quad (\beta-\gamma)^2 < -1{,}912,$$

was ungereimt ist. Daher sind die beiden anderen Wurzeln imaginär.

Dieser Weg, über die Art der noch übrigen Wurzeln zu urtheilen, führt bei dieser Methode der Auflösung numerischer Gleichungen meistens zum Zweck. Indess sind die obigen Näherungsrechnungen gewöhnlich schon so genau, und geben einen so deutlichen Aufschluss über die Natur aller Wurzeln, dass dergleichen besondere Beurtheilungen über die Art der noch übrigen Wurzeln, wie die vorhergehenden, die wir nur deshalb mitgetheilt haben, weil wir sie an sich für lehrreich halten, nur selten erforderlich sind.

Da die hier behandelte Gleichung also nur **eine** reelle Wurzel hat, so will ich zum Ueberfluss noch zeigen, wie man dieselbe mittelst der im Obigen angegebenen Formeln:

$$x = a - \frac{a-b}{A-B}A = b - \frac{a-b}{A-B}B = a - \frac{b-a}{B-A}A = b - \frac{b-a}{B-A}B$$

durch weitere Annäherung finden kann.

Nach dem Obigen sind die Gränzen der zu findenden Wurzel:

$$+0{,}90000 \quad \text{und} \quad +1{,}00000;$$

und die entsprechenden Werthe der Function $F(u)$ sind:

$$-0{,}02710 \quad \text{und} \quad +1{,}00000.$$

Man wird also zuerst setzen:

$$a = 0{,}90000 \qquad A = -0{,}02710$$
$$b = 1{,}00000 \qquad B = +1{,}00000$$
$$b-a = 0{,}10000 \qquad B-A = 1{,}02710$$

$$\log(b-a) = 0{,}0000000 - 1$$
$$\log A = 0{,}4329693 - 2_n$$
$$0{,}4329693 - 3_n$$
$$\log(B-A) = 0{,}0116127$$
$$0{,}4213566 - 3_n \qquad \text{Num.} = -0{,}00264$$

$$a = 0,90000$$
$$+0,00264$$
$$u = 0,90264$$
$$\log u = 0,9555146-1$$
$$\log . u^2 = 0,9110292-1$$
$$\log . u^3 = 0,8665438-1$$

$$u^2 = 0,81476$$
$$1-u^2 = 0,18524$$
$$\log(1-u^2) = 0,2677348-1$$
$$\log\sqrt{1-u^2} = 0,6338674-1$$

$$\log 3 = 0,4771213$$
$$\log . u^3 = 0,8665438-1$$
$$0,3436651$$

$$3u^3 = 2,20630$$
$$2u = -1,80528$$
$$\Phi(u) = +0,40102$$

$$\log 5 = 0,6989700$$
$$\log . u^2 = 0,9110292-1$$
$$\log\sqrt{1-u^2} = 0,6338674-1$$
$$0,2438666$$

$$1,75330$$
$$-2,15198$$
$$\Phi_1(u) = -0,39868$$

$$\log 5 = 0,6989700_n$$
$$\log\sqrt{1-u^2} = 0,6338674-1$$
$$0,3328374_n$$

$$\Phi(u) = +0,40102$$
$$F(u) = +0,00234$$

Man wird also nun ferner setzen:

$$a = 0,90000 \qquad A = -0,02710$$
$$b = 0,90264 \qquad B = +0,00234$$

und findet hieraus auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$u = 0,90243 \qquad F(u) = +0,00004.$$

Setzt man jetzt also:

$$a = 0,90000 \qquad A = -0,02710$$
$$b = 0,90243 \qquad B = +0,00004,$$

so findet man wieder

$$u = 0,90243,$$

und ist also jetzt, nur fünf Decimalstellen berücksichtigend, mit der in dieser Weise geführten Rechnung zu Ende.

Nun ist x mittelst der Formel

$$x=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{u}{\sqrt{(1-u)(1+u)}}$$

zu berechnen. Es ist zu dem Ende:

$$\begin{aligned}
u &= 0{,}90243\\
1-u &= 0{,}09757\\
1+u &= 1{,}90243\\
\log(1-u) &= 0{,}9893163-2\\
\log(1+u) &= \begin{cases}0{,}2793018\\ \qquad\quad 69\end{cases}\\
\log(1-u^2) &= 0{,}2686250-1\\
\log\sqrt{1-u^2} &= 0{,}6343125-1\\
\log u &= 0{,}9554135-1\\
\log x &= 0{,}3211010\\
x &= 2{,}09459.
\end{aligned}$$

Cauchy, der dieses Beispiel im Cours d'Analyse algébrique. p. 505. nach seiner Methode behandelt hat, findet:

$$x=2{,}0945515.$$

Die Berücksichtigung einer grösseren Anzahl von Decimalstellen nach meiner obigen Methode macht die Arbeit nicht sehr beträchtlich beschwerlicher.

Wir wollen auch noch die gleichfalls häufig als Beispiel gebrauchte cubische Gleichung

$$x^3-7x+7=0\,^{*)}$$

betrachten.

In diesem Falle ist

$$a=1,\quad b=0,\quad c=-7,\quad d=7;$$

also:

$$a-c=8,\quad b-d=-7,$$

und folglich

$$\Phi(u)\ =(8u^2-7)u=8u^3-7u,$$

$$\Phi_1(u)=(-7u^2+7)\sqrt{1-u^2}=-7u^2\sqrt{1-u^2}+7\sqrt{1-u^2}.$$

*) Diese Gleichung hat, so wie auch die obige schon von Newton benutzte Gleichung, insbesondere Lagrange gebraucht.

Mittelst der beiden Tabellen erhält man:

u	$\Phi(u)$	$\Phi_1(u)$
0,0	∓0,00000	+7,00000
0,1	−0,69200	+6,89528
0,2	−1,33600	+6,58427
0,3	−1,88400	+6,07663
0,4	−2,28800	+5,38916
0,5	−2,50000	+4,54664
0,6	−2,47200	+3,58400
0,7	−2,15600	+2,54947
0,8	−1,50400	+1,51200
0,9	−0,46800	+0,57974
1,0	+1,00000	±0,00000

und hieraus ferner:

u	$F(u)$
−1,0	−1,00000
−0,9	+1,04774
−0,8	+3,01600
−0,7	+4,70547
−0,6	+6,05600
−0,5	+7,04664
−0,4	+7,67716
−0,3	+7,96063
−0,2	+7,92027
−0,1	+7,58728
∓0,0	+7,00000
+0,1	+6,20328
+0,2	+5,24827
+0,3	+4,19263
+0,4	+3,10116
+0,5	+2,04664
+0,6	+1,11200
+0,7	+0,39347
+0,8	+0,00800
+0,9	+0,11174
+1,0	+1,00000

Aus diesen Zahlen, die sich mittelst der obigen Tafeln in ungemein kurzer Zeit berechnen lassen, schliesst man, dass die gegebene Gleichung jedenfalls eine reelle negative Wurzel zwischen — 1,0 und — 0,9 hat. Weil ferner

$$F(+0{,}8) = +0{,}00800$$

ist, so hat die Gleichung offenbar eine reelle positive Wurzel, die sehr nahe + 0,8 ist, und da eine cubische Gleichung nie zwei reelle und eine imaginäre Wurzel haben kann, so muss unsere Gleichung nothwendig noch eine dritte reelle Wurzel haben. Da das letzte Glied der cubischen Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

positiv ist, so ist das Product der drei Wurzeln negativ, und die dritte reelle Wurzel, welche die Gleichung nothwendig noch haben muss, muss folglich positiv sein, so dass also die Gleichung eine negative und zwei positive Wurzeln hat, was auch ganz mit den anderweitig gefundenen Resultaten übereinstimmt. Wo man die beiden positiven Wurzeln zu suchen hat, ergiebt sich aus dem Obigen auf der Stelle; dieselben können aber nur durch weitere Theilung der betreffenden Intervalle und die bekannten Näherungsmethoden gefunden werden, was einer weiteren Erläuterung nicht mehr bedarf. Im vorliegenden Falle fällt übrigens sehr leicht in die Augen, wie man sich zu verhalten hat; denn da die den Werthen +0,8 und +0,9 von u entsprechenden Werthe von $F(u) = \Phi(u) + \Phi_1(u)$ der Null am nächsten kommen, so setze man einmal

$$u = +0{,}85;$$

dann ist:

$$u^2 = 0{,}7225$$

$$1 - u^2 = 0{,}2775$$

und berechnet man nun, was sehr leicht ist, die entsprechenden Werthe von $\Phi(u)$ und $\Phi_1(u)$ mittelst der Formeln:

$$\Phi(u) = 8u^3 - 7u, \quad \Phi_1(u) = 7(1-u^2)^{\frac{3}{2}};$$

so erhält man:

$$\Phi(u) = -1{,}03700$$

$$\Phi_1(u) = +1{,}02328$$

$$F(u) = -0{,}01372$$

und es ist also:

u	$F(u)$
$+0,80$	$+0,00800$
$+0,85$	$-0,01372$
$+0,90$	$+0,11174$

Also liegen die beiden positiven Wurzeln der Gleichung zwischen $+0,80$ und $+0,85$ und zwischen $+0,85$ und $+0,90$. Dieselbe hat also drei reelle Wurzeln

zwischen $-1,00$ und $-0,90$;
„ $+0,80$ „ $+0,85$;
„ $+0,85$ „ $+0,90$.

Setzt man, um wenigstens eine der drei Wurzeln der gegebenen Gleichung zu berechnen, nämlich die zwischen 0,80 und 0,85 liegende,

$$u=0,80500,$$

weil aus dem Obigen erhellet, dass die Wurzel sehr nahe bei 0,80 liegen muss; so hat man folgende Rechnung:

$u=0,80500$
$1-u=0,19500$
$1+u=1,80500$

$\log u=0,9057959-1$
$\log . u^2=0,8115918-1$
$\log . u^3=0,7173877-1$

$\log(1-u)=0,2900346-1$
$\log(1+u)=0,2564772$
$\log(1-u^2)=0,5465118-1$
$\log\sqrt{1-u^2}=0,7732559-1$

$\log 8=0,9030900$
$\log . u^3=0,7173877-1$
$\overline{0,6204777}$

$+4,17328$
$-5,63500$
$\Phi(u)=\overline{-1,46172}$

$\log 7=0,8450980$
$\log . u^2=0,8115918-1$
$\log\sqrt{1-u^2}=0,7732559-1$
$\overline{0,4299457}$

$-2,69120$
$+4,15292$
$\Phi_1(u)=\overline{+1,46172}$

$$\log 7 = 0{,}8450980$$
$$\log\sqrt{1-u^2} = 0{,}7732559 - 1$$
$$0{,}6183539$$

$$\Phi(u) = -1{,}46172$$
$$\Phi_1(u) = +1{,}46172$$
$$F(u) = 0{,}00000$$

$$\log u = 0{,}9057959 - 1$$
$$\log\sqrt{1-u^2} = 0{,}7732559 - 1$$
$$\log x = 0{,}1325400$$
$$x = 1{,}35688.$$

Cauchy a. a. O. findet diese Wurzel auf vier Decimalstellen nach seiner Methode = 1,3569, übereinstimmend mit dem obigen Resultat.

Mittelst der obigen Tafeln werden alle hierher gehörenden Rechnungen mit grosser Leichtigkeit ausgeführt. Für den praktischen Gebrauch würde es aber von grosser Wichtigkeit sein, die obigen Tafeln, die hier eigentlich nur als Beispiel mitgetheilt sind, in grösserer Ausdehnung zu besitzen, so dass das Argument u wenigstens durch die einzelnen Tausendtheile von 0,000 bis 1,000 fortschritte und die Genauigkeit bis zur siebenten Decimalstelle ginge; auch müsste man natürlich noch höhere Potenzen von u als die fünfte berücksichtigen, wenn die Tafeln zur Erleichterung der Auflösung der Gleichungen von noch höheren Graden als dem fünften dienen sollen. Besässe man aber eine solche Tafel in möglichster Ausdehnung und zweckmässiger Einrichtung, so würde dieselbe jedenfalls bei der Auflösung der numerischen Gleichungen in vielen Fällen die vortrefflichsten Dienste leisten können.

Hat man die Gleichung eines geraden Grades

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$$

aufzulösen, so erhält man, wenn

$$x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

und der Kürze wegen

$$\begin{aligned} P = a_0u^{2n} + a_2u^{2n-2}(1-u^2) &+ a_4u^{2n-4}(1-u^2)^2 \\ &+ a_6u^{2n-6}(1-u^2)^3 \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ a_{2n-2}u^2(1-u^2)^{n-1} \\ &+ a_{2n}(1-u^2)^n, \end{aligned}$$

$$Q = a_1 u^{2n-1}(1-u^2) + a_3 u^{2n-3}(1-u^2)^2 + a_5 u^{2n-5}(1-u^2)^3$$
$$+ a_7 u^{2n-7}(1-u^2)^4 +$$
u. s. w.
$$+ a_{2n-1} u(1-u^2)^n$$

gesetzt wird, die folgende transformirte Gleichung:

$$P\sqrt{1-u^2} + Q = 0,$$

wo es nun leicht sein würde, die Grössen P und Q mittelst des binomischen Lehrsatzes nach Potenzen von u zu entwickeln.

Hat man die Gleichung eines ungeraden Grades

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-3} + \ldots + a_{2n-2} x + a_{2n-1} = 0$$

aufzulösen, so erhält man, wenn

$$x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

und der Kürze wegen

$$P' = a_0 u^{2n-1} + a_2 u^{2n-3}(1-u)^2 + a_4 u^{2n-5}(1-u^2)^2$$
$$+ a_6 u^{2n-7}(1-u^2)^3$$
u. s. w.
$$+ a_{2n-2} u(1-u^2)^{n-1},$$

$$Q' = a_1 u^{2n-2} + a_3 u^{2n-4}(1-u^2) + a_5 u^{2n-6}(1-u^2)^2$$
$$+ a_7 u^{2n-8}(1-u^2)^3$$
u. s. w.
$$+ a_{2n-3} u^2 (1-u^2)^{n-2}$$
$$+ a_{2n-1}(1-u^2)^{n-1}$$

gesetzt wird, die transformirte Gleichung:

$$P' + Q'\sqrt{1-u^2} = 0,$$

wo man P' und Q' wieder leicht nach Potenzen von u entwickeln kann.

Wie man sich aber bei der Auflösung dieser transformirten Gleichungen zu verhalten hat, unterliegt nach dem Obigen keinem Zweifel, und ich will nur auch noch zu bemerken nicht unterlassen, dass man immer u mit hinreichender Genauigkeit bestimmen muss, wenn man versichert sein will, x mittelst der Formel

$$x=\frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{1-u^2}}$$

mit einer gewissen verlangten Genauigkeit zu erhalten, was natürlich besondere Vorsicht erfordert, worüber sich im Allgemeinen natürlich hier ohne grosse Weitläufigkeit nichts Weiteres sagen lässt.

Die Berechnung und Herausgabe solcher Tafeln, wie ich dieselben oben näher charakterisirt habe, würde nach meiner Ueberzeugung ein sehr verdienstliches Unternehmen sein und der Wissenschaft damit gewiss ein sehr angenehmes und wichtiges Geschenk gemacht werden, da dieselben in sehr vielen Fällen bei der Auflösung der Gleichungen die wesentlichsten Dienste leisten können. Möchte doch einmal eine Akademie der Wissenschaften die Publication solcher Tafeln zum Gegenstande einer Preisaufgabe machen!

V.

Vergleichung der drei Sommer von 1842, 1846 und 1857 in Berlin.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*

zu Berlin.

Ueber den letzten Sommer vernahm man die Aeusserung, welche häufig bei besondern Witterungs-Erscheinungen gemacht zu werden pflegt, dass die ältesten Leute sich keines ähnlichen erinnern. Diess war die äussere Veranlassung, dass ich die drei oben angeführten Sommer mit einander verglichen habe, und ich

erlaube mir, über das beifolgende Tableau einige Bemerkungen zu machen.

Aehnlich wie bei meinen Untersuchungen der Winter in Berlin habe ich mich nicht an die bekannten Grenzen der drei Monate Juni, Juli und August gebunden, sondern als einen **Sommertag** einen solchen angesehen, an welchem die mittlere Temperatur wenigstens 15° R. betrug. Hiernach war die Dauer der drei Sommer

1842 Mai 28.—Sept. 9. 105 Tage mit 53 Sommertagen.
1846 Mai 22.—Sept. 12. 114 „ „ 67 „
1857 Mai 21.—Sept. 18. 121 „ „ 74 „

Um nun bestimmter einen Vergleich anstellen zu können, habe ich die letzte längste Dauer für alle drei Sommer angenommen und für die einzelnen Zwischenräume von 8 bis 11 Tagen die mittlern und absoluten Werthe so dargestellt, wie das Tableau sie zeigt. Aus demselben ersieht man sogleich, dass der letzte Sommer allerdings die beiden andern in der mittlern Temperatur überragt und dass auch das Maximum innerhalb der ersten 10 Tage des August das im zweiten Drittel 1842 um 1°,4 und das im ersten Drittel 1846 um 2°,3 übertrifft. In allen drei Jahren ist der August hervorragend:

1. durch die höchste mittlere Temperatur,
2. durch die Höhe der grössten Temperatur,
3. durch die Zahl der Sommertage.

Man sieht, dass dem Extrem der Temperatur keineswegs ein Werth der mittlern Temperatur entspricht, namentlich zeigt sich diess in dem Zwischenraum Aug. 1—10., und betrachtet man die entsprechende Curve, so stellt sich dieselbe 1857 als der Durchschnitt eines auf beiden Seiten steil abfallenden hohen Berges, 1846 hingegen als der Durchschnitt einer Hochebene dar; diess zeigen auch die Zahlenwerthe. Der letzte Sommer übertrifft die beiden andern hauptsächlich durch seine hohe Temperatur im Mai und September; liesse man diese nach der in der Meteorologie gewöhnlichen Weise fort, so würde

	1842	1846	1857
die mittlere Temperatur	15°,1	15°,9	15°,6
die Zahl der Sommertage	46	59	57

betragen.

Was die anhaltende Dürre betrifft, so sieht man, dass 1857 sowohl überhaupt mehr Regentage, als auch eine gleichförmigere Vertheilung derselben als in den beiden andern Jahren stattgefunden hat. 1857 kommt nur ein Zwischenraum von 10 Tagen vor, während dessen kein Regen gefallen ist, 1846 deren zwei, 1842 aber einer von 20 und ein zweiter von 8 Tagen. Im letztern Sommer hat aber in Wirklichkeit ein Zwischenraum von 30 Tagen stattgefunden, innerhalb dessen in Berlin kein Tropfen Regen gefallen ist.

Vergleichung der drei Sommer von 1842, 1846 und 1857 in Berlin.

	Mittlere tägliche Temperatur.			Maximum der Temperatur.			Sommertage.			Gewitter und Regen.		
	1842	1846	1857	1842	1846	1857	1842	1846	1857	1842	1846	1857
Mai												
21—31	14°,6	11°,0	15°,6	22°,2	19°,3	24°,2	4	1	7	1	3	2
Juni												
1—10	13,2	13,3	14,1	20,8	20,0	23,9	2	3	4	4	—	2
11—20	12,8	15,4	11,8	22,1	24,2	21,4	3	4	2	1	2	3
21—30	14,1	15,2	16,6	20,6	22,0	24,9	4	6	8	5	1	2
Juli												
1—10	15,1	16,0	15,9	25,6	22,8	24,3	4	6	6	—	1	2
11—20	14,4	16,5	15,5	22,0	23,9	23,6	4	8	5	—	3	—
21—31	13,2	16,0	15,5	19,0	24,6	22,7	1	7	6	2	2	3
Aug.												
1—10	16,5	19,7	18,7	24,9	24,9	27,2	8	10	10	2	1	3
11—20	18,4	16,7	17,3	25,8	22,0	22,9	9	10	10	1	2	3
21—31	17,8	14,0	15,3	23,7	20,0	22,2	11	5	6	1	3	1
Sept.												
1—10	13,8	15,1	15,7	22,6	21,6	21,2	3	5	6	2	—	3
11—18	13,1	12,0	14,7	17,0	20,8	21,3	—	2	4	—	3	2

	1842	1846	1857	1842	1846	1857	1842	1846	1857	1842	1846	1857
Mai	14°,6	11°,0	15°,6	22°,2	19°,3	24°,2	4	1	7	1	3	2
Juni	13,4	14,6	14,2	22,1	24,2	24,9	9	13	14	10	3	7
Juli	14,2	16,2	15,6	25,6	24,6	24,3	9	21	17	2	6	5
Aug.	17,6	16,8	17,1	25,8	24,9	27,2	28	25	26	4	6	7
21—31												
Sept.												
1—18	13,5	13,7	15,3	22,6	21,6	21,3	3	7	10	2	3	5
Sommer	14°,8	15°,1	15°,6	25°,8	24°,9	27°,2	53	67	74	19	21	26

VI.

Note zur Integration der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1} y' + Cx^{m-2} y. \qquad (1)$$

Von

Herrn Simon Spitzer

zu Wien.

Ich setzte in meinem frühern Memoire über diesen Gegenstand (Thl. XXIX. S. 403.):

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux) V du, \qquad (2)$$

und kam dabei auf folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung von ψ und V:

$$\psi^{(n)}(x) = x^{m-2}\psi(x),$$

$$Au^2 \frac{d^2V}{du^2} + (4A-B)u\frac{dV}{du} + (2A-B+C-u^{m+n-2})V = 0. \quad (3)$$

Seien die Integrale dieser Gleichungen:

$$\psi(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + \ldots + C_n\psi_n(x),$$

$$V = A_1 V_1 + A_2 V_2;$$

so hat man endlich diese Werthe in folgende gleichzeitig stattfindende Gleichungen

$$u^2 V\psi'(ux) = 0,$$

$$[A\frac{d(u^2V)}{du} - BuV]\psi(ux) = 0$$

zu substituiren, und zu sehen, ob man ihnen durch zwei solche constante Zahlen genügen kann (in der Regel wird eine schickliche Wahl von $\frac{A_2}{A_1}$ zu einer solchen Zahl führen), die als Integrationsgrenzen für das Integral (2) gebraucht werden können.

Führt man nun in (3) eine neue unabhängige Variable t in Rechnung ein, mittelst der Substitution

$$u^{m+n-2} = t,$$

wodurch

$$\frac{dV}{du} = (m+n-2)\,u^{m+n-3}\,\frac{dV}{dt},$$

$$\frac{d^2V}{du^2} = (m+n-2)\left[(m+n-3)\,u^{m+n-4}\frac{dV}{dt} + (m+n-2)\,u^{2(m+n-3)}\frac{d^2V}{dt^2}\right]$$

wird, so erhält man:

$$A(m+n-2)^2 t^2 \frac{d^2V}{dt^2} + (m+n-2)\left[(m+n+1)A - B\right]t\frac{dV}{dt}$$
$$+ (2A - B + C - t)\,V = 0.$$

Die Einführung einer neuen abhängig Variablen z mittelst der Substitution

$$V = t^k z$$

gibt, da

$$\frac{dV}{dt} = t^k\frac{dz}{dt} + kt^{k-1}z,$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = t^k\frac{d^2z}{dt^2} + 2kt^{k-1}\frac{dz}{dt} + k(k-1)t^{k-2}z$$

ist, Folgendes:

$$A(m+n-2)^2 t^2\frac{d^2z}{dt^2} + (m+n-2)\left[A(m+n-2)(1+2k) + 3A - B\right]t\frac{dz}{dt}$$
$$+ z\left[Ak^2(m+n-2)^2 + k(3A-B)(m+n-2) + 2A - B + C - t\right] = 0,$$

und diess vereinfacht sich, wenn man k so wählt, auf dass

$$Ak^2(m+n-2)^2 + k(3A-B)(m+n-2) + 2A - B + C = 0$$

wird, denn obige Gleichung wird dann durch t abkürzbar und nimmt somit folgende Form an:

$$A(m+n-2)^2 t\frac{d^2z}{dt^2}+(m+n-2)\left[A(m+n-2)(1+2k)+3A-B\right]\frac{dz}{dt}-z=0. \tag{4}$$

Für das Integral der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}-Ay=0$$

fand ich (siehe das Juniheft des Jahrgangs 1857 der Sitzungsberichte der mathem. naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien):

$$y=\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[A_1 e^{+2\sqrt{Ax}}+A_2 e^{-2\sqrt{Ax}}\right],$$

folglich ist das Integral der Gleichung (4):

$$z=\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\left[A_1 e^{+\frac{2}{m+n-2}\sqrt{\frac{t}{A}}}+A_2 e^{-\frac{2}{m+n-2}\sqrt{\frac{t}{A}}}\right],$$

unter λ die Zahl $\frac{1}{2}+2k+\frac{3A-B}{A(m+n-2)}$ und unter A_1 und A_2 willkührliche Constanten verstanden.

VII.

Entwickelung des μten Differentialquotienten von $y=e^{mx^2}$.

Von
Herrn *Simon Spitzer*
zu Wien.

Wir gehen aus von folgender Formel, die Liouville im 15ten Bande des Journal de l'école polytechnique aufstellte:

$$\frac{\partial^\mu y}{\partial(\sqrt{z})^\mu}=2^\mu\sqrt{z}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left[z^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dz^{\frac{\mu}{2}}}\right]}{dz^{\frac{\mu}{2}}}$$

und setzen in selbe:

$$y=e^{mz};$$

alsdann ist:

$$\frac{d^\mu e^{mz}}{d(\sqrt{z})^\mu}=2^\mu\sqrt{z}\,m^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left[z^{\frac{\mu-1}{2}}e^{mz}\right]}{dz^{\frac{\mu}{2}}},$$

und diese geht für

$$\sqrt{z}=x$$

über in:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu}=(4m)^{\frac{\mu}{2}}\,x\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left[z^{\frac{\mu-1}{2}}e^{mz}\right]}{dz^{\frac{\mu}{2}}}.$$

Man hat daher behufs der Entwickelung von $\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu}$ den $\frac{\mu}{2}$ten Differentialquotienten von dem Produkte $z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz}$ zu bilden, alsdann hierein $z = x^2$ zu setzen und das erhaltene Resultat mit $(4m)^{\frac{\mu}{2}} x$ zu multipliziren.

Führt man in die bekannte Formel

$$\frac{d^r[PQ]}{dx^r} = P^{(r)}Q + \binom{r}{1} P^{(r-1)}Q' + \binom{r}{2} P^{(r-2)}Q'' + \ldots.$$

die Substitutionen

$$r = \frac{\mu}{2},$$

$$P = e^{mz}, \quad Q = z^{\frac{\mu-1}{2}}$$

ein, so erhält man, die angezeigten Operationen verrichtend:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu} = (2mx)^\mu e^{mx^2} [1 + \frac{\mu(\mu-1)}{4mx^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!(4mx^2)^2}$$

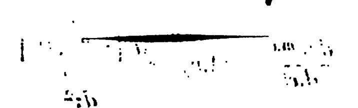
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{3!(4mx^2)^3} + \ldots]$$

und diese Reihe bricht für jedes ganze positive μ ab. Ist μ eine andere als eine ganze und positive Zahl, so wird diese Reihe eine divergente.

Gleichwohl ist es leicht, auch für andere, als ganze positive Werthe von μ den μten Differentialquotienten von e^{mx^2} in convergente Reihen zu entwickeln, und zwar wieder mit Benutzung derselben Formel von $\frac{d^r(PQ)}{dx^r}$; nur setzen wir jetzt in dieselbe

$$P = z^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad Q = e^{mz}.$$

Da aber die weitere Rechnung keine Schwierigkeit darbietet, so unterlassen wir die weitere Ausführung derselben.



VIII.

Darstellung des unendlichen Kettenbruchs

$$x+\cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\dots}}}$$

in geschlossener Form, nebst anderen Bemerkungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*

zu Wien.

Aus Legendre's Geometrie folgt für den Werth des obigen Bruches:

$$\frac{x\varphi(x)}{\varphi(x+1)},$$

wo

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!\,x(x+1)}+\frac{1}{3!\,x(x+1)(x+2)}+\dots.$$

ist. Nun lässt sich $\varphi(x)$ auch so darstellen:

$$\varphi(x)=(x-1)!\left\{\frac{1}{(x-1)!}+\frac{1}{x!}+\frac{1}{2!\,(x+1)!}+\frac{1}{3!\,(x+2)!}+\dots\right\},$$

folglich ist obiger Kettenbruch gleich:

$$\frac{\dfrac{1}{(x-1)!}+\dfrac{1}{1!\,x!}+\dfrac{1}{2!\,(x+1)!}+\dfrac{1}{3!\,(x+2)!}+\dots}{\dfrac{1}{x!}+\dfrac{1}{1!\,(x+1)!}+\dfrac{1}{2!\,(x+2)!}+\dfrac{1}{3!\,(x+3)!}+\dots}.$$

Benutzt man nun folgende Formel:

$$\frac{\sqrt{r}}{\pi}\int_0^\pi \cos\omega e^{2\sqrt{r}\cos\omega}d\omega = r+\frac{r^2}{1!2!}+\frac{r^3}{2!3!}+\frac{r^4}{3!4!}+\ldots,$$

die ich bei Gelegenheit der Integration der Gleichung $xy^{(n)}-y=0$ (Thl. XXVI. S. 57.) entwickelte, so hat man, dieselbe $x$mal differenzirend:

$$\frac{d^x}{dr^x}\left[\frac{\sqrt{r}}{\pi}\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{(x-1)!}+\frac{r}{1!x!}+\frac{r^2}{2!(x+1)!}+\frac{r^3}{3!(x+2)!}+\ldots;$$

somit hat man als Werth des vorgelegten Kettenbruches:

$$\frac{\dfrac{d^x}{dr^x}[\sqrt{r}\displaystyle\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{r}\cos\omega}d\omega]}{\dfrac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}[\sqrt{r}\displaystyle\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{r}\cos\omega}d\omega]},$$

wenn nach vollendeter Differentiation $r=1$ gesetzt wird. Es erscheint also dieser unendliche Kettenbruch in der merkwürdigen Form eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Differentialquotienten sind mit veränderlichem Differentiationsindex.

Ich füge hier noch einige Bemerkungen bei, die Bezug auf früher von mir gelieferte Arbeiten haben. Das Integral der Gleichung

$$y^{(n)}=Ax^my'+Bx^{m-1}y$$

ist

$$y=\int_0^\infty \psi(ux)u^{\frac{B}{A}-1}e^{-\frac{u^{m+n-1}}{A(m+n-1)}}du,$$

wo A und B positiv und $m+n>1$ ist, sonst aber beliebig, und $\psi(x)$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}=x^{m-1}\psi(x).$$

IX.

Bemerkung zur Integration der Gleichung $x_1dx+x_2dx_1+x_3dx_2+xdx_3=0$.

Von

Herrn *Simon Spitzer*

zu Wien.

Die Gleichung

$$x_1dx+x_2dx_1+x_3dx_2+x_4dx_3+x_5dx_4+xdx_5=0$$

lässt sich folgendermassen schreiben:

$$(x_2-x)\,d(x_1-x_3)+(x_4-x)\,d(x_3-x_5)+d(xx_1+x_2x_3+x_4x_5)=0,$$

ferner die Gleichung

$$x_1dx+x_2dx_1+x_3dx_2+x_4dx_3+x_5dx_4+x_6dx_5+x_7dx_6+xdx_7=0$$

so:

$$(x_2-x)\,d(x_1-x_3)+(x_4-x)\,d(x_3-x_5)$$
$$+(x_6-x)\,d(x_5-x_7)+d(xx_1+x_2x_3+x_4x_5+x_6x_7)=0,$$

u. s. f. Mittelst der Pfaff'schen Methode sind die hier gewonnenen Formeln nicht zu bestimmen.

X.

Merkwürdige Construction des grössten in, und des kleinsten um eine Ellipse beschriebenen Vielecks von gegebener Seitenzahl.

Von
dem Herausgeber.

In der Abhandlung No. II. habe ich gezeigt, wie sich das grösste Dreieck in, das kleinste Dreieck um eine Ellipse beschreiben lässt. In der vorliegenden Abhandlung will ich jetzt diese Betrachtungen auf in und um die Ellipse beschriebene Vielecke von gegebener Seitenzahl überhaupt erweitern, was zu einer, wie ich glaube, sehr bemerkenswerthen allgemeinen Construction solcher Vielecke führen, und die Lehre vom Grössten und Kleinsten nicht unwesentlich erweitern wird.

Zuerst wollen wir die folgende Aufgabe auflösen:

> In ein durch eine Sehne abgeschnittenes Segment einer Ellipse das grösste Dreieck zu beschreiben.

Die Anomalien der Endpunkte der gegebenen Sehne seien u_0 und u_2, wobei wir, was offenbar verstattet ist, grösserer Einfachheit und Bestimmtheit wegen annehmen wollen, dass u_0 kleiner als u_2 sei. Da dieselbe Sehne nun aber immer zwei Segmente der Ellipse abschneidet, so ist es nöthig, dass wir uns vereinigen, welches dieser beiden Segmente wir im Folgenden betrachten wollen. Wir wollen aber immer dasjenige dieser beiden Segmente in's Auge fassen, dessen elliptischen Bogen man durchläuft, wenn man sich von dem durch die Anomalie u_0 bestimmten Endpunkte der Sehne an nach dem durch die Anomalie u_2 be-

stimmten Endpunkte derselben hin in der Richtung bewegt, nach welcher hin die Anomalien von 0 bis 360° gezählt werden. Ist nun u_1 die Anomalie irgend eines Punktes in dem das auf diese Weise bestimmte Segment begränzenden elliptischen Bogen, so ziehe man nach diesem Punkte von den Endpunkten der Sehne gerade Linien, welche in Verbindung mit der Sehne ein in das Segment beschriebenes Dreieck begränzen werden, dessen Flächeninhalt wir durch $\varDelta$ bezeichnen wollen. Unter den gemachten Voraussetzungen ist bekanntlich *):

$$\varDelta = 2ab \sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

und es ist nun unsere Aufgabe, die Anomalie u_1 so zu bestimmen, dass $\varDelta$ ein Maximum wird, wobei natürlich u_0 und u_2 als constant zu betrachten sind. Durch Differentiation nach u_1 erhält man sogleich:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial u_1} = ab \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1 - u_0) - \cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)\},$$

also:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial u_1} = ab \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0),$$

und hieraus ferner:

$$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial {u_1}^2} = -ab \sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos\tfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0).$$

Folglich ist die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0) = 0,$$

woraus sich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0) = k\pi,$$

also

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - k\pi$$

ergiebt.

Weil $\frac{1}{2}(u_0 + u_2)$ nicht grösser als 2π ist, so kann man, insofern u_1 positiv sein und 2π nicht übersteigen soll, offenbar nur $k = 0$ und $k = \pm 1$, also bloss

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2), \quad u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) + \pi, \quad u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - \pi$$

setzen.

---

*) M. s. S. 14. in diesem Bande.

Offenbar entspricht die Anomalie

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2)$$

dem Segment, welches wir hier betrachten.

Wenn $\tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) < \pi$ ist, so kann man, da u_1 positiv sein muss, nicht

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - \pi,$$

sondern muss

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) + \pi$$

setzen. Weil

$$u_2 - \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$$

und offenbar $\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$ nie grösser als π *), also auch $u_2 - \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2)$ nicht grösser als π sein kann, so gehört der durch die Anomalie u_1 bestimmte Punkt im Allgemeinen augenscheinlich immer dem das gegebene Segment zur ganzen Ellipse ergänzenden Segment an.

Wenn $\tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) > \pi$ ist, so kann man, da u_1 nicht grösser als 2π sein darf, nicht

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) + \pi,$$

sondern muss

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - \pi$$

setzen. Weil

$$\tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - u_0 = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

also wie vorher $\tfrac{1}{2}(u_0 + u_2) - u_0$ nicht grösser als π ist, so gehört der durch die Anomalie u_1 bestimmte Punkt im Allgemeinen augenscheinlich wieder dem das gegebene Segment zur ganzen Ellipse ergänzenden Segment an.

Hiernach kann man also nur

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_2)$$

setzen, und es ergiebt sich nun hieraus unmittelbar die folgende merkwürdige Construction des grössten Dreiecks, welches sich in das gegebene Segment beschreiben lässt, da $\cos\tfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0) = 1$, und folglich der Werth des zweiten Differential-Quotienten $-ab\sin\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0)$, also negativ ist.

Ueber der Hauptaxe der Ellipse als Durchmesser beschreibe

---

*) Wäre $\tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) > \pi$, so wäre $u_2 > 2\pi + u_0$, also $u_2 > 2\pi$, was unzulässig ist.

man, wie Taf. I. Fig. 6. zeigt, einen Kreis. Von den Endpunkten A_0 und A_2 der gegebenen Sehne A_0A_2 fälle man auf die Hauptaxe Perpendikel und verlängere dieselben, bis von ihnen der beschriebene Kreis in A_0' und A_2' geschnitten wird. Nun halbire man den Kreisbogen $A_0'A_2'$ in A_1' und fälle von A_1' auf die Hauptaxe ein Perpendikel, welches die Ellipse in A_1 schneidet. Zieht man dann die Linien A_0A_1, A_2A_1, so ist $A_0A_1A_2$ das grösste Dreieck, welches sich in das elliptische Segment, in dem es liegt, beschreiben lässt.

Die Gleichung der durch die Anomalien u_0 und u_2 bestimmten Sehne ist bekanntlich:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\ ^{*}),$$

und die Gleichung der die Ellipse in dem durch die Anomalie $\frac{1}{2}(u_0+u_2)$ bestimmten Punkte Berührenden ist:

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)=1\ ^{**}):$$

also ist diese Berührende offenbar der Sehne parallel, woraus das im Obigen Bewiesene noch unmittelbarer folgt, als durch die obige Darstellung, die wir jedoch nicht ohne Absicht hier mitgetheilt haben.

Die Construction des grössten Vielecks von gegebener Seitenzahl, welches sich in eine Ellipse beschreiben lässt, ist nun leicht auf folgende Art zu geben:

Ueber der Hauptaxe der gegebenen Ellipse als Durchmesser beschreibe man, wie Taf. I. Fig. 7. zeigt, einen Kreis. Soll nun beispielsweise das grösste Siebeneck in die Ellipse beschrieben werden, so theile man den beschriebenen Kreis von einem beliebigen Punkte A_0' an in den Punkten A_0', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6' in sieben gleiche Theile ein, und fälle von diesen Theilpunkten auf die Hauptaxe der Ellipse Perpendikel, welche die Ellipse in den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 schneiden; diese Punkte sind die Ecken des zu beschreibenden grössten Siebenecks, und geben dasselbe, wenn man sie durch Sehnen der Ellipse mit einander verbindet.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction kann mittelst des Obigen leicht auf folgende Art geführt werden.

---

*) Thl. XXIV. S. 373.

**) A. a. O. S. 375.

Wir wollen annehmen, dass $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ein mit beliebigen Anomalien in die Ellipse beschriebenes Siebeneck sei. Theilen nun die Punkte A_0', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6' den über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis nicht in sieben gleiche Theile ein, und ist demzufolge etwa nicht $A_0'A_1'=A_1'A_2'$, so denke man sich den Kreisbogen $A_0'A_2'$ in dem Punkte $\mathfrak{A}_1'$ in zwei gleiche Theile getheilt, von diesem Punkte auf die Hauptaxe ein die Ellipse in $\mathfrak{A}_1$ schneidendes Perpendikel gefällt, und die Sehnen $A_0\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1A_2$ und A_0A_2 der Ellipse gezogen. Dann ist nach dem Obigen das Dreieck $A_0\mathfrak{A}_1A_2$ grösser als das Dreieck $A_0A_1A_2$, folglich das Siebeneck $A_0\mathfrak{A}_1A_2A_3A_4A_5A_6$ grösser als das Siebeneck $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Hieraus schliesst man aber nun ferner leicht, dass das grösste Siebeneck, welches sich in die Ellipse beschreiben lässt, nur das sein kann, bei welchem die Punkte A_0', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6' den über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis in sieben gleiche Theile theilen.

Wir gehen nun, indem wir alle vorher gemachten Festsetzungen beibehalten, zu der Auflösung der folgenden Aufgabe über:

Wenn in Taf. I. Fig. 8. durch die Punkte A_0 und A_2 *) Berührende an die Ellipse gezogen sind, so soll man den Punkt A_1 so bestimmen, dass, wenn man durch denselben eine dritte Berührende an die Ellipse zieht, das von diesen drei Berührenden und der Sehne A_0A_2 eingeschlossene Viereck, dessen Flächeninhalt wir durch F bezeichnen wollen, ein Minimum wird.

Behalten wir die in der Abhandlung Nr. II. eingeführten Bezeichnungen bei, so ist in dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle:

$$s_0=\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

$$s_2=\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}\ {}^{**)}$$

und

$$s_{0,(2,0)}=r_0\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

$$s_{2,(2,0)}=r_2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\ {}^{***)};$$

*) In der Figur finden sich überall, der Einfachheit und der Conformität mit der Abhandlung Nr. II. wegen, nur die an den Buchstaben A_0, A_1, A_2, u. s. w. stehenden unteren Indices.

**) M. s. S. 34. in diesem Bande.

***) M. s. S. 35. in diesem Bande.

so wie

$$\sin A_{2,0} = \frac{ab}{r_0 r_2} \sin(u_2 - u_0) \text{ *)},$$

wobei man nur zu beachten hat, dass $\tang \frac{1}{2}(u_2 - u_0)$ wegen der vorhergehenden Ausdrücke von $s_{0,(2,0)}$ und $s_{2,(2,0)}$ positiv, also

$$0 < \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) < 90^0,$$

folglich

$$0 < u_2 - u_0 < 180^0,$$

und daher $\sin(u_2 - u_0)$ positiv ist.

In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist:

$$s_0 = -\frac{r_0 \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_1)}{\cos \frac{1}{2}(u_1 - u_0) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_0)},$$

$$s_2 = -\frac{r_2 \sin \frac{1}{2}(u_1 - u_0)}{\cos \frac{1}{2}(u_2 - u_0) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1)} \text{ **)}$$

und

$$s_{0,(2,0)} = -\, r_0 \tang \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0),$$

$$s_{2,(2,0)} = -\, r_2 \tang \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) \text{ ***)};$$

so wie auf dieselbe Weise wie vorher:

$$\sin A_{2,0} = -\frac{ab}{r_0 r_2} \sin(u_2 - u_0),$$

wobei man nur zu beachten hat, dass $\tang \frac{1}{2}(u_2 - u_0)$ wegen der vorhergehenden Ausdrücke von $s_{0,(2,0)}$ und $s_{2,(2,0)}$ negativ, also

$$90^0 < \tfrac{1}{2}(u_2 - u_0) < 180^0,$$

folglich

$$180^0 < u_2 - u_0 < 360^0,$$

und daher $\sin(u_2 - u_0)$ negativ ist.

Nun ist aber, wenn man im ersten Falle das obere, im zweiten Falle das untere Zeichen nimmt, offenbar:

$$F = \pm \tfrac{1}{2} \{ s_{0,(2,0)} s_{2,(2,0)} - s_0 s_2 \} \sin A_{2,0};$$

also nach dem Vorhergehenden in völliger Allgemeinheit:

---

*) M. s. S. 24. und S. 34. in diesem Bande.

**) M. s. S. 30. in diesem Bande.

***) M. s. S. 30. in diesem Bande.

$$2F = ab\left\{\begin{array}{l}\tang\frac{1}{2}(u_2-u_0)\tang\frac{1}{2}(u_2-u_0)\\ -\dfrac{\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)}\\ \times\dfrac{\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}\end{array}\right\}\sin(u_2-u_0),$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$F = ab\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\{\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2-\tang\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$U = \sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)^2-\tang\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\tang\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),$$

so ist, wenn man, u_0 und u_2 als constant betrachtend, nach u_1 als veränderliche Grösse differentiirt:

$$2\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{\tang\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2}-\frac{\tang\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2},$$

und folglich die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums offenbar:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2}-\frac{\tang\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2}=0,$$

welche Gleichung man leicht auf die Form

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),$$

also auf die Form

$$\sin(u_1-u_0)=\sin(u_2-u_1),$$

oder auf die Form

$$\sin(u_2-u_1)-\sin(u_1-u_0)=0,$$

folglich auf die Form

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)=0$$

bringt, woraus sich

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)=0$$

ergiebt, welche Gleichung ganz auf dieselbe Weise wie oben zu

$$u_1=\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)$$

führt.

Nun ist nach dem Obigen:

$$2\frac{\partial U}{\partial u_1}=\frac{\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)-\sin\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2},$$

also:

$$4\frac{\partial U}{\partial u_1}=-\frac{\sin(u_2-u_1)-\sin(u_1-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2},$$

oder:

$$2\frac{\partial U}{\partial u_1}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2}.$$

Lässt man nun, wie es hier verstattet ist, der Kürze wegen das Glied weg, welches verschwindet, wenn man $u_1=\frac{1}{2}(u_0+u_2)$ setzt, so ist

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2};$$

und weil

$$F=abU\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),$$

also offenbar:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}=ab\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}=\frac{ab\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)}{2\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)^2\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2},$$

natürlich immer bloss unter der Voraussetzung, dass man

$$u_1=\tfrac{1}{2}(u_0+u_2)$$

setzt. Für diesen Werth von u_1 erhält man aber auf der Stelle:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}=\frac{ab\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{2\cos\frac{1}{4}(u_2-u_0)^4}=\frac{ab\operatorname{tang}\frac{1}{4}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{4}(u_2-u_0)^2},$$

und sieht also, dass dieser zweite Differentialquotient, weil $\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)$ stets positiv ist, gleichfalls stets positiv ist, die Bedingung des Minimums sich also erfüllt zeigt.

Wollte man also um eine Ellipse das kleinste Vieleck von gegebener Seitenzahl, etwa das kleinste Siebeneck, beschreiben, so würde man im Wesentlichen ganz eben so verfahren wie oben bei der Beschreibung des grössten Vielecks von gegebener Seitenzahl in die Ellipse, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass man die auf die obige Weise bestimmten Punkte

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 nicht durch Sehnen miteinander zu verbinden, sondern durch alle diese Punkte Berührende an die Ellipse zu legen hätte.

Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich mittelst des vorher Bewiesenen durch ganz ähnliche Schlüsse wie von der oben gelehrten Construction des grössten Vielecks von gegebener Seitenzahl in die Ellipse.

Ich hoffe, dass auch diese Constructionen die Wichtigkeit des Gebrauchs der Anomalien in der Theorie der Ellipse sehr deutlich zu zeigen geeignet sein werden.

XI.

Zur Theorie der Beugungserscheinungen.

Von

Herrn Dr. *Zehfuss*,

provisorischem Lehrer der höheren Mathematik und höheren Mechanik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt.

Vorbemerkungen.

1) Es erhellet leicht aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, dass, wenn auf drei in A' zusammenstossende Geraden P, Q, R (Taf. II. Fig. 1.), welche als Kräfte betrachtet sich das Gleichgewicht halten würden, von einem Punkte M aus Perpendikel gefällt werden und die Entfernungen der Fusspunkte derselben von $A'=p$, q, r heissen, immer $Pp+Qq+Rr=0$ sei, wobei ein solcher Abstand p, q, r als positiv oder negativ zu

betrachtet ist, jenachdem derselbe mit P, Q, R auf einerlei oder auf entgegengesetzte Seite fällt. Diess ergibt sich, wenn man MA' als zurückgelegten Weg des Angriffspunktes A' betrachtet, kann aber auch leicht rein geometrisch bewiesen werden.

2). Sollen zwei Ausdrücke $z\cos(w-\beta)$, $z'\cos(w-\beta')$ für jeden Werth von w einander gleich sein, so muss $z=z'$, $\beta=\beta'$ sein, wenn, wie in der Theorie der Beugungserscheinungen, z die immer positive Amplitude, β die Wegdifferenz ist. Denn aus

$$z\cos w\cos\beta + z\sin w\sin\beta = z'\cos w\cos\beta' + z'\sin w\sin\beta'$$

folgt, wenn man durch $\cos w$ dividirt, wegen der Willkührlichkeit von $\operatorname{tg} w$:

$$z\cos\beta = z'\cos\beta', \quad z\sin\beta = z'\sin\beta'.$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen liefert $z=z'$, ihr Quotient $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta'$, also $\beta' = \beta + n\pi$. Nun kann aber $\sin\beta$ nicht $=\sin\beta'$ sein, wenn nicht n eine gerade Zahl ist, also ist $\beta=\beta'$, weil eine Phasendifferenz von 2π keinen Einfluss hat.

3). Wenn ein Aethertheilchen in Folge der Einwirkungen mehrerer Lichtquellen die Ausweichungen $a_1\sin(w-\beta_1)$, $a_2\sin(w-\beta_2)$.... aus der Gleichgewichtslage auszuführen hätte, wo a_1, a_2.... die Amplituden, $w=\frac{2\pi t}{T}$, $\beta=\frac{2\pi x}{\lambda}$, T die Oscillationsdauer, λ die Wellenlänge, x die Wegdifferenz vorstellen, so ist sein eigentlicher Stand durch

$$a_1\sin(w-\beta_1) + a_2\sin(w-\beta_2) + \ldots = Sa\sin(w-\beta) = z\sin(w-\gamma)$$

ausgedrückt, wo

$$z^2 = [Sa\sin\beta]^2 + [Sa\cos\beta]^2, \quad \operatorname{tg} w = \frac{Sa\sin\beta}{Sa\cos\beta}.$$

Es folgt hieraus, da z von w unabhängig ist, dass, wenn man ein anderes Aethertheilchen betrachtet, welches um δ weiter von sämmtlichen Erschütterungsmittelpunkten entfernt ist, seine Amplitude z dieselbe bleiben, seine Phase aber um $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ kleiner sein wird; denn es vertauscht sich alsdann in obigen Ausdrücken nur überall w mit $w-\frac{2\pi\delta}{\lambda}$. Es folgt ferner, dass, wenn ein zu einer Beugungserscheinung gehöriges Aethertheilchen M von mehreren in beliebig gestalteten Oeffnungen eines Schirmes enthaltenen Lichtquellen Erschütterungen empfängt, welche so nahe parallel sind, dass sie sich addiren, seine Ausweichung

stets von der Form sein wird: $z\sin(w-\gamma)$ oder $z\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\gamma\right)$. Diess ist folglich der allgemeine Ausdruck für die Ausweichung eines beliebigen Aethertheilchens jeder Beugungserscheinung. Schliesslich sei noch bemerkt, dass zwei Ausweichungen von der Form $a_1\sin(w-\beta_1)-a_2\sin(w-\beta_2)$ eine Amplitude geben, deren Quadrat $=a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1a_2\cos(\beta_1-\beta_2)$.

Beugungserscheinungen.

I. Wirkung eines unendlich schmalen Parallelogrammes.

Der Punkt M (Taf. II. Fig. 2.), welcher der Wirkung des unendlich schmalen leuchtenden Parallelogrammes ausgesetzt werden soll, dessen Seiten $AA'=P$ und $AC=n$ seien, und dessen sämmtliche Aethertheilchen in gleichem Phasenzustande angenommen werden, sei so gelegen, dass seine Entfernung von A mit AA' den Winkel P_1 bilde, und soweit entfernt, dass seine Abstände von den einzelnen in AA' enthaltenen Aethertheilchen als parallel gelten können. — Es sei nun die Wirkung, welche eine der Flächeneinheit entsprechende und in A vereinte Anzahl von Aethertheilchen auf M ausübt, $=\alpha\sin\frac{2\pi t}{T}=\alpha\sin w$; alsdann kann nach 3) die Wirkung des Parallelogrammes $=z\sin(w-\gamma)$ gesetzt werden, wo es sich nur darum handelt, z und γ zu bestimmen. Wir verfahren zu diesem Ende auf folgende Weise. Es ist gewiss, dass wenn der Streifen AA' in seiner eigenen Richtung in die Lage BB' um $BC=\delta$ fortgeschoben wird, der neue Schwingungszustand des in der Entfernung ε befindlichen Punktes M, weil er aus der Summe der Einwirkungen der in BB' enthaltenen Aethertheilchen besteht, gleich ist der Wirkung von AA' + Wirkung von $A'B'$ — Wirkung von AB, oder dass der Unterschied der Wirkungen von AA' und BB' demjenigen der Wirkungen von AB und $A'B'$ gleich ist.

Da die in AB befindlichen Aethertheilchen unendlich nahe aneinanderliegend gedacht werden, gegen die Grösse von λ, so kann man annehmen, dass ihre Wirkungen auf M, als im Einklange stehend, sich unterstützen, und dass sie also zusammen $=n\delta\sin A.\alpha\sin w$ seien. — Ebenso ist die Wirkung von $A'B'$ auf M nach 3), weil alle Theilchen dieses kleinen Parallelogrammes um $P\cos P_1$ näher an M sind, als diejenigen in AB,

$$=n\delta\sin A.\alpha\sin(w-\frac{2\pi P\cos P_1}{\lambda}).$$

Ferner ist, wenn die Wirkung von $AA' = z \sin(w-\gamma)$ gesetzt wird, diejenige von $BB' = z \sin(w-\gamma-\frac{2\pi\delta\cos P_1}{\lambda})$. Wir haben also

$$z[\sin(w-\gamma)-\sin(w-\gamma-\frac{2\pi\delta\cos P_1}{\lambda})]$$

$$= n\delta \sin A . \alpha [\sin w - \sin(w-\frac{2\pi P \cos P_1}{\lambda})].$$

Aus dieser Gleichung bestimmen wir sowohl z als γ. Zuvörderst folgt:

$$z \sin \frac{\pi\delta\cos P_1}{\lambda} \cos(w-\gamma-\frac{\pi\delta\cos P_1}{\lambda})$$

$$= n\delta \sin A . \alpha \sin \frac{\pi P \sin P_1}{\lambda} \cos(w-\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}),$$

oder, da, wegen des unendlich kleinen δ,

$$\sin \pi \frac{\delta \cos P_1}{\lambda} : \delta = \frac{\pi \cos P}{\lambda}$$

ist, und mit Zuziehung von 2):

$$z = nP \sin A . \alpha . \frac{\sin \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}, \quad \gamma = \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}.$$

Also ist die ganze Wirkung der unendlich schmalen Spalte:

$$nP \sin A . \alpha . \frac{\sin \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}} . \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}\right). \quad (W).$$

II. Wirkung eines Parallelogrammes.

Um für dieselbe wieder einen Massstab aufzustellen, sei die Ausweichung, welche eine der Flächeneinheit entsprechende und in der einen Ecke A concentrirte Anzahl von Aethertheilchen auf den ausserhalb der Ebene des Parallelogrammes gelegenen Punkt

M ausübt, $=\alpha \sin \frac{2\pi t}{T} = \alpha \sin w$, und dem entsprechend der Zustand von *M*, in Folge der Einwirkung des Parallelogrammes ACA' (Taf. II. Fig. 3.), $= z_1 \sin(w-\gamma_1)$. Um z_1 und γ_1 zu bestimmen, verschiebe man wieder das Parallelogramm längs der Seite AA' um $BC=n$ in die Lage $BA'B'$. Alsdann ist, wie in I., wenn die Entfernung MA mit $AC=P$ den Winkel P_1, mit $AA'=Q$ den Winkel Q_1 bildet:

$$\text{Wirkung von } AA' - \text{Wirkung von } BB'$$
$$= \text{Wirkung von } AB - \text{Wirkung von } A'B',$$

d. h. wenn z und γ die in I. angeführte Bedeutung haben:

$$z_1 \sin(w-\gamma_1) - z_1 \sin\left(w-\gamma_1 - \frac{2\pi n \cos Q_1}{\lambda}\right)$$
$$= z \sin(w-\gamma) - z \sin\left(w-\gamma-\frac{2\pi Q \cos Q_1}{\lambda}\right).$$

Verwandelt man diese Gleichung ähnlich wie die entsprechende in I. und substituirt den Werth von z, so hat man:

$$z_1 = PQ \sin A . \alpha . \frac{\sin \frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}}{\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}} . \frac{\sin \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}} .$$

Nimmt man P_1 und Q_1 als rechte Winkel an, so erhält man $z_1 = PQ \sin A . \alpha$. Diess ist also die Amplitude, welche bei senkrechtem Einfalle durch alle im Einklange stehenden Aethertheilchen der ganzen Parallelogrammfläche hervorgebracht wird. Das Quadrat derselben liefert die Intensität J des Lichtes bei senkrechtem Durchfalle *). Für jede andere durch die Winkel P_1 und Q_1 bestimmte Richtung ist also die mit z_1^2 proportionale Intensität i im Punkte *M*:

---

*) Die Dynamik beweist, dass wenn die Ursache der Erschütterung plötzlich aufhört, eine kugelförmige Welle von constanter Dicke fortschreitet. Nach dem Gesetze der Erhaltung der lebendigen Kräfte muss nun Smv^2, welches diessmal proportional ist mit $r^2 a^2$, wo r die Entfernung vom Centrum, a die Amplitude vorstellt, constant sein. Es ist aber auch erfahrungsgemäss $r^2 . J$ constant, also ist J proportional mit a^2.

$$i = J\left(\frac{\sin\frac{\pi P\cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P\cos P_1}{\lambda}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\pi Q\cos Q_1}{\lambda}}{\frac{\pi Q\cos Q_1}{\lambda}}\right)^2.$$

Um die dieser Formel entsprechende Beugungserscheinung objectiv auf einer durch M parallel mit der Ebene des Parallelogrammes aufgestellten Bildtafel a priori zu construiren, bemerke man, dass z. B. der Ausdruck $P\cos P_1$ auch noch anders dargestellt werden kann. Zieht man nemlich durch den Punkt M der Bildtafel nach dem Mittelpunkte des Parallelogrammes eine Gerade, deren Länge $=\varepsilon$, so stellt $\varepsilon\cos P_1$ die Projection von ε auf P oder eine mit P parallele Gerade vor. Diese Parallele wollen wir durch die Projection O des Mittelpunktes des Parallelogrammes auf die Ebene der Bildtafel innerhalb der letzteren gezogen denken (Taf. II. Fig. 3_a). Alsdann stellt $ON = p$ direct den Ausdruck $\varepsilon\cos P_1$, oder die Projection von ε auf die Richtung von P dar. Wenn nun $P\cos P_1 = \frac{Pp}{\varepsilon}$ einer ganzen Anzahl von Wellenlängen gleichkommt, so verschwindet immer der Ausdruck

$$\frac{\sin\frac{\pi P\cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P\cos P_1}{\lambda}} = \frac{\sin\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}},$$

ausgenommen für $\cos P_1 = 0$ oder $p = ON = 0$, wo er den Werth 1 erhält. — Es sei also $\frac{Pp}{\varepsilon} = n\lambda$; alsdann verschwindet der fragliche Factor für alle Punkte der Geraden MN, weil alle denselben Werth von $p = NO$ liefern, d. h. die Gerade MN ist eine dunkele Linie. Ein ähnliches Verhalten zeigt der andere Factor von i, welcher entsprechend in $\left(\frac{\sin\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}\right)^2$ umgewandelt werden kann.

Wir haben also folgende Construction der Beugungserscheinung. Durch die Projection O des kleinen Parallelogrammes auf die Bildtafel ziehe man senkrecht gegen die Seiten P und Q des Parallelogrammes die Geraden $O\gamma$ und Oc (Taf. II. Fig. 4.); zu $O\gamma$ parallel in gegenseitigen Entfernungen $= \frac{\varepsilon\lambda}{P}$ die Geraden aa', bb', cc', ... dd', ee', ff' ...., und zu Oc parallel in gegenseitigen

Entfernungen $=\frac{\varepsilon\lambda}{Q}$ die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ .... $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$.... Diese geben die dunkelen Linien, das Gerippe des ganzen Phänomenes an. Die Intensitäten in den Zwischenfeldern werden alsdann durch die Werthe der Factoren

$$\left(\frac{\sin\frac{\pi P p}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi P p}{\lambda\varepsilon}}\right)^2, \quad \left(\frac{\sin\frac{p Q q}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Q q}{\lambda\varepsilon}}\right)^2$$

bestimmt. Sie fallen um so geringer aus, je grösser p und q sind, d. h. je weiter das Feld sich vom Centrum O entfernt. — Die Abstände $\frac{\varepsilon\lambda}{P}$, $\frac{\varepsilon\lambda}{Q}$ der gegen P und Q senkrechten Parallelen sind mit den Seiten P, Q umgekehrt, mit ε direct proportional; je weiter man also die Bildtafel hinter dem Parallelogramme aufstellt, desto mehr breitet sich die ganze Erscheinung als Durchschnitt einer Pyramide mit jener Ebene aus.

Es ist klar, dass man durch Abmessen des senkrechten Abstandes d z. B. der beiden mittleren Streifen dd', aa' die Grösse $2p$ erhält, so dass also die Wellenlänge aus der Gleichung $\frac{d}{2}=\frac{\varepsilon\lambda}{P}$ berechnet werden kann.

Anmerkung. Gewöhnlich misst man die Wellenlänge vermittelst des Winkels, welchen die von der Mitte des Parallelogrammes senkrecht auf zwei dunkele Streifen, z. B. ff' und cc' gezogenen Geraden mit einander bilden. Ist dieser Winkel $=\mu$, so ist

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{6\varepsilon\lambda:P}{\varepsilon}=6\frac{\lambda}{P}, \quad \text{also } \lambda=\frac{\mu}{6}.P.$$

Man befestigt desshalb das Parallelogramm mittelst einer Kapsel vor das Objectiv eines Theodolitfernrohrs und bringt dessen Achse zuerst in diejenige dunkele Ebene, welche durch das Parallelogramm und die Linie ff' geht, wo alsdann das Fadenkreuz die dunkele Linie ff' trifft; dann stellt man dasselbe in die dunkele Linie cc' ein und liest den Winkel beider Ebenen ab. Wenn auch bei dieser Procedur die auf der Ebene des Parallelogrammes befindlichen Aethertheilchen nicht mehr in gleicher Phase stehen, so ist diess doch mit denjenigen der Fall, welche in der Projection desselben auf eine durch seinen Mittelpunkt senkrecht gegen die Richtung der einfallenden Strahlen geführte Ebene liegen, und diese Projection, welche wegen der Kleinheit der Verrückung μ dem ursprünglichen Parallelogramme gleich gesetzt werden kann,

wird dabei als eigentliche Lichtquelle betrachtet. Jedenfalls ist es leicht, die aus der Verrückung μ nothwendige kleine Correction der letzten Gleichung abzuleiten.

III. Wirkung eines Dreieckes.

Schiebt man das Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 5.), dessen Seiten $AB = P$, $AC = Q$, $BC = R$, längs seiner Basis C um die kleine Strecke n weiter in die Lage $\alpha\beta\gamma$, so ist wieder wie früher

$$\begin{aligned}&\text{Wirkung von } ABC - \text{Wirkung von } \alpha\beta\gamma\\ &= \text{Wirkung von } A\beta - \text{Wirkung von } A\gamma,\end{aligned}$$

d. h. wenn man die Wirkung des Dreieckes $ABC = z_2 \sin(w - \gamma_2)$ setzt, und die Winkel, welche die von dem Punkte A nach M gezogene Gerade mit den drei Seiten P, Q, R bildet, P_1, Q_1, R_1 genannt werden:

$$\begin{aligned}&z_2 \sin(w - \gamma_2) - z_2 \sin\left(w - \gamma_2 - \frac{2\pi n \cos R_1}{\lambda}\right)\\ &= nP \sin B.\alpha \frac{\sin\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}} \sin\left(w - \frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}\right)\\ &- nQ \sin C.\alpha \frac{\sin\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}}{\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}} \sin\left(w - \frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

wobei zur Berechnung der Einflüsse der schmalen Streifen $A\beta$, $A\gamma$ die Formel (W) in I. benutzt wurde. Setzt man in der letzten Gleichung beiderseits die Quadrate der Amplituden gleich, zu deren Bildung man die letzte Formel aus (3) rechterhand anwendet, so erhält man:

$$\begin{aligned}z_2^2 = \frac{(\frac{1}{2} PR \sin B.\alpha)^2}{\left(\frac{\pi R \cos R_1}{\lambda}\right)^2} \Bigg[&\left(\frac{\sin\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}}{\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}}\right)^2\\ &- 2\frac{\sin\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}}{\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda}} \frac{\sin\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}}{\frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}} \cos\left(\frac{\pi P \cos P_1}{\lambda} - \frac{\pi Q \cos Q_1}{\lambda}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Um diese Formel für die Intensität in M zu vereinfachen, denken wir uns das Dreieck ABC auf die durch M gehende Bildfläche projicirt und zugleich die Seite Q in ihrer eigenen Verlängerung rückwärts aufgetragen, die Seite R aber, deren positive Richtung von B nach C ging, zu sich selbst parallel nach A versetzt, so dass die drei so erhaltenen Linien drei einander im Gleichgewicht haltende Kräfte vorstellen. Die Grösse $\cos R_1$ ist alsdann durch $\frac{A'N}{\varepsilon} = \frac{r}{\varepsilon}$ dargestellt. (Taf. II. Fig. 1.). Nennen wir ferner von jetzt an Q_1 den Winkel, den ε mit der Rückwärtsverlängerung von Q bildet, um die positiven Richtungen von P, Q, R mit den in Taf. II. Fig. 5. angedeuteten Pfeilen in Uebereinstimmung zu bringen, so dass in obiger Formel $-\cos Q_1$ oder $-\frac{q}{\varepsilon}$ an die Stelle von $\cos Q_1$ treten muss, so ist nach 1):

$$Pp + Qq + Rr = 0.$$

Mit den entsprechenden Abänderungen geht nun die Intensitätsformel über in

$$i = \frac{J}{\left(\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon} + \frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right)^2}\left[\left(\frac{\sin\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}\right)^2 - 2\left(\frac{\sin\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}\right)\cos\left(\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon} + \frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right)\right].$$

Die Discussion dieser Formel ergibt kurz folgende Hauptumstände: Für $p=0$, $q=0$, d. h. wenn M in die Projection A' des kleinen Dreieckes fällt, ist i, obgleich von unbestimmter Form $\frac{0}{0}$, $=J$. Ferner kann i nur verschwinden, wenn $\sin\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}$ und $\sin\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}$ gleichzeitig $=0$, d. h. $p = m.\frac{\lambda\varepsilon}{P}$, $q = m'.\frac{\lambda\varepsilon}{Q}$ sind, was augenblicklich erhellet, wenn man sich $\frac{\sin\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}$, $\frac{\sin\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}$ als zwei Seiten eines Dreieckes denkt, welche einen Winkel $\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon} + \frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}$ einschliessen; i stellt alsdann das Quadrat der dritten Seite,

multiplicirt mit $\dfrac{J}{\left(\dfrac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}+\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right)^2}$ vor. Diese dritte Seite kann aber nur verschwinden: 1) wenn die einschliessenden Seiten $=0$ sind; 2) wenn die beiden ersten Seiten gleich und der eingeschlossene Winkel $=0$, d. h. $Pp+Qq=0$ ist, wodurch sich die Bedingung über die Gleichheit der Seiten

$$\frac{\sin\dfrac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}{\dfrac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}}=\frac{\sin\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}$$

von selbst befriedigt. Die Gleichung $Pp+Qq=0$ zieht aber nach sich $Rr=0$, d. h. man befindet sich alsdann auf einer durch A' senkrecht gegen R gezogenen Geraden, welcher Fall keine weitere Betrachtung, als etwa derjenige, wo $Pp=0$ ist, verdient.

Betrachten wir also den ersten Fall, um die ganze Erscheinung auf der Bildtafel zu construiren. Senkrecht gegen die drei Seiten P, Q, R ziehe man durch die Projection A' des Dreieckes auf die Bildtafel die drei Geraden $A'\pi$, $A'\varkappa$, $A'\varrho$ (Taf. II. Fig. 6.) und zu diesen parallel in gegenseitigen Abständen $=\dfrac{\lambda\varepsilon}{P}$, $\dfrac{\lambda\varepsilon}{Q}$, $\dfrac{\lambda\varepsilon}{R}$ die Systeme von Geraden aa', bb', cc'...., dd', ee', ff'...., gg', hh'...., deren je drei sich in einem Punkte schneiden, wegen $Pp+Qq+Rr=0$. Da nun die dunkelen Punkte blos da sein können, wo gleichzeitig

$$\frac{\pi Pp}{\lambda\varepsilon}=m\pi,\quad \frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}=m'\pi,$$

d. h. wo drei Gerade sich schneiden, so haben wir nicht wie beim Parallelogramm dunkele Streifen, sondern nur dunkele, auf Geraden senkrecht gegen die Seiten gruppirte Punkte *). Betrachten wir noch insbesondere diejenigen Geraden $A\pi$, $A\varkappa$, $A\varrho$, welche durch A' senkrecht gegen P, Q, R laufen, z. B. diejenige, deren Gleichung $p=0$ ist. Für diese Voraussetzung verwandelt sich die Intensitätsformel in:

$$i=\frac{J}{\left(\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right)^2}\left[\left(\frac{\sin\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}{\dfrac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}}-\cos\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right)^2+\sin^2\frac{\pi Qq}{\lambda\varepsilon}\right].$$

---

*) Dieselben sind, um sie besser hervortreten zu machen, in der Figur mit kleinen Kreisen umgeben worden.

Dieser Ausdruck kann nie verschwinden, weil sonst die beiden letzten Quadrate gleichzeitig $=0$ sein müssten, was, da der Fall $p=0$, $q=0$ schon früher ausgeschlossen war, auf $\sin^2=\cos^2=0$ hinauslaufen würde. Es ergibt sich mithin, dass die dunkelen Punkte durch drei auf den Seiten des Dreieckes senkrechte Strassen durchbrochen werden, auf welchen die Intensität niemals ganz erlischt, wie in den übrigen auf P, Q, R senkrechten Geraden. Sie bilden den sechsseitigen Stern, welchen man zuerst bei Betrachtung des Spectrums gewahrt.

IV. Wirkung einer geraden Reihe gleicher und homologer Oeffnungen.

Wir werden finden, dass das von einer Oeffnung gelieferte Grundphänomen durch die Zusammenstellung mehrerer ihr gleicher Oeffnungen mit parallelen gleichnamigen Seiten zu einer geraden Reihe nicht geändert wird, sondern dass dasselbe sich nur mit parallelen dunkelen Streifen durchzieht, welche senkrecht auf der Verbindungslinie der gleichnamigen Ecken stehen. Es seien z. B. lauter Dreiecke zu einer Reihe $ABC\ldots$. (Taf. II. Fig. 7.) zusammengestellt und der ganze Effect $=z_1\sin(w-\gamma)$; schiebt man das ganze System $AB\ldots.E$ um die Distanz $\varDelta=AB$ weiter längs AE, so kommt jede der Figuren A, B, $C\ldots$. an die Stelle der nachfolgenden, E kommt nach E'. Es erhellt alsdann wieder, dass

$$\text{Wirkung von } A\ldots.E-\text{Wirkung von } B\ldots.E'=\text{Wirkung von } A-\text{Wirkung von } E'$$

sei. Setzt man nun die Wirkung der Figur $A=z\sin w$, so erhält man folgende Gleichung, in welcher n die Anzahl der Oeffnungen $A\ldots.E$, $\varDelta'$ den Winkel zwischen $A\ldots.E$ und der Richtung AM bezeichnet:

$$z_1\sin(w-\gamma)-z_1\sin\left(w-\gamma-\frac{2\pi\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\right)$$
$$=z\sin w-z\sin\left(w-\frac{2\pi.n\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\right),$$

oder

$$z_1\sin\frac{\pi\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\sin\left(w-\gamma-\frac{\pi\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\right)$$
$$=z\sin\frac{n\pi\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\sin\left(w-\frac{n\pi\varDelta\cos\varDelta'}{\lambda}\right).$$

Mithin ist

$$z_1 = z \frac{\sin \frac{n\pi\Delta \cos \Delta'}{\lambda}}{\sin \frac{\pi\Delta \cos \Delta'}{\lambda}}$$

oder, wenn i die durch die Figur A, i' die durch die ganze Reihe $A \ldots . E$ bewirkte Intensität vorstellt:

$$i' = i \frac{\sin \frac{n\pi\Delta \cos \Delta'}{\lambda}}{\sin \frac{\pi\Delta \cos \Delta'}{\lambda}}.$$

So oft nun i verschwindet, ist auch $i' = 0$, d. h. das Grundphänomen bleibt dasselbe, ausserdem ist dasselbe aber durch einen anderen Factor modificirt, welcher, wenn δ die Projection des Strahles AM auf die Richtung $A \ldots . E$ vorstellt, leicht in

$$\frac{\sin \frac{n\pi\Delta\delta}{\lambda\varepsilon}}{\sin \frac{\pi\Delta\delta}{\lambda\varepsilon}}$$

verwandelt wird. Ist also wieder A' die Projection der gegen die Entfernung ε sowohl, als gegen das sich kegelförmig ausbreitende Spectrum verschwindenden Oeffnungen $A \ldots . E$ auf die Bildfläche, so zeichne man, um die durch das Verschwinden des zweiten Factors verursachten dunkelen Streifen zu construiren, solche senkrecht gegen die Richtung AE, und zwar in gegenseitigen Entfernungen $\delta = \frac{\lambda\varepsilon}{n\Delta}$, lasse jedoch sowohl den durch A' gehenden, als auch sonst je den $n$ten Streifen aus, indem für $\delta = 0, \pm \frac{n\lambda\varepsilon}{n\Delta}, \pm \frac{2n\lambda\varepsilon}{n\Delta}, \ldots$ Zähler und Nenner des fraglichen Faktors gleichzeitig verschwinden, derselbe aber den Werth n^2 erhält, so dass also an der Stelle des $n$ten Streifens, von der Mitte an gezählt, jedesmal ein Streifen von n^2facher Intensität wie bei einer einzigen Oeffnung entsteht. Für $n = 4$ gibt Taf. II. Fig. 8. ein Bild dieser Streifen.

V. Wirkung einer zu einem Parallelogramme zusammengestellten Doppelreihe gleicher und homologer Oeffnungen.

Die Gesammtheit aller beugenden Oeffnungen ist für diesen Fall zu betrachten als eine Reihe von Figuren, deren jede selbst

eine zusammengesetzte Figur $AA'A''$ bildet (Taf. II. Fig. 9.). Setzt man also $AA' = D$, $AB = \varDelta$, so finden wir leicht:

$$i' = i\left(\frac{\sin\frac{m\pi Dd}{\lambda\varepsilon}}{\sin\frac{\pi Dd}{\lambda\varepsilon}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{n\pi\varDelta\delta}{\lambda\varepsilon}}{\sin\frac{\pi\varDelta\delta}{\lambda\varepsilon}}\right)^2.$$

Es wird also jetzt die durch die Figur A allein hervorgebrachte Erscheinung durch zwei sich durchkreuzende, auf den Richtungen AE, AA'' senkrechte Systeme von Streifen durchschnitten, welche mit den in IV. betrachteten übereinstimmen.

XII.

Der Satz von Cotes, auf die Ellipse erweitert.

Von

dem Herausgeber.

Es scheint mir sehr bemerkenswerth zu sein, dass das berühmte Theorem von Cotes sich auf die Ellipse erweitern lässt, und namentlich dürfte die Leichtigkeit merkwürdig sein, mit der dies in sehr eleganter Weise möglich ist, wenn man die Sache einmal aus dem richtigen Gesichtspunkte aufgefasst hat.

Die Anomalie eines beliebigen Punktes P einer mit den Halbaxen a, b beschriebenen Ellipse sei u, und $f, 0$ seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes O in der Axe $2a$ dieser Ellipse.

Ueber der Axe $2a$ als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, und bezeichne den, dem Punkte P der Ellipse entsprechenden Punkt dieses Kreises, nämlich den Punkt des letzteren, in welchem derselbe von der nöthigenfalls gehörig verlängerten Ordinate des Punktes P auf derselben Seite der Axe $2a$, auf welcher der Punkt P liegt, geschnitten wird, durch P'. Die von dem Punkte O nach den Punkten P und P' gezogenen Geraden OP und OP' bezeichne man respective durch r und r'.

Dies vorausgesetzt, sind nun die Coordinaten der Punkte P und P' respective $a\cos u$, $b\sin u$ und $a\cos u$, $a\sin u$; und nach einer bekannten Grundformel der analytischen Geometrie ist folglich:

$$r^2=(f-a\cos u)^2+b^2\sin u^2,$$

$$r'^2=(f-a\cos u)^2+a^2\sin u^2;$$

woraus mittelst Subtraction sogleich

$$r'^2-r^2=(a^2-b^2)\sin u^2$$

folgt. Die Gleichung der durch die Punkte O und P der Lage nach bestimmten Geraden ist

$$y=-\frac{b\sin u}{f-a\cos u}(x-f),$$

und die Gleichung des, dieser Geraden parallelen Halbmessers der Ellipse ist folglich

$$y=-\frac{b\sin u}{f-a\cos u}x.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Halbmessers mit der Ellipse durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2=1,\quad \mathfrak{y}=-\frac{b\sin u}{f-a\cos u}\mathfrak{x};$$

woraus mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander leicht erhalten wird:

$$\mathfrak{x}=\pm\frac{a(f-a\cos u)}{\sqrt{(f-a\cos u)^2+a^2\sin u^2}},$$

$$\mathfrak{y}=\mp\frac{ab\sin u}{\sqrt{(f-a\cos u)^2+a^2\sin u^2}};$$

oder:

$$\mathfrak{x}=\pm\frac{a(f-a\cos u)}{\sqrt{f^2-2af\cos u+a^2}},$$

$$\mathfrak{y}=\mp\frac{ab\sin u}{\sqrt{f^2-2af\cos u+a^2}}.$$

Bezeichnen wir den, der durch die Punkte O und P der Lage nach bestimmten Geraden parallelen Halbmesser der Ellipse selbst durch R, so ist:

$$R=\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$R=\frac{a\sqrt{(f-a\cos u)^2+b^2\sin u^2}}{\sqrt{(f-a\cos u)^2+a^2\sin u^2}}$$

oder

$$R=\frac{a\sqrt{(f-a\cos u)^2+b^2\sin u^2}}{\sqrt{f^2-2af\cos u+a^2}},$$

also, wenn man die oben für r und r' gefundenen Ausdrücke einführt:

$$R=a\frac{r}{r'},\quad \text{also } r'=a\frac{r}{R}.$$

Von dieser bemerkenswerthen Formel lässt sich nun die folgende Anwendung machen.

Mit Beziehung auf Taf. III. Fig. 1. sei in der Axe $2a$ unserer Ellipse oder in deren Verlängerung ein beliebiger Punkt O angenommen und über der Axe $2a$ als Durchmesser, wie die Figur zeigt, ein Kreis beschrieben. Die Peripherie dieses Kreises theile man, wie ebenfalls aus der Figur ersichtlich ist, in den Punkten

$$A_0,\ A_1',\ A_2',\ldots.\ A_{n-1}',\ A_n,\ A_{n+1}',\ldots.\ A_{2n-2}',\ A_{2n-1}'$$

in $2n$ gleiche Theile, und fälle von den dadurch erhaltenen Theilpunkten auf die Axe $2a$ der Ellipse Perpendikel, welche durch ihre Durchschnittspunkte mit der Ellipse auf dieser die Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots.\ A_{n-1},\ A_n,\ A_{n+1},\ldots.\ A_{2n-2},\ A_{2n-1}$$

bestimmen. Die von dem Punkte O nach den Punkten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots.\ A_{n-1},\ A_n,\ A_{n+1},\ldots.\ A_{2n-2},\ A_{2n-1}$$

gezogenen Geraden bezeichne man respective durch

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ldots.\ r_{n-1},\ r_n,\ r_{n+1},\ldots.\ r_{2n-2},\ r_{2n-1}$$

und die diesen Geraden parallelen Halbmesser der Ellipse respective durch

$$R_0,\ R_1,\ R_2, \ldots .\ R_{n-1},\ R_n,\ R_{n+1}, \ldots .\ R_{2n-2},\ R_{2n-1};$$

die von dem Punkte O nach den Punkten

$$A_0,\ A_1',\ A_2', \ldots .\ A_{n-1}',\ A_n,\ A_{n+1}', \ldots .\ A_{2n-2}',\ A_{2n-1}'$$

gezogenen Geraden mögen aber respective durch

$$r_0',\ r_1',\ r_2', \ldots .\ r_{n-1}',\ r_n',\ r_{n+1}', \ldots .\ r_{2n-2}',\ r_{2n-1}'$$

bezeichnet werden, wo natürlich $r_0' = r_0$, $r_n' = r_n$ ist. Dies vorausgesetzt, ist nach der oben bewiesenen Relation allgemein:

$$r_k' = a\frac{r_k}{R_k}.$$

Folglich ist:

$$r_1'r_3'r_5'r_7' \ldots . r_{2n-1}' = a^n \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_7}{R_7} \ldots . \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}};$$

nach dem Cotesischen Lehrsatze ist aber bekanntlich:

$$r_1'r_3'r_5'r_7' \ldots . r_{2n-1}' = \overline{CA_0}^n + \overline{CO}^n,$$

oder, weil

$$CA_0 = a, \quad CO = f$$

ist:

$$r_1'r_3'r_5'r_7' \ldots . r_{2n-1}' = a^n + f^n;$$

folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$a^n + f^n = a^n \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_7}{R_7} \ldots . \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}},$$

oder:

$$1 + \left(\frac{f}{a}\right)^n = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_7}{R_7} \ldots . \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}}.$$

Ferner ist nach der obigen allgemeinen Relation:

$$r_0'r_2'r_4'r_6' \ldots . r_{2n-2}' = a^n \cdot \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \ldots . \frac{r_{2n-2}}{R_{2n-2}};$$

nach dem Cotesischen Lehrsatze ist aber bekanntlich:

$$r_0'r_2'r_4'r_6' \ldots . r_{2n-2}' = \pm(\overline{CA_0}^n - \overline{CO}^n)$$

oder

$$r_0'r_2'r_4'r_6' \ldots r_{2n-2}' = \pm(a^n - f^n),$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb des über der Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreises liegt; folglich ist:

$$\pm(a^n - f^n) = a^n \cdot \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \ldots \frac{r_{2n-2}}{R_{2n-2}}$$

oder

$$\pm\left\{1 - \left(\frac{f}{a}\right)^n\right\} = \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \ldots \frac{r_{2n-2}}{R_{2n-2}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb der Ellipse liegt.

Geht die Ellipse in einen Kreis über, so sind die Halbmesser

$$R_0,\ R_1,\ R_2, \ldots R_{n-1},\ R_n,\ R_{n+1}, \ldots R_{2n-2},\ R_{2n-1}$$

sämmtlich einander gleich, nämlich alle gleich der Grösse a, woraus erhellet, dass im Falle des Kreises die beiden obigen Gleichungen

$$1 + \left(\frac{f}{a}\right)^n = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_7}{R_7} \ldots \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}},$$

$$\pm\left\{1 - \left(\frac{f}{a}\right)^n\right\} = \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \ldots \frac{r_{2n-2}}{R_{2n-2}}$$

wieder in die Gleichungen des Cotesischen Satzes übergehen.

Dass für alle über derselben Axe $2a$ beschriebenen Ellipsen und denselben Punkt O die beiden Producte

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_7}{R_7} \ldots \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \ldots \frac{r_{2n-2}}{R_{2n-2}},$$

natürlich unter Voraussetzung desselben n, constante Grössen sind, geht aus den obigen Gleichungen von selbst hervor, ist aber jedenfalls eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Ellipse.

XIII.

Der Satz des Ptolemäus, auf die Ellipse erweitert.

Von

dem Herausgeber.

Es sei $A_0A_1A_2A_3$ ein beliebiges, in eine Ellipse beschriebenes Viereck; die Anomalien der Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

sollen respective durch

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3$$

und die Seiten und Diagonalen

$$A_0A_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad A_3A_0;\quad A_0A_2,\quad A_1A_3$$

sollen durch

$$s_{0,1},\quad s_{1,2},\quad s_{2,3},\quad s_{3,0};\quad s_{0,2},\quad s_{1,3};$$

die diesen Seiten und Diagonalen parallelen Halbmesser aber durch

$$r_{0,1},\quad r_{1,2},\quad r_{2,3},\quad r_{3,0};\quad r_{0,2},\quad r_{1,3}$$

bezeichnet werden.

Dies vorausgesetzt, haben wir nach den in der Abhandlung Nr. II. bewiesenen Formeln *) die folgenden Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_2);$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1),\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_0);$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{0,2}}{r_{0,2}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0),\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{1,3}}{r_{1,3}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1).$$

---

*) M. s. S. 14. und S. 41.

Also ist

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\cdot\frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\cdot\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}\right)$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_0),$$

und folglich nach einer bekannten Zerlegung:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\cdot\frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\cdot\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}\right)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3)-\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3)$$

$$+\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3)-\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3),$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\cdot\frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\cdot\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}\right)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3)-\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3).$$

Ferner ist nach den obigen Formeln:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{s_{0,2}}{r_{0,2}}\cdot\frac{s_{1,3}}{r_{1,3}}=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1),$$

also nach einer ähnlichen Zerlegung:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s_{0,2}}{r_{0,2}}\cdot\frac{s_{1,3}}{r_{1,3}}=\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3)-\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3).$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhält man auf der Stelle die folgende merkwürdige Gleichung:

$$\frac{s_{0,1}}{r_{0,1}}\cdot\frac{s_{2,3}}{r_{2,3}}+\frac{s_{1,2}}{r_{1,2}}\cdot\frac{s_{3,0}}{r_{3,0}}=\frac{s_{0,2}}{r_{0,2}}\cdot\frac{s_{1,3}}{r_{1,3}}$$

oder:

$$\frac{A_0A_1}{r_{0,1}}\cdot\frac{A_2A_3}{r_{2,3}}+\frac{A_1A_2}{r_{1,2}}\cdot\frac{A_3A_0}{r_{3,0}}=\frac{A_0A_2}{r_{0,2}}\cdot\frac{A_1A_3}{r_{1,3}},$$

wo, wie aus dem Obigen bekannt ist,

$$r_{0,1},\ r_{1,2},\ r_{2,3},\ r_{3,0};\ r_{0,2},\ r_{1,3}$$

die den Seiten und Diagonalen

$$A_0A_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_0;\ A_0A_2,\ A_1A_3$$

des in die Ellipse beschriebenen Vierecks $A_0A_1A_2A_3$ parallelen Halbmesser der Ellipse sind.

Für den Kreis sind diese Halbmesser sämmtlich einander gleich, und die obige Gleichung geht daher in diesem Falle in die Gleichung

$$A_0A_1 \,.\, A_2A_3 + A_1A_2 \,.\, A_3A_0 = A_0A_2 \,.\, A_1A_3$$

über, welches bekanntlich die Gleichung des Ptolemäischen Satzes ist, den folglich der obige elegante Satz von der Ellipse als einen besonderen Fall enthält.

Anmerkung.

Man kann noch manche Sätze vom Kreise auf ähnliche Art auf die Ellipse erweitern, was ausführlicher zu erläutern zu weit führen würde, und im Ganzen, nachdem ich hauptsächlich in dem Aufsatze Nr. II. die dazu nöthigen Formeln entwickelt habe, auch keiner besonderen Schwierigkeit mehr unterliegt. Beispielsweise mag indess noch Folgendes bemerkt werden.

Wenn wir die Winkel des vorher betrachteten, in die Ellipse beschriebenen Vierecks $A_0A_1A_2A_3$ durch A_0, A_1, A_2, A_3 bezeichnen, so ist nach der Abhandlung Nr. II. S. 12.:

$$\sin A_0{}^2$$

$$=\frac{a^2b^2\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)^2}{\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2\}\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_0)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_0)^2\}}.$$

Nach S. 14. ist aber:

$$r_{0,1}{}^2 = a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2,$$

$$r_{3,0}{}^2 = a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_0)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_0)^2;$$

also ist offenbar:

$$\sin A_0 = \frac{ab}{r_{0,1}\,r_{3,0}}\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1);$$

und ganz eben so ist:

$$\sin A_2 = \frac{ab}{r_{1,2}\,r_{2,3}}\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1).$$

Also ist:

$$\frac{\sin A_0}{\sin A_2} = \frac{r_{1,2}\,r_{2,3}}{r_{0,1}\,r_{3,0}}.$$

Beim Kreise sind die Halbmesser sämmtlich einander gleich, also

$$\frac{\sin A_0}{\sin A_2}=1 \quad \text{oder} \quad \sin A_0=\sin A_2,$$

wie bekannt, weil bei'm Kreise $A_0+A_2=180^0$ ist.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher ist:

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_3}=\frac{r_{2,3}\,r_{3,0}}{r_{0,1}\,r_{1,2}},$$

also:

$$\frac{\sin A_0}{\sin A_2}\cdot\frac{\sin A_1}{\sin A_3}=\left(\frac{r_{2,3}}{r_{0,1}}\right)^2,$$

und mehrere dergleichen Relationen würden sich leicht finden lassen.

Noch ein anderes Beispiel einer solchen Erweiterung bietet der bekannte Satz dar, dass die Summen der Gegenseiten eines ſeden dem Kreise umschriebenen Vierecks einander gleich sind.

Sind die vier Punkte, in denen eine Ellipse von den vier Seiten eines um dieselbe beschriebenen Vierecks berührt wird, durch die Anomalien u_0, u_1, u_2, u_3 bestimmt, und bezeichnen wir die vier Seiten dieses Vierecks durch s_0, s_1, s_2, s_3, die denselben parallelen Halbmesser der Ellipse aber durch r_0, r_1, r_2, r_3; so ist, mit Rücksicht auf Taf. III. Fig. 2., nach den in der Abhandlung Nr. II. für die verschiedenen hier zur Betrachtung kommenden Fälle bewiesenen Formeln:

$$s_0=-\frac{r_0\sin\frac{1}{2}(u_3-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_0)}$$

$$s_1=\frac{r_1\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)},$$

$$s_2=\frac{r_2\sin\frac{1}{2}(u_3-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)},$$

$$s_3=-\frac{r_3\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}{\cos\frac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)};$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_2}{r_2}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)\frac{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_0)-\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_2)},$$

$$\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_3}{r_3}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\frac{\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)}.$$

Mittelst bekannter Zerlegungen erhält man aber zuvörderst leicht:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)-\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(u_1-2u_0+u_3)-\cos\tfrac{1}{2}(u_3-2u_2+u_1)\},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0),$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-2u_3+u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_2-2u_1+u_0)\};$$

und hieraus ferner:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)-\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3).$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_2}{r_2}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)},$$

$$\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_3}{r_3}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2-u_3)}{\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_2)};$$

woraus sich die sehr merkwürdige Relation

$$\frac{s_0}{r_0}+\frac{s_2}{r_2}=\frac{s_1}{r_1}+\frac{s_3}{r_3}$$

ergiebt.

Bei'm Kreise sind alle Halbmesser einander gleich, also:

$$s_0+s_2=s_1+s_3,$$

wie bekannt.

XIV.

Rein geometrische Auflösung der Aufgabe von der Dreitheilung des Winkels.

Von

Herrn *J. Tietz*,

Gymnasiallehrer zu Konitz in Westpreussen.

Aufgabe. Einen gegebenen Bogen in drei gleiche Theile zu theilen.

Es sei abg^4 (Taf. III. Fig. 3.) der zu theilende Bogen und c_2g^4 der dritte Theil desselben. Zieht man alsdann durch den Halbirungspunkt b des Bogens abg^4 und durch den Mittelpunkt c des Kreises die Gerade cb, zieht ferner durch a den Durchmesser ag und dann gg^4, so ist cb parallel gg^4, weil $\angle agg^4 = \angle acb$. Zieht man ferner durch c_2 die Geraden cg_2 und gb_2, so ist

$$\angle c_2gg^4 = \tfrac{1}{2}\angle cgc_2 = \tfrac{1}{2}\angle cc_2g,$$

daher

$$\angle c_2g_2g = \angle c_2gg_2 = \angle c_2b_2c = \angle c_2cb_2,$$

mithin

$$c_2g = c_2g_2 \text{ und } c_2b_2 = c_2c, \text{ d. h. } cg_2 = gb_2.$$

Um daher die vorstehende Aufgabe zu lösen, kommt es darauf an, zwei Gerade cg_2 und gb_2 so zwischen den Parallelen cb und gg^4 einzutragen, dass sie einander gleich sind und ihr Schnittpunkt in den Bogen abg^4 fällt; oder, was dasselbe ist, für den Punkt c_2 einen geometrischen Ort zu konstruiren unter der Bedingung, dass, wenn man c_2g und cc_2 zieht und diese letztere bis gg^4 verlängert, dass dann $c_2g = c_2g_2$.

Hiezu gelangen wir auf folgende Weise. Es sei abg^4 (Taf. III. Fig. 4.) der zu theilende Bogen, so ziehe man, wie vorhin, den

Durchmesser ag, die Gerade gg^4 und dazu die Parallele cb; trage alsdann zwischen diesen Parallelen, von c und g aus, die Geraden

$$cg_1 = cg_3 = gb_1 = gb_3$$

ein: so schneiden sich cg_1 und gb_1 in c_1, cg_3 und gb_3 in c_3, und es sind cg_1gb_3 und cb_1gg_3 und auch cc_1gc_3 Parallelogramme, welche den gemeinschaftlichen Mittelpunkt m haben, wenn nämlich $cm = mg$ ist. Mithin ist, wie man leicht sieht,

$$\angle c_1gg_1 = \angle c_1g_1g \text{ und } \angle c_3gg_3 = \angle c_3g_3g,$$

folglich

$$c_1g = c_1g_1 \text{ und } c_3g = c_3g_3.$$

Trägt man ferner

$$cg_2 = cg_4 = gb_2 = gb_4$$

ein, so ist auch für die beiden Schnittpunkte c_2 und c_4

$$c_2g = c_2g_2 \text{ und } c_4g = c_4g_4.$$

Wenn endlich

$$cg^1 = cg^2 = gb^1 = gb^2,$$

kleiner als cg, eingetragen werden, so ist auch für die beiden Schnittpunkte c^1 und c^2

$$c^1g = c^1g^1 \text{ und } c^2g = c^2g^2.$$

Folglich erfüllen die Schnittpunkte c_1, c_2, c^1 und c_3, c_4, c^2 alle die Bedingung des zur Lösung unserer Aufgabe gesuchten geometrischen Ortes; und wenn man beliebig viele Punkte auf die angegebene Weise konstruirt, so erhält man eine Curve, welche der oben gesuchte geometrische Ort ist. Diese Curve besteht, wie man sieht, aus zwei von einander getrennten Theilen, die aber vollständig symmetrisch sind in Bezug auf mp und mq, wenn nämlich mp parallel cb ist und mq senkrecht steht auf mp. Dass c und g selbst in dem gesuchten geometrischen Orte liegen, sieht man, wenn $cg^4 = gb^4 = cg$ eingetragen wird.

Um also die gestellte Aufgabe zu lösen, konstruire man nach dem Vorhergehenden die beiden Theile c^1cc_1 und c_4gc^2 (Taf. III. Fig. 3) unserer Curve, so ist c_2g^4, wenn die Curve den gegebenen Kreis in c_2 schneidet, der dritte Theil des Bogens abg^4; denn es ist $c_2g = c_2g_2$, folglich

$$\angle c_2gg_2 = \tfrac{1}{2}\angle cc_2g = \tfrac{1}{2}\angle cgc_2,$$

und daher

$$\angle c_2gg^4 = \tfrac{1}{3}\angle cgg^4 \text{ oder Bog. } c_2g^4 = \tfrac{1}{3} \text{ Bog. } abg^4.$$

Und wenn c_2d senkrecht steht auf cb, so ist

$$\text{Bog. } ad = \text{Bog. } dc_2 = \text{Bog. } c_2g^4.$$

Ferner ist Bog. c_3gg^4 der dritte Theil des Bogens ang^4, wenn nämlich c_3 der Punkt ist, in welchem der zweite Theil unserer Curve den gegebenen Kreis ausser in g schneidet; denn es ist $c_3g = c_3g_3$, mithin

$$\angle c_3gg_3 = \tfrac{1}{2}\angle cc_3g = \tfrac{1}{2}\angle cgc_3,$$

folglich

$$\angle c_3gg_3 = \tfrac{1}{3}\angle cgg_3;$$

weil aber $\angle c_3gg_3 = \angle c_3cn$ und $\angle cgg_3 = \angle gcb = \angle acn = \angle ncg^4$, so ist

$$\angle c_3cn = \tfrac{1}{3}\angle acn = \tfrac{1}{3}\angle ncg^4.$$

Fallt man daher c_3h senkrecht auf nc, so ist

$$\text{Bog. } nh = \text{Bog. } nc_3 = \tfrac{1}{2}\text{ Bog. } c_3gg^4 = \tfrac{1}{2}\text{ Bog. } ac^3h,$$

d. h.

$$\text{Bog. } ac^3h = \text{Bog. } hnc_3 = \text{Bog. } c_3gg^4.$$

Es bestimmt mithin der Punkt c_3 den dritten Theil desjenigen Bogens, der den gegebenen Bogen abg^4 zu 360° ergänzt.

Endlich ist der vierte Schnittpunkt c^3 nicht ohne Bedeutung für die Aufgabe. Es ist nämlich, wenn man für den Augenblick $\angle ncg = \angle cgg^4 = \alpha$, $\angle ncc^3 = \angle c^3b^3c = \angle b^3gg^4 = \beta$ und $\angle cc^3b^3 = \angle cgb^3 = \gamma$ setzt, $2\gamma + \alpha + \beta = 2R$ und $\gamma = \beta - \alpha$, folglich $\beta = \tfrac{1}{3}(2R + \alpha)$, d. h. $\angle ncc^3 = \tfrac{1}{3}(2R + \angle acb)$ oder Bog. $c^3hn = \tfrac{1}{3}$ Bog. abg^4n. Hierzu addirt Bog. $nc_3g^4 =$ Bog. nc^3a giebt:

$$\text{Bog. } c^3ng^4 = \tfrac{1}{3}(\text{Bog. } abg^4n + 3.\text{Bog. } ac^3n)$$
$$= \tfrac{1}{3}(\text{Bog. } abg^4 + 4.\text{Bog. } ac^3n);$$

weil aber $2.$Bog. $ac^3n = p -$ Bog. abg^4, so ist endlich Bog. $c^3ng^4 = \tfrac{1}{3}(2p -$ Bog. $abg^4)$, wenn nämlich p die ganze Peripherie bezeichnet.

Die gestellte Aufgabe ist somit vollständig gelöst und wir fügen nur noch folgende Bemerkungen hinzu. Ist der gegebene Bogen abg^4 gleich dem Halbkreise, so fallen (Taf. III. Fig. 4.) die Punkte c_1, c_2 u. s. w. und c_3, c_4 u. s. w. alle in die Gerade mp, und der zur Lösung der Aufgabe bestimmte geometrische Ort ist für diesen speziellen Fall die Gerade mp. — Ist der zu theilende Bogen abg^4 (Taf. III. Fig. 5.) gleich einem Quadranten, und man trägt $cg = cg^4 = gb^4$ ein, so ist gb^4 eine Tangente, welche den gegebenen Kreis im Punkte g berührt; trägt man daher $cg_3 = gb_3$, grösser als cg, ein, so liegt der Schnittpunkt c_3 ausserhalb des Kreises; wird aber $cg^2 = gb^2$, kleiner als cg, eingetragen, so liegt auch der Schnittpunkt c^2 ausserhalb des Kreises, woraus man sieht, dass für $\angle acg^4 = R$ der zweite Theil unseres geometrischen Ortes mit dem Kreise nur den Punkt g gemeinschaftlich hat. Dies lässt sich auch aus den obigen Resultaten folgern; denn c_3

(Taf. III. Fig. 1.) bestimmte den dritten Theil des Bogens agg^4, wenn aber Bog. $abg^4 =$ Bog. $g^4g = \frac{1}{3}p$, so ist Bog. $g^4g = \frac{1}{3}$ Bog. agg^4, d. h. c_3 fällt mit g zusammen.

In dem mathematischen Wörterbuche von Klügel heisst es unter „Trisection des Winkels", dass Montucla der platonischen Schule folgende Lösung unseres Problems zuschreibt.

Um den Winkel $ncg = cgg^4$ (Taf. III. Fig. 3.) in drei gleiche Theile zu theilen, kommt es darauf an, nc zu verlängern und dann die Gerade gb_2 so zu ziehen, dass c_2b_2 gleich dem Radius wird. Wie aber der Punkt c_2 gefunden wird, davon findet man nichts. Kries schreibt dies Verfahren, zur Lösung des Problems zu gelangen, dem Archimedes zu. — Folgendes Mittel zur Lösung unseres Problems wird in Klügel's Wörterbuch von Campanus angeführt, wovon jedoch behauptet wird, dass eine rein geometrische Lösung nicht ausführbar sei. Wenn nämlich $\angle ncg = \angle cgg^4$ (Taf. III. Fig. 3.) der zu theilende Winkel und cu senkrecht auf nb steht, so kommt es darauf an, den Punkt c_2 so zu bestimmen, dass $cc_2 = c_2z$. — Dass diese beiden Lösungen durch die unsrige gegeben, sieht man auf den ersten Blick.

Jetzt wollen wir zum Schluss noch nachweisen, dass der oben zur Lösung des Problems benutzte geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel ist, wie sie nach Klügel auch die analytische Lösung ergiebt. Wenn nämlich c und c_1 (Taf. III. Fig. 6.) Punkte unserer Curve sind, und man zieht cc_1, so ist $cm_1 = c_1p_1$ (wenn nämlich wiederum $cm = mg$, mp parallel cb_2 und mq senkrecht auf mp ist); denn es ist $\angle c_1cb_1 = \angle ncq$, und da $\angle c_1cb_1 = \angle qcm_1$, so ist $\angle ncq = \angle qcm_1$, und daher $m_1c = cn$. Ferner ist $\Delta\, cmn \cong \Delta\, gmn_1$, folglich $mn = mn_1$, deshalb aber $\angle np_3m = \angle mp_3n_1 = \angle c_1p_3p_1 = \angle c_1p_1p_3$, d. h. np_3 parallel cc_1, folglich cc_1p_3n ein Parallelogramm und daher $nc = c_1p_3$; weil aber $nc = m_1c$ und $c_1p_3 = c_1p_1$, so ist $m_1c = c_1p_1$, wie behauptet wurde. Dasselbe gilt für jeden andern Punkt c_2 unserer Curve, auch für den ist $m_2c = c_2p_2$. Ferner ist $mn : nq = mp_3 : cq$; wird nun c_1p_4 senkrecht gefällt auf mp, so ist $cq = p_3p_4$, und daher $mn : nq = mp_3 : p_3p_4$, folglich $mn + nq : mp_3 + p_3p_4 = mn : mp_3$ oder $mq : mp_4 = mn : mp_3 = nq : cq$; weil aber $nq = c_1p_4$, so ist $mq : mp_4 = c_1p_4 : cq$, d. h. $mq \,.\, cq = mp_4 \,.\, c_1p_4$. Ebenso findet man $mq \,.\, cq = mp_5 \,.\, c_2p_5$, und so für jeden anderen Punkt unserer Curve, woraus man sieht, dass dieselbe eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten mp und mq sind und deren Potenz $mq \,.\, cq$ ist.

Um daher den Winkel cgg^4 (Taf. III. Fig. 7.) in drei gleiche Theile zu theilen, halbire man cg in m, ziehe cq parallel gg^4 und fälle mq senkrecht auf cq; mache dann $qd = qc$, beschreibe über

$$F = \frac{h.\overline{A'A''}}{2\sin i}, \quad h = \frac{2F\sin i}{\overline{A'A''}};$$

also nach dem Obigen:

$$P = \tfrac{1}{3}(a + a' + a'').\frac{h'F\sin i}{\overline{A'A''}}.$$

Bezeichnen wir aber ferner den Winkel $A'A''B''$ durch α, so ist $h' = \overline{A'A''}.\sin\alpha$; folglich: $P = \frac{1}{3}(a + a' + a'')F\sin\alpha\sin i$. Für das gerade dreiseitige Prisma ist $\alpha = i = 90^0$; also $P = \frac{1}{3}(a + a' + a'')F$, wie oben.

Demonstratio theorematis Fermatii. (Vid. Tom. XXVII. p. 116.)

Auct. Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengn.

Lemma. Eadem hypothesi atque in theoremate facta, est (Taf. I. Fig. 9.):

$$\overline{FG^2} = 2AF \times BG.$$

Quia ΔACF simile est Δ^0 CEH et ΔBDG Δ^0 DEH, habemus

$$AF : AC = CH : EG, \quad BG : AC = DH : EH$$

vel

$$AF \times BG : AC \times BG = CH \times DH : DH \times EH,$$

$$BG \times AC : \overline{AC^2} \qquad = DH \times EH : \overline{EH^2}$$

et ex aequo

$$AF \times BG : \overline{AC^2} = CH \times DH : EH^2.$$

Quia est $CH = AK$, $DH = BK$, evadit

$$CH \times DH = \overline{EK^2}, \quad AF \times BG : \overline{AC^2} = \overline{EK^2} : \overline{EH^2}.$$

Triangula vero similia EFG, ECD dant

$$EK : EH = FG : CD \text{ (vel } AB\text{)},$$

unde

$$AF \times BG : \overline{AC^2} = \overline{FG^2} : \overline{AB^2}$$

vel alternando

$$AF \times BG : \overline{FG^2} = \overline{AC^2} : \overline{AB^2} = 1 : 2,$$

quia per hyp. $\overline{AB^2} = 2\overline{AC^2}$. q. e. d.

Jam facillima est theorematis demonstratio. Secundum Eucl. (II. 4.) est

$$\overline{AB^2} = AG^2 + \overline{BG^2} + 2AG \times BG.$$

Quum vero sit

$$AG = AF + FG, \quad \overline{BG^2} + 2BG \times FG = \overline{BF^2} - \overline{FG^2},$$

evadit

$$\overline{AB^2} = \overline{AG^2} + \overline{BF^2} - \overline{FG^2} + 2AF \times BG$$

vel vi lemmatis

$$\overline{AB^2} = \overline{AG^2} + \overline{BF^2}. \quad \text{q. e. d.}$$

XVI.

Die orthogonale Transversale und die Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen für die gemeine Cycloide, wenn die einfallenden Strahlen der Axe derselben parallel sind, und für die logarithmische Spirale, wenn die einfallenden Strahlen vom Pol derselben ausgehen.

Von

Herrn *Friedrich Gauss*,

Candidaten der Mathematik zu Greifswald.

---

§. 1.

Wenn

$$\varphi(x_1, y_1)=0, \quad f(x, y)=0$$

die Gleichungen resp. einer zurückwerfenden Curve und der orthogonalen Transversale der einfallenden Strahlen sind, so findet man die Gleichung

$$F(x', y')=0$$

der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen leicht auf folgende Art. Die Gleichungen der Normalen der beiden orthogonalen Transversalen für die dem Einfallspunkte (x_1, y_1) entsprechenden Punkte (x, y) und (x', y') sind bekanntlich

$$u-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(t-x), \quad u-y'=-\frac{\partial x'}{\partial y'}(t-x');$$

folglich ist, da sie auch durch den Punkt (x_1, y_1) gehen,

$$x_1-x+(y_1-y)\frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x_1-x'+(y_1-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}=0. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die trigonometrischen Tangenten der von den Normalen der orthogonalen Transversale der einfallenden Strahlen, der zurückwerfenden Curve und der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen für die einander entsprechenden Punkte (x, y), (x_1, y_1), (x', y') mit dem positiven Theile der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel sind offenbar

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}, \quad -\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{y'-y_1}{x'-x_1}.$$

Folglich sind, wie leicht erhellet, die Quadrate der trigonometrischen Tangenten des Einfalls- und des Reflexionswinkels:

$$\left\{\frac{\frac{y-y_1}{x-x_1}+\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}{1-\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}\right\}^2, \quad \left\{\frac{\frac{y'-y_1}{x'-x_1}+\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}{1-\frac{y'-y_1}{x'-x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}\right\}^2.$$

Bezeichnet man diese Winkel durch φ und φ', so findet man nach der Formel

$$\sin\alpha^2 = \frac{\tang\alpha^2}{1+\tang\alpha^2}$$

leicht:

$$\sin\varphi^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 \cdot \frac{\{x-x_1+(y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\}^2}{\{1+\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2\}\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}},$$

$$\sin\varphi'^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 \cdot \frac{\{x'-x_1+(y'-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\}^2}{\{1+\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2\}\{(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2\}}.$$

Folglich ist nach dem Gesetze der Zurückwerfung:

$$\frac{\{x-x_1+(y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\}^2}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \frac{\{x'-x_1+(y'-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\}^2}{(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2}. \quad (3)$$

Die Nenner der Grössen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind offenbar die Quadrate der Längen des einfallenden und des zurückgeworfenen Strahls, vom Einfallspunkte bis zu den betreffenden orthogonalen Transversalen gerechnet. Bezeichnet man diese Grössen durch r^2 und r'^2, so findet man durch Differentiation nach x_1:

$$r\frac{\partial r}{\partial x_1}=(x-x_1)\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}-1\right)+(y-y_1)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right);$$

$$r'\frac{\partial r'}{\partial x_1}=(x'-x_1)\left(\frac{\partial x'}{\partial x_1}-1\right)+(y'-y_1)\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right);$$

d. i. nach (1) und (2):

$$r\frac{\partial r}{\partial x_1}=-\left\{x-x_1+(y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right\},$$

$$r'\frac{\partial r'}{\partial x_1}=-\left\{x'-x_1+(y'-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right\}.$$

Dies mit (3) verbunden giebt:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2=\left(\frac{\partial r'}{\partial x_1}\right)^2,$$

also ist

$$\partial r=\pm\,\partial r'.$$

Mithin ergiebt sich durch Integration

$$r=\pm(r'+C).$$

Die willkürliche constante Grösse C, welche in der Gleichung zwischen r und r' auftritt, zeigt an, dass es unendlich viele orthogonale Transversalen der zurückgeworfenen Strahlen giebt. Setzen wir $C=0$, so ergiebt sich folgender Satz:

Werden Strahlen von einer beliebigen Curve zurückgeworfen, so entspricht jeder orthogonalen Transversale der einfallenden Strahlen jederzeit eine orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen von solcher Beschaffenheit, dass für jeden Punkt der zurückwerfenden Curve die Längen des einfallenden und zurückgeworfenen Strahls, vom Einfallspunkte bis zu den entsprechenden orthogonalen Transversalen gerechnet, einander gleich sind.

Dieser Satz lässt sich auch also aussprechen:

Werden Strahlen von einer beliebigen Curve zurückgeworfen, so ist die einhüllende Curve aller Kreise, welche eine beliebig angenommene orthogonale Transversale der einfallenden Strahlen berühren und deren Mittelpunkte auf der zurückwerfenden Curve liegen, eine orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen.

Ein ähnlicher Satz lässt sich eben so leicht für den Fall der Brechung beweisen.

Für $C=0$ erhalten wir statt der Gleichung (3) die beiden Gleichungen

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2,$$

$$x-x_1+(y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=x'-x_1+(y'-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1};$$

d. i.

$$x^2+y^2-2(xx_1+yy_1)=x'^2+y'^2-2(x'x_1+y'y_1), \quad (4)$$

$$x-x'+(y-y')\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Um nun die Gleichung der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen zu erhalten, hat man aus den Gleichungen

$$f(x, y)=0, \quad \varphi(x_1, y_1)=0$$

nnd den Gleichungen (1), (4), (5) die Grössen x, y, x_1, y_1 zu eliminiren.

Da die Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen von diesen berührt wird, so ist sie die Evolute der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen, und lässt sich also nach der Theorie der Evolution ohne Schwierigkeit finden.

§. 2.

I. Es sei die Basis einer gemeinen Cycloide die Abscissenaxe, indem man die positiven Abscissen nach derselben Richtung hin nimmt, nach welcher sich der erzeugende Kreis hin bewegt, und die Axe der Cycloide der positive Theil der Ordinatenaxe. Bezeichnet ferner φ den Wälzungswinkel und r den Radius des erzeugenden Kreises, so sind bekanntlich

$$x_1=r(\varphi-\pi-\sin\varphi), \quad y_1=r(1-\cos\varphi) \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichungen der Cycloide. Für der Axe der Cycloide parallel einfallende Strahlen ist offenbar jede sie senkrecht schneidende gerade Linie eine orthogonale Transversale dieser Strahlen. Nehmen wir als solche die, die Cycloide im Scheitel berührende gerade Linie, so ist deren Gleichung

$$y=2r,$$

und die dem Punkte (x_1, y_1) der Cycloide entsprechende Abscisse $= x_1$. Wir erhalten also nach den Gleichungen (4) und (5) des vorigen Paragraphen:

$$x_1^2 + (2r)^2 - 2(x_1^2 + 2ry_1) = x'^2 + y'^2 - 2(x'x_1 + y'y_1),$$

$$(x' - x_1)\partial x_1 + (y' - 2r)\partial y_1 = 0$$

oder

$$4r(r - y_1) = (x' - x_1)^2 + y'^2 - 2y'y_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(x' - x_1)\partial x_1 = -(y' - 2r)\partial y_1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

aus denen wir mit Hilfe der Gleichungen (1) x_1 und y_1 eliminiren müssen, um die Gleichung einer orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen zu erhalten. Aus (1) erhalten wir durch Differentiation:

$$\partial x_1 = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi, \quad \partial y_1 = r\sin\varphi\partial\varphi.$$

Setzen wir diese Werthe und die Werthe von x_1 und y_1 in die Gleichungen (2) und (3), so erhalten wir:

$$4r^2\cos\varphi = \{x' - r(\varphi - \pi - \sin\varphi)\}^2 + y'^2 - 2ry'(1 - \cos\varphi), \quad (4)$$

$$\{x' - r(\varphi - \pi - \sin\varphi)\}(1 - \cos\varphi) = -(y' - 2r)\sin\varphi. \quad . \quad (5)$$

Nehmen wir aus der Gleichung (5) den Werth von $x' - r(\varphi - \pi - \sin\varphi)$ und setzen ihn in die Gleichung (4), so wird

$$4r^2\cos\varphi(1-\cos\varphi)^2 = (y'-2r)^2\sin\varphi^2 + y'^2(1-\cos\varphi)^2 - 2ry'(1-\cos\varphi)^3.$$

Hieraus ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$y'^2 - ry(3 + \cos\varphi^2) = -2r^2(1 + \cos\varphi^2),$$

oder, wenn wir das Quadrat auf der linken Seite des Gleichheitszeichens vervollständigen,

$$\{y_1 - \tfrac{1}{2}r(3 + \cos\varphi^2)\}^2 = \tfrac{1}{4}r^2(1 - \cos\varphi^2)^2,$$

und hieraus:

$$y_1 - \tfrac{1}{2}r(3 + \cos\varphi^2) = \pm \tfrac{1}{2}r(1 - \cos\varphi^2).$$

Nehmen wir in dieser Gleichung das obere Zeichen, so ergäbe sich $y' = 2r$, d. i. die Gleichung der orthogonalen Transversale der einfallenden Strahlen. Es ist daher das untere Zeichen zu nehmen, und wir erhalten demnach:

$$y' = r(1 + \cos\varphi^2) = \tfrac{1}{2}r(3 + \cos 2\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der Gleichung (5), so ergiebt sich leicht:

$$x' = r(\varphi - \pi + \sin\varphi\cos\varphi) = r(\varphi - \pi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi). \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzen wir jetzt $2\varphi = \pi + \psi$, also $\varphi - \pi = \frac{1}{2}(\psi - \pi)$, $\sin 2\varphi = -\sin\psi$, $\cos 2\varphi = -\cos\psi$ und $r + y'$ für y', so nehmen die Gleichungen (7) und (6) folgende Gestalt an:

$$x' = \tfrac{1}{2}r(\psi - \pi - \sin\psi), \quad y' = \tfrac{1}{2}r(1 - \cos\psi). \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieraus ergiebt sich folgender merkwürdiger Satz:

Wirft eine gemeine Cycloide ihrer Axe parallele Strahlen zurück, so giebt es immer eine orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen, die wieder eine gemeine Cycloide ist, deren Axe und Scheitel mit der Axe und dem Scheitel der zurückwerfenden Cycloide zusammenfallen, die aber durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius halb so gross als der Radius des die zurückwerfende Cycloide erzeugenden Kreises ist.

Man kann diesen Satz, mit Rücksicht auf den zweiten im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satz auch folgendermassen ausdrücken:

Die einhüllende Curve aller Kreise, welche die durch den Scheitel einer gemeinen Cycloide an diese gezogene Tangente berühren, und deren Mittelpunkte auf dieser Cycloide liegen, ist wieder eine gemeine Cycloide, deren Axe und Scheitel mit der Axe und dem Scheitel jener zusammenfallen, die aber durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius halb so gross als der Radius des jene Cycloide erzeugenden Kreises ist.

II. Nach der Theorie der Evolution ist die Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen der geometrische Ort der Krümmungs-Mittelpunkte der orthogonalen Transversale. Es ist daher, wenn wir die rechtwinkligen Coordinaten der Brennlinie durch x, y bezeichnen,

$$x = x' - \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2\right\}\frac{\partial y'}{\partial x'}}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}},$$

$$y = y' + \frac{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}};$$

oder, wenn wir x' und y' als Functionen einer dritten Variabeln φ betrachten,

$$x = x' - \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial x' \partial^2 y' - \partial y' \partial^2 x'} . \partial y', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$y = y' + \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial x' \partial^2 y' - \partial y' \partial^2 x'} . \partial x'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Durch Differentiation von (7) und (6) erhalten wir:

$$\partial x' = r(1 + \cos 2\varphi)\partial\varphi, \quad \partial y' = - r \sin 2\varphi \partial\varphi;$$

$$\partial^2 x' = - 2r \sin 2\varphi \partial\varphi^2, \quad \partial^2 y' = - 2r \cos 2\varphi \partial\varphi^2;$$

und hieraus:

$$\partial x'^2 + \partial y'^2 = 2r^2(1 + \cos 2\varphi)\partial\varphi^2,$$

$$\partial x' \partial^2 y' - \partial y' \partial^2 x' = - 2r^2(1 + \cos 2\varphi)\partial\varphi^3.$$

Substituiren wir diese Werthe und die Werthe von (7) und (6) in die Gleichungen (9) und (10), so wird

$$x = \tfrac{1}{2}r(2\varphi - 2\pi - \sin 2\varphi), \quad y = \tfrac{1}{2}r(1 - \cos 2\varphi). \; . \; . \; (11)$$

Setzen wir $2\varphi = 2\pi + \chi$, so ist $2(\varphi - \pi) = \chi$, $\sin 2\varphi = \sin\chi$, $\cos 2\varphi = \cos\chi$, und unsere Gleichungen nehmen folgende Gestalt an:

$$x = \tfrac{1}{2}r(\chi - \sin\chi), \quad y = \tfrac{1}{2}r(1 - \cos\chi). \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dies führt zu folgendem merkwürdigem Satze:

Die Brennlinie der von einer gemeinen Cycloide zurückgeworfenen Strahlen für der Axe derselben parallele einfallende Strahlen ist wieder eine gemeine Cycloide, deren Basis und Anfangspunkt der Bewegung mit der Basis und dem Anfangspunkte der Bewegung der zurückwerfenden Cycloide zusammenfallen, die aber von einem Kreise erzeugt ist, dessen Radius halb so gross als der Radius des die zurückwerfende Cycloide erzeugenden Kreises ist.

III. Bezeichnen wir die Länge des zurückgeworfenen Strahls vom Einfallspunkte bis zur Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen durch R, so ist bekanntlich

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

d. i., wenn wir die Werthe von x, y, x_1, y_1 einführen,

$$R^2 = r^2\{(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)^2 + (\cos\varphi - \cos\varphi^2)^2\}$$
$$= r^2(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= y^2,$$

also

$$R = y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Dies Resultat führt uns zu folgendem Satze:

Wenn eine gemeine Cycloide ihrer Axe parallele Strahlen zurückwirft, so ist die Länge jedes zurückgeworfenen Strahls vom Einfallspunkt bis zur Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen gleich der Länge des entsprechenden einfallenden Strahls vom Einfallspunkt bis zur Basis der zurückwerfenden Cycloide.

Den obigen Satz über die orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen kann man auch folgendermassen aussprechen:

Wenn eine gemeine Cycloide ihrer Axe parallele Strahlen zurückwirft, so ist die Länge jedes zurückgeworfenen Strahls vom Einfallspunkt bis zur orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen gleich der Entfernung des Einfallspunktes von der durch den Scheitel an die Cycloide gezogenen Tangente.

Aus diesen beiden letzteren Sätzen folgt wieder folgender Satz:

Wenn eine gemeine Cycloide ihrer Axe parallele Strahlen zurückwirft, so ist die Summe der Länge des zurückgeworfenen Strahls vom Einfallspunkt bis zur Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen und der Länge des zurückgeworfenen Strahls vom Einfallspunkt bis zur orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen einer constanten Grösse, nämlich dem Durchmesser des die zurückwerfende Cycloide erzeugenden Kreises gleich.

Die beiden letztern Sätze gelten natürlich nur für die orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen, deren Gleichung wir oben unter I. gefunden haben.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass, wie leicht zu erweisen ist, die einhüllende Curve der Verbindungslinien des beschreibenden Punktes mit dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises eben unsere unter II. bestimmte Brennlinie ist. Daher fallen jene Verbindungslinien mit den zurückgeworfenen Strahlen zusammen.

§. 3.

I. Die logarithmische Spirale ist bekanntlich eine Curve von solcher Beschaffenheit, dass sich die Logarithmen der Radien Vectoren, in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol, verhalten wie die zugehörigen Polarwinkel, oder dass das Verhältniss des Logarithmus des Radius Vector zum zugehörigen Polarwinkel ein constantes ist. Bezeichnet a' dieses constante Verhältniss und v_1 und φ_1 die polaren Coordinaten, so haben wir also als Gleichung der logarithmischen Spirale:

$$\overset{b}{\log} v_1 = a'\varphi_1.$$

Setzen wir $\overset{b}{\log} v_1 = m \ln v_1$, wo unter dem Logarithmen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der natürliche mit der Basis e zu verstehen ist und m den Modulus des Logarithmensystems mit der Basis b bezeichnet, und $a' = ma$, so nimmt obige Gleichung folgende Gestalt an:

$$\ln v_1 = a\varphi_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder

$$v_1 = e^{a\varphi_1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nun sei der Pol der Anfang rechtwinkliger Coordinaten und die feste Axe, auf welche die Polarwinkel sich beziehen, der positive Theil der Abscissenaxe, und es werde der positive Theil der Ordinatenaxe so angenommen, dass man, um vom positiven Theile der Abscissenaxe durch den Coordinatenwinkel hindurch zum positiven Theile der Ordinatenaxe zu gelangen, sich nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die positiven Polarwinkel genommen werden.

Wenn nun die logarithmische Spirale von ihrem Pol ausgehende Strahlen zurückwirft, so ist jeder aus dem Pol als Mittelpunkt mit beliebigem Radius beschriebene Kreis eine orthogonale Transversale der einfallenden Strahlen. Setzen wir diesen Radius $=0$, so haben wir, um die Gleichung der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen zu erhalten, in den Gleichungen (4) und (5) des §. 1. $x=0$, $y=0$ zu setzen. Dies giebt

$$x'^2 + y'^2 = 2(x'x_1 + y'y_1), \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$x'\partial x_1 + y'\partial y_1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es ist aber

$$x_1 = v_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = v_1 \sin \varphi_1;$$

also

$$\partial x_1 = \cos \varphi_1 \partial v_1 - v_1 \sin \varphi_1 \partial \varphi_1,$$

$$\partial y_1 = \sin \varphi_1 \partial v_1 + v_1 \cos \varphi_1 \partial \varphi_1;$$

d. i., da $v_1 = e^{a\varphi_1}$, $\partial v_1 = a e^{a\varphi_1} \partial \varphi_1 = a v_1 \partial \varphi_1$ ist:

$$\partial x_1 = v_1 (a \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1) \partial \varphi_1,$$

$$\partial y_1 = v_1 (a \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1) \partial \varphi_1.$$

Bezeichnen wir ferner die polaren Coordinaten der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen durch v' und φ', so ist

$$x' = v' \cos \varphi', \quad y' = v' \sin \varphi'.$$

Die Gleichungen (3) und (4) erhalten demnach folgende Gestalt:

$$v' = 2v_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi' + \sin \varphi_1 \sin \varphi') = 2v_1 \cos(\varphi_1 - \varphi') \quad (5)$$

und

$$\cos \varphi' (a \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1) + \sin \varphi' (a \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1) = 0$$

oder

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi' - \cos \varphi_1 \sin \varphi' = a(\cos \varphi_1 \cos \varphi' + \sin \varphi_1 \sin \varphi')$$

oder

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi') = a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hieraus ergiebt sich, da nach (5) $\cos(\varphi_1 - \varphi')$ positiv ist,

$$\cos(\varphi_1 - \varphi') = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

folglich ist nach (5)

$$v' = \frac{2v_1}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ferner ergiebt sich aus (6)

$$\varphi_1 - \varphi' = k\pi + \operatorname{Arctang} a,$$

wo k eine gewisse positive oder negative ganze Zahl und Arctang a den kleinsten zu $\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi')$ gehörigen Bogen bedeutet. Da aber $\cos(\varphi_1 - \varphi')$ stets positiv ist, also $\varphi_1 - \varphi'$ im ersten oder vierten Quadranten sich endigen muss, so muss k eine gerade Zahl sein. Wir wollen daher

$$\varphi_1 - \varphi' = 2k\pi + \operatorname{Arctang} a$$

schreiben, wo k eine gewisse positive oder negative, gerade oder ungerade ganze Zahl bedeutet. Es ist also

$$\varphi_1 = \varphi' + 2k\pi + \text{Arctang}\, a,$$

$$v_1 = e^{a(\varphi' + 2k\pi + \text{Arctang}\, a)}.$$

Dieser Werth in (7) eingeführt giebt:

$$v' = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot e^{a(\varphi' + 2k\pi + \text{Arctang}\, a)} \quad \ldots \quad (8)$$

als polare Gleichung der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen. Nehmen wir nun die Polarwinkel ψ unter Beibehaltung desselben Pols in Bezug auf eine feste Axe, deren Lage in Bezug auf die primitive feste Axe durch den Winkel

$$\alpha = -2k\pi - \text{Arctang}\, a + \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}$$

bestimmt wird, so ist

$$\varphi' = \alpha + \psi = \psi - 2k\pi - \text{Arctang}\, a + \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}.$$

In Bezug auf das secundäre System erhält daher die Gleichung (8) folgende Gestalt:

$$v' = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot e^{a\psi + \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}}$$

oder

$$v' = e^{a\psi}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Hieraus ergiebt sich folgender merkwürdiger Satz:

Wirft eine logarithmische Spirale von ihrem Pole ausgehende Strahlen zurück, so giebt es immer eine orthogonale Transversale der zurückgeworfenen Strahlen, welche eine der zurückwerfenden gleiche, nur eine andere Lage habende logarithmische Spirale mit demselben Pol ist.

Diesen Satz kann man auch, in Rücksicht auf den zweiten im §. 1. ausgesprochenen Satz, folgendermassen aussprechen:

Die einhüllende Curve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer logarithmischen Spirale liegen und deren Peripherien durch den Pol derselben gehen, ist eine, jener gleiche, nur eine andere Lage habende logarithmische Spirale mit demselben Pol.

II. Bezeichnen x, y und x', y' die rechtwinkligen Coordinaten der Brennlinie und der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen in Bezug auf unser jetziges Coordinatensystem, d. i. in Bezug auf die jetzige feste Axe als positiven Theil der Abscissenaxe, so ist

$$x' = v' \cos\psi, \quad y' = v' \sin\psi,$$

und, wenn v und φ die polaren Coordinaten der Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen in Bezug auf unser jetziges System bezeichnen,

$$x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi.$$

Wir erhalten, wenn wir in Bezug auf ψ als unabhängige Variable differentiiren,

$$\partial x' = \cos\psi\partial v' - v'\sin\psi\partial\psi,$$

$$\partial y' = \sin\psi\partial v' + v'\cos\psi\partial\psi;$$

$$\partial^2 x' = \cos\psi\partial^2 v' - 2\sin\psi\partial v'\partial\psi - v'\cos\psi\partial\psi^2,$$

$$\partial^2 y' = \sin\psi\partial^2 v' + 2\cos\psi\partial v'\partial\psi - v'\sin\psi\partial\psi^2;$$

oder, da

$$\partial v' = ae^{a\psi}\partial\psi = av'\partial\psi,$$

$$\partial^2 v' = a^2 e^{a\psi}\partial\psi^2 = a^2 v'\partial\psi^2$$

ist,

$$\partial x' = (a\cos\psi - \sin\psi)v'\partial\psi,$$

$$\partial y' = (a\sin\psi + \cos\psi)v'\partial\psi;$$

$$\partial^2 x' = (a^2\cos\psi - 2a\sin\psi - \cos\psi)v'\partial\psi^2,$$

$$\partial^2 y' = (a^2\sin\psi + 2a\cos\psi - \sin\psi)v'\partial\psi^2.$$

Also ist

$$\partial x'^2 + \partial y'^2 = (a^2+1)v'^2\partial\psi^2,$$

$$\partial x'\partial^2 y' - \partial y'\partial^2 x' = (a^2+1)v'^2\partial\psi^3.$$

Wir erhalten also leicht nach §. 2. (9), (10):

$$v\cos\varphi = v'\cos\psi - v'(a\sin\psi + \cos\psi) = -av'\sin\psi, \quad (10)$$

$$v\sin\varphi = v'\sin\psi + v'(a\cos\psi - \sin\psi) = \quad av'\cos\psi. \quad (11)$$

Dividiren wir diese beiden Gleichungen durch einander, so bekommen wir

$$\cot g\varphi = -\tan g\psi$$

oder

$$\tan g(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \tan g(-\psi).$$

Hieraus ergiebt sich allgemein

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi = k'\pi - \psi, \quad \psi = k'\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$

wo k' eine gewisse positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Setzen wir den Werth von ψ in (10) oder (11), so erhalten wir

$$v = \pm av',$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem k' gerade oder ungerade ist. Nehmen wir nun a als positiv an (was uns offenbar gestattet ist, da wir in dem entgegengesetzten Falle in der Gleichung der gegebenen logarithmischen Spirale nur $-\varphi_1$ für φ_1 zu setzen, d. i. die Polarwinkel nach der entgegengesetzten Richtung zu nehmen brauchten, um den Factor von φ_1 positiv zu machen), so kann in obiger Gleichung nur das obere Zeichen gelten, also k' nur gerade sein, und wir haben daher unter dieser Voraussetzung

$$\psi = 2k'\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi), \quad v = av'$$

zu setzen, wo k' eine gewisse positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Wir erhalten also

$$v = ae^{a\psi} = ae^{a(2k'\pi - \frac{1}{2}\pi + \varphi)} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

als Gleichung der Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen. Nehmen wir jetzt wieder die Polarwinkel χ der Brennlinie in Bezug auf eine feste Axe, die in Bezug auf die zuletzt angenommene feste Axe durch den Winkel

$$\alpha' = \tfrac{1}{2}\pi - 2k'\pi - \frac{1}{a}\ln a$$

bestimmt wird, so ist

$$\varphi = \alpha' + \chi = \chi + \tfrac{1}{2}\pi - 2k'\pi - \frac{1}{a}\ln a.$$

Dadurch wird die Gleichung (12):

$$v = e^{a\chi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Dies giebt uns folgenden merkwürdigen Satz:

Die Brennlinie der von einer logarithmischen Spirale zurückgeworfenen Strahlen für vom Pol derselben ausgehende einfallende Strahlen ist eine, der zurück-

werfenden gleiche, nur eine andere Lage habende logarithmische Spirale mit demselben Pol *).

Die festen Axen, in Bezug auf welche die Polarwinkel ψ und χ der orthogonalen Transversale und der Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen genommen werden, werden in Bezug auf das primitive System bestimmt durch die Winkel

$$\alpha = -2k\pi - \text{Arctang}\, a + \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2},$$

$$\beta = \alpha + \alpha' = \tfrac{1}{2}\pi - 2(k+k')\pi - \text{Arctang}\, a + \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2a},$$

oder, was dasselbe ist, durch die Winkel

$$\alpha_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} - \text{Arctang}\, a,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2a} + \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arctang}\, a = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{2a} + \text{Arctang}\, a.$$

---

*) Dieser Satz ist bekanntlich schon von Jac. Bernoulli gefunden worden, was jedoch Herr G. nicht wusste; und seine Ableitung desselben ist durchaus eigenthümlich. D. H.

XVII.

Ueber eine von transcendenten Operationen nicht abhängende Formel zur Auflösung des irreduciblen Falls bei den cubischen Gleichungen.

Von

dem Herausgeber.

In seinen Werken Thl. I. S. 536. hat Jacob Bernoulli einige allgemeine, bloss algebraische Operationen in Anspruch nehmende Formeln zur Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades gegeben, welche sämmtlich aus einer in's Unendliche fortschreitenden Anzahl von Gliedern bestehen. Natürlich hat er keine dieser Formeln mit völliger Strenge gerechtfertigt. Ich sage „natürlich", weil die von Jacob Bernoulli gegebenen sogenannten Beweise dieser Formeln ganz der völlig ungenügenden Art und Weise entsprechen, wie man in älterer Zeit, — und auch leider nur noch zu häufig heutzutage, — dergleichen Dinge zu behandeln pflegte, wodurch meistens so gut wie nichts bewiesen, vielmehr Alles in Zweifel gelassen wurde. Denn bei allen dergleichen Untersuchungen kommt es darauf an, — was die ältere Behandlungsweise ganz bei Seite setzte, — streng zu zeigen, dass die Werthe der in Rede stehenden in's Unendliche fortschreitenden Ausdrücke sich einer bestimmten Gränze in der That immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man nur eine hinreichende Anzahl von Gliedern dieser Ausdrücke bei der Berechnung ihrer fortschreitenden Werthe benutzt, und dass diese Gränze die Grösse ist, deren Bestimmung die Aufgabe verlangte, also im vorliegenden Falle eine Wurzel der aufzulösenden Gleichung des dritten oder vierten Grades.

Eine genaue Untersuchung der sehr bemerkenswerthen, von Jacob Bernoulli gegebenen Ausdrücke hat mir gezeigt, dass sie in der Allgemeinheit, wie sie von ihrem berühmten Urheber aufgestellt werden, keineswegs gültig sind. Zugleich aber führte diese Untersuchung, deren Resultat, wie gesagt, zum Theil ein negatives war, und die ich daher hier vollständig mitzutheilen keineswegs die Absicht habe, zu dem Schlusse, dass gerade nur im sogenannten irreduciblen Falle bei den cubischen Gleichungen der in Rede stehende Bernoulli'sche Ausdruck wirklich eine Wurzel der Gleichung liefert, und zu deren Berechnung gebraucht werden kann. Weil ich diese, den irreduciblen Fall darstellende Formel für merkwürdig halte, werde ich die von mir über dieselbe angestellte Untersuchung im Folgenden mittheilen. Da diese Formel insofern algebraischer Natur ist, weil sie bei der Berechnung der Wurzel der cubischen Gleichung bloss einfache algebraische Operationen in Anspruch nimmt, freilich aber auch das Transcendente keineswegs verleugnet, indem sie aus einer in's Unendliche fortschreitenden Anzahl von Gliedern besteht, wie dies nicht anders sein kann, da die reellen Wurzeln der cubischen Gleichungen im irreduciblen Falle nun einmal transcendente Grössen sind, die auch eine kürzlich angeblich gegebene: „Endliche Lösung des dreihundertjährigen Problems“ nicht zu algebraischen Grössen zu machen im Stande gewesen ist; so wird man vielleicht die im Folgenden besprochene Jacob Bernoulli'sche Formel als einen freilich sehr bescheidenen Beitrag zu der Lösung dieses „dreihundertjährigen Problems“ zu betrachten geneigt sein *), wenn auch freilich hier eigentlich gar kein Problem mehr zu lösen ist, da ja die schönste, einfachste und zweckmässigste Lösung schon mittelst der Kreisfunctionen gegeben ist.

Unter der Voraussetzung, dass p und q zwei positive, nicht verschwindende Grössen bezeichnen, wollen wir die folgenden Grössen einer genaueren Betrachtung unterwerfen:

$$x_1 = \sqrt{p},$$
$$x_2 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_1)})},$$
$$x_3 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_2)})},$$
$$x_4 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_3)})},$$
u. s. w.
$$x_n = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_{n-1})})}.$$

Dass zuerst diese Grössen sämmtlich positiv sind, fällt auf der Stelle in die Augen.

---

*) Es möge hier auch wieder an die schöne Auflösung von Herrn T. Clausen in Thl. II. S. 446. erinnert werden.

Nun ist offenbar:

$$(x_n^2 \quad -p)^2 = p^2 + qx_{n-1},$$

$$(x_{n-1}^2 - p)^2 = p^2 + qx_{n-2};$$

also, wenn man subtrahirt:

$$(x_n^2 - p)^2 - (x_{n-1}^2 - p)^2 = q(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

und folglich durch Zerlegung der Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in Factoren auf gewöhnliche Weise:

$$(x_n^2 - x_{n-1}^2)(x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p) = q(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

oder ferner:

$$(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})(x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p) = q(x_{n-1} - x_{n-2});$$

folglich:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{q(x_{n-1} - x_{n-2})}{(x_n + x_{n-1})(x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p)}.$$

Weil

$$x_n^2 \quad = p + \sqrt{(p^2 + qx_{n-1})},$$

$$x_{n-1}^2 = p + \sqrt{(p^2 + qx_{n-2})}$$

ist, so ist

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p = \sqrt{(p^2 + qx_{n-1})} + \sqrt{(p^2 + qx_{n-2})},$$

folglich $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ eine positive Grösse.

Als besonderer Fall ist noch zu bemerken, dass

$$x_2^2 = p + \sqrt{(p^2 + qx_1)}, \quad x_1^2 = p;$$

folglich:

$$x_2^2 - x_1^2 = \sqrt{(p^2 + qx_1)},$$

und daher

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{(p^2 + qx_1)}}{x_2 + x_1}$$

oder

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{(p^2 + q\sqrt{p})}}{x_2 + x_1}$$

ist.

Weil

$$x_2^2 + x_1^2 - 2p = \sqrt{(p^2 + qx_1)} = \sqrt{(p^2 + q\sqrt{p})}$$

ist, so ist auch $x_2^2 + x_1^2 - 2p$ eine positive Grösse.

Hiernach haben wir jetzt die folgenden Gleichungen:

$$x_2-x_1 \quad =\frac{\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{x_2+x_1},$$

$$x_3-x_2 \quad =\frac{q(x_2-x_1)}{(x_3+x_2)(x_3{}^2+x_2{}^2-2p)},$$

$$x_4-x_3 \quad =\frac{q(x_3-x_2)}{(x_4+x_3)(x_4{}^2+x_3{}^2-2p)},$$

$$x_5-x_4 \quad =\frac{q(x_4-x_3)}{(x_5+x_4)(x_5{}^2+x_4{}^2-2p)},$$

u. s. w.

$$x_n-x_{n-1}=\frac{q(x_{n-1}-x_{n-2})}{(x_n+x_{n-1})(x_n{}^2+x_{n-1}{}^2-2p)};$$

aus denen durch Multiplication

$$x_n-x_{n-1}=\frac{q^{n-2}\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{\left\{\begin{array}{r}(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_5)\ldots.(x_{n-1}+x_n)\\ \times(x_2{}^2+x_3{}^2-2p)(x_3{}^2+x_4{}^2-2p)(x_4{}^2+x_5{}^2-2p)\ldots.\\ \ldots.(x_{n-1}{}^2+x_n{}^2-2p)\end{array}\right\}}$$

erhalten wird.

Aus dem Obigen geht unmittelbar hervor, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, und folglich auch x_n-x_{n-1} positiv, also $x_n>x_{n-1}$ ist, so dass die Grössen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ldots.$$

eine fortwährend wachsende Reihe bilden.

Nach dem Obigen ist

$$x_{n-1}{}^2+x_n{}^2-2p=\sqrt{(p^2+qx_{n-2})}+\sqrt{(p^2+qx_{n-1})},$$

also offenbar

$$x_{n-1}{}^2+x_n{}^2-2p>\sqrt{q}.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}}),$$

folglich nach dem Obigen:

$$x_n-x_{n-1}<\frac{q^{n-2}\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{\left\{\begin{array}{r}(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_5)\ldots.(x_{n-1}+x_n)\\ \times q^{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\ldots.\\ \ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})\end{array}\right\}}$$

oder:

$$x_n - x_{n-1}$$

$$< \frac{q^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{x_{n-1}+x_n} \cdot \frac{1}{\left\{\begin{array}{r}(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)\ldots.(x_{n-2}+x_{n-1})\\ \times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\\ \ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})\end{array}\right\}}.$$

Wegen der Formeln

$$x_{n-1} = \sqrt{(p+\sqrt{(p^2+qx_{n-2})})}, \quad x_n = \sqrt{(p+\sqrt{(p^2+qx_{n-1})})}$$

ist offenbar, wenn nur $n > 2$ ist, welche Voraussetzung wir im Folgenden stets festhalten wollen,

$$x_{n-1} > \sqrt{2p}, \quad x_n > \sqrt{2p};$$

also

$$x_{n-1} + x_n > 2\sqrt{2p},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$x_n - x_{n-1}$$

$$< \frac{q^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{2\sqrt{2p}} \cdot \frac{1}{\left\{\begin{array}{r}(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)\ldots.(x_{n-2}+x_{n-1})\\ \times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\\ \ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})\end{array}\right\}}.$$

Es ist nun

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)\ldots.(x_{n-2}+x_{n-1})$$

$$\times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})$$

$$= x_1x_2x_3\ldots.x_{n-2}.\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}.\sqrt{x_3}\ldots.\sqrt{x_{n-2}}$$

$$\times(1+\frac{x_2}{x_1})(1+\frac{x_3}{x_2})(1+\frac{x_4}{x_3})\ldots.(1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}})$$

$$\times(1+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}})(1+\sqrt{\frac{x_3}{x_2}})(1+\sqrt{\frac{x_4}{x_3}})\ldots.(1+\sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}}),$$

also, weil nach dem Obigen die Grössen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots.$$

eine stets wachsende Reihe bilden, daher die Grössen

$$\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_3}, \ldots. \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}; \quad \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \sqrt{\frac{x_3}{x_2}}, \sqrt{\frac{x_4}{x_3}}, \ldots. \sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}}$$

sämmtlich grösser als die Einheit sind:

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)\ldots.(x_{n-2}+x_{n-1})$$
$$\times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})$$
$$>2^{2(n-2)}.x_1x_2x_3\ldots.x_{n-2}.\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}.\sqrt{x_3}\ldots.\sqrt{x_{n-2}}$$

oder

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)\ldots.(x_{n-2}+x_{n-1})$$
$$\times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\ldots.(\sqrt{x_{n-2}}+\sqrt{x_{n-1}})$$
$$>2^{2(n-2)}.(x_1x_2x_3x_4\ldots.x_{n-2})^{\frac{3}{2}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$x_n-x_{n-1}<\frac{q^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{2^{2n-3}\sqrt{2p}.(x_1x_2x_3x_4\ldots.x_{n-2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil nach dem Obigen

$$x_1=\sqrt{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2p}=\frac{1}{\sqrt{2}}.(2p)^{\frac{1}{2}},\qquad x_2>(2p)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3>(2p)^{\frac{1}{2}},\quad x_4>(2p)^{\frac{1}{2}},\quad \text{u. s. w.},\quad x_{n-2}>(2p)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so ist

$$x_1x_2x_3x_4\ldots.x_{n-2}\underset{>}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}.(2p)^{\frac{n-2}{2}},$$

also

$$(x_1x_2x_3x_4\ldots.x_{n-2})^{\frac{3}{2}}\underset{>}{=}\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}.(2p)^{\frac{3(n-2)}{4}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$x_n-x_{n-1}<\frac{2^{\frac{3}{4}}.q^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{2^{2n-3}\sqrt{2p}.(2p)^{\frac{3(n-2)}{4}}},$$

oder

$$x_n-x_{n-1}<\frac{2^{\frac{3}{4}}.(q^2)^{\frac{n-2}{4}}\sqrt{(p^2+q\sqrt{p})}}{2^{2n-3}\sqrt{2p}.((2p)^3)^{\frac{n-2}{4}}},$$

oder

$$x_n - x_{n-1} < \frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{(p^2 + q\sqrt{p})}}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} \cdot \left\{ \frac{q^2}{(2p)^3} \right\}^{\frac{n-2}{4}}.$$

Haben wir nun die cubische Gleichung

$$x^3 = 2px + q,$$

wo jetzt p und q positive Grössen sein sollen, so wird der irreducible Fall bekanntlich durch die Bedingung

$$q^2 - \frac{4}{27} \cdot (2p)^3 < 0$$

charakterisirt, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle jedenfalls p positiv ist. Hätte man nun aber, q gleichfalls als positiv vorausgesetzt, die Gleichung

$$x^3 = 2px - q,$$

so würde dieselbe, wenn man $x = -y$ setzte, die Form

$$-y^3 = -2py - q \quad \text{oder} \quad y^3 = 2py + q$$

annehmen, woraus sich ergiebt, dass es genügt, in der Gleichung

$$x^3 = 2px + q$$

die Grössen p und q beide als positiv anzunehmen.

Da nun, dies vorausgesetzt, im irreducibleu Falle

$$q^2 < \frac{4}{27} \cdot (2p)^3, \quad q^2 < (2p)^3, \quad \frac{q^2}{(2p)^3} < 1$$

ist, so nähert sich, wenn n in's Unendliche wächst, offenbar

$$\frac{1}{2^{2n-3}} \cdot \left\{ \frac{q^2}{(2p)^3} \right\}^{\frac{n-2}{4}},$$

also auch

$$\frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{(p^2 + q\sqrt{p})}}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} \cdot \left\{ \frac{q^2}{(2p)^3} \right\}^{\frac{n-2}{4}},$$

folglich nach dem Obigen um so mehr $x_n - x_{n-1}$ der Null bis zu jedem beliebigen Grade; und da wir gesehen haben, dass, wenn n wächst, auch x_n wächst, diese Grösse sich folglich bei wachsendem n nicht der Null nähert, so nähert auch der Bruch

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, der Null bis zu jedem beliebigen Grade. Nach dem Obigen ist aber

$$x_n^2 = p + \sqrt{(p^2 + qx_{n-1})}, \quad \text{oder} \quad x_n^2 - p = \sqrt{(p^2 + qx_{n-1})},$$

also, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$x_n^4 - 2px_n^2 = qx_{n-1} \quad \text{oder} \quad x_n^3 - 2px_n = q\frac{x_{n-1}}{x_n},$$

welche Gleichung man leicht auf die Form

$$x_n^3 = 2px_n + q - q\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}$$

bringt. Nach dem vorher Bewiesenen wird man also offenbar n immer so gross annehmen können, dass die Gleichung $x_n^3 = 2px_n + q$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erfüllt ist, d. h., wenn x die eine reelle positive Wurzel bezeichnet, welche unter den gemachten Voraussetzungen, dass nämlich p und q positiv sind, die dem irreduciblen Falle angehörende Gleichung $x^3 = 2px + q$ bekanntlich jederzeit hat, so nähert sich bei in's Unendliche wachsendem n die Grösse x_n dieser Wurzel x als Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, oder es ist unter Voraussetzung eines in's Unendliche wachsenden n:

$$x = \text{Lim}\, x_n \quad \text{oder kürzer} \quad x = x_\infty.$$

Ueberlegt man nun aber, dass

$$x_1 = \sqrt{p},$$
$$x_2 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_1)})},$$
$$x_3 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_2)})},$$
$$x_4 = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + qx_3)})},$$
u. s. w.

ist, so kann man offenbar auch setzen:

$$x = \sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + q\sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + q\sqrt{(p + \ldots + q\sqrt{(p + \sqrt{(p^2 + q\sqrt{p})})})})\ldots)})})\ldots)},$$

welches die von Jacob Bernoulli gegebene Formel zur Auflösung des irreduciblen Falls ist, um deren strengen Beweis es sich hier handelte. Freilich schränkt Jacob Bernoulli diese Formel nicht auf den in Rede stehenden Fall ein, sondern misst ihr vielmehr allgemeine Gültigkeit bei, ohne übrigens nur einen einigermassen genügenden und der Natur der Sache entsprechenden Beweis zu geben. Inwiefern und unter welchen Bedingungen aber diese Formel noch einer weiteren Ausdehnung als auf den irreduciblen Fall fähig ist, will ich jetzt nicht untersuchen.

XVIII.

Ableitung der Grundformeln der Trigonometrie in völlig allgemeiner Gültigkeit aus den Elementen der Coordinatenlehre.

Von
Herrn Professor Dr. *von Riese*
an der Universität zu Bonn.

Die so vielfältig bearbeitete Trigonometrie haben zwar mehrere Schriftsteller in den Vortrag der analytischen Geometrie, zu welcher sie auch eigentlich gehört, aufgenommen, ohne jedoch von der Coordinatenlehre die Vortheile, welche sie darbietet, zu ziehen. Es möge mir gestattet sein, hier so kurz als möglich anzugeben, wie die Behandlung der Trigonometrie durch Anwendung von Coordinaten an Kürze, Allgemeinheit, Schärfe und Leichtigkeit der Uebersicht gewinnt. Man bedarf zu dem Ende für die Winkelfunctionen und die ebene Trigonometrie nur der gewöhnlichen rechtwinkeligen Linear- und der Polar-Coordinaten in einer Ebene, und für die körperliche (sogenannte sphärische) Trigonometrie der rechtwinkeligen Coordinaten im Raume nebst einer Verallgemeinerung der Polarcoordinaten in demselben. Diese Gegenstände kann man, auch wenn die Trigonometrie allein behandelt wird, leicht in kurzer Zeit erledigen, und werden hier natürlich übergangen; nur über die erwähnte Verallgemeinerung der Polarcoordinaten werden unten einige Worte nothwendig sein.

Begriffe der Winkelfunctionen.

§. 1. In einem gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinatensysteme in einer Ebene seien x, y die Coordinaten eines beliebigen

Punktes P, sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten d, φ der Winkel, welchen die Linie d mit dem positiven Theile der xAchse, von diesem nach dem positiven Theile der yAchse bis zu einer ganzen Umdrehung oder $4R$ fortgezählt, einschliesst, alsdann sind die Definitionen der gewöhnlichen Winkelfunctionen

$$(1) \quad \cos\varphi=\frac{x}{d}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{d}, \quad \tang\varphi=\frac{y}{x}, \quad \cot\varphi=\frac{x}{y};$$

worin die absoluten numerischen Werthe einer jeden Function durch die rechtwinkeligen Dreiecke zwischen x, y und d, die algebraischen Vorzeichen dieser Werthe aber durch die Zeichen der Coordinatenwerthe gegeben sind. Aus den Gleichungen (1) hat man sofort die Definitionen der übrigen Winkelfunctionen, so wie die Beziehungen zwischen den Functionen desselben und gleich grosser positiver und negativer Winkel. Auch kann man sehr leicht die Gleichungen zwischen den Functionen von φ und denen von $\pm\varphi\pm nR$ ableiten, indem man noch ein zweites Coordinatensystem für letztere zu Hülfe nimmt, und dessen Achsen auf verschiedene Arten mit denen des ersten Systems zusammenfallen lässt, z. B. für $\varphi+R$, wenn die Coordinaten des zweiten Systems $x_1 y_1$ heissen, die x_1Achse mit der $-y$, die y_1Achse mit der $+x$Achse, so dass $x_1=-y$, $y_1=x$ ist. Alsdann hat man

$$(1a) \quad \cos(\varphi+R)=\frac{x_1}{d}=-\frac{y}{d}=-\sin\varphi, \quad \sin(\varphi+R)=\frac{y_1}{d}=\frac{x}{d}=\cos\varphi.$$

Für $\varphi+2R$ würden die x_1- und y_1Achse bezüglich mit der $-x$- und $-y$Achse zusammenfallen.

Gleichungen zwischen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und φ, so wie für $\sin(\varphi\pm\psi)$ und $\cos(\varphi\pm\psi)$.

§. 2. Zuerst bietet sich hiernach die Frage dar nach den entwickelten Gleichungen zwischen einem Winkel und seinen Functionen, eine Aufgabe, die ohne Künstelei nur mit Hülfe der höheren Analysis gelöst werden kann. Zur Anwendung derselben bei den ersten Schritten in der Geometrie ist man zwar im streng wissenschaftlichen Gange vollkommen berechtigt (denn dieser ist vom Allgemeinen zum Besonderen, die Analysis betrachtet Grössen in höchster Allgemeinheit, die Geometrie aber speciellere, die Raumgrössen) und nach Begründung der bezeichneten Gleichungen geben die imaginären Exponential-Grössen sogleich die Ausdrücke für die Functionen der Summe u. s. w. in höchster Allgemeinheit. Aber bei dem gewöhnlichen Unterrichte ist es wegen des Be-

dürfnisses und der Fassungskraft der Lernenden durchaus nothwendig, die Trigonometrie vor der Differential-Rechnung zu betreiben, wesshalb alsdann die Formeln für die Functionen der Summe und Differenz von Winkeln direct jedoch in völliger allgemeiner Gültigkeit abgeleitet werden müssen, was allerdings ohne die Coordinatenlehre mit grosser Weitläuftigkeit verbunden ist, wesshalb denn auch die meisten Lehrbücher diese Gleichungen nur für spitze und allenfalls für stumpfe, nicht aber für grössere Winkel beweisen.

A. *Rein wissenschaftliche Behandlung.*

§. 3. Da, wie leicht zu erweisen, Sinus und Cosinus völlige Continuität für alle reellen Werthe des Winkels φ, namentlich auch für $\varphi = 0$ besitzen, und durchaus eindeutig sind, so kann man sie nach dem Taylorschen und Maclaurinschen Satze entwikkeln, und da für gleich grosse positive und negative Winkel der Sinus gleiche absolute Grösse aber entgegengesetzte Zeichen hat, der Cosinus dagegen sowohl der absoluten Grösse als dem Zeichen nach völlig gleich ist, so kann die Entwickelung von jenem nach dem Maclaurinschen Satze nur Potenzen ungeraden, die des letzteren dagegen nur Potenzen geraden Ranges enthalten; und muss mit 1 beginnen, weil $\cos 0 = 1$. Bezeichnet man daher der Kürze wegen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch c und s, die Differential-Quotienten im Allgemeinen mit $s_1, s_2 \ldots. c_1, c_2 \ldots.$, die für $\varphi = 0$ aber mit $S_1, S_2 \ldots. C_1, C_2 \ldots.$, so hat man

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos(\varphi + \Delta\varphi) &= c + c_1 \Delta\varphi + c_2 \frac{\Delta\varphi^2}{1.2} + c_3 \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \text{etc.},\\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) &= s + s_1 \Delta\varphi + s_2 \frac{\Delta\varphi^2}{1.2} + s_3 \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \text{etc.};\\ \cos\varphi &= 1 + \frac{C_2\varphi^2}{1.2} + \frac{C_4\varphi^4}{1....4} + \frac{C_6\varphi^6}{1....6} + \text{etc.},\\ \sin\varphi &= S_1\varphi + \frac{S_3\varphi^3}{1....3} + \frac{S_5\varphi^5}{1....5} + \text{etc.}; \end{aligned}\right.$$

in welchen letzten Gleichungen nun die Coefficienten C und S zu ermitteln sind, was von dem hier genommenen Standpunkte aus auf mehrerlei Arten geschehen kann.

Nimmt man ausser dem Punkt P (§. 1.) noch einen andern P' an, dessen Coordinaten bezüglich $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $\varphi + \Delta\varphi$

und d sind, und fällt man auf die Linie PP' aus dem Anfangspunkt A der Coordinaten ein Perpendikel, so macht dieses, da das Dreieck $PP'A$ gleichschenklich, mit der xAchse den Winkel $\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi$, und daher die Linie PP' mit einer Parallelen zur xAchse den Wink. $R+\varphi+\frac{1}{2}\Delta\varphi$. Man hat daher definitionsmässig und nach (1a.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{PP'}{d}, \quad \frac{\Delta x}{PP'} = \cos(R+\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi) = -\sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi),$$

$$\frac{\Delta y}{PP'} = \sin(R+\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi) = \cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi);$$

folglich, da die Gleichungen (1) mit den analogen für $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$

$$\Delta\cos\varphi = \frac{\Delta x}{d}, \quad \Delta\sin\varphi = \frac{\Delta y}{d}$$

geben,

$$\Delta\cos\varphi = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi),$$
$$\Delta\sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\cos(\varphi+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi),$$

und demnach durch Entwickelung eines jeden Factors rechts nach (2) für die Differential-Quotienten als Coefficienten der ersten Glieder der Incrementen-Reihen oder als Grenzen:

$$(3)\quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{\partial\cos\varphi}{\partial\varphi} = -S_1\sin\varphi, \\ s_1 = \dfrac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi} = S_1\cos\varphi; \end{cases}$$

in welchen Gleichungen der Coefficient S_1 später bestimmt werden wird.

Auch auf rein analytischem Wege gelangt man zu demselben Resultate. Aus den Gleichungen (1) hat man nämlich:

$$1 = s^2 + c^2,$$

und daher

$$(4)\quad 0 = ss_1 + cc_1,$$

also

$$\frac{s_1}{c_1} = -\frac{c}{s},$$

wonach nothwendig sein muss:

$$(5)\quad s_1 = fc, \quad c_1 = -fs,$$

wenn man unter f einen noch näher zu ermittelnden Factor versteht, und bemerkt, dass s_1 positiv, c_1 aber negativ genommen werden muss, weil von $\varphi = 0$ an der positive Sinus wächst, der positive Cosinus dagegen abnimmt; übrigens würde eine andere Annahme in (5) nur das Zeichen des noch unbestimmten Factors f ändern. In Betreff dieser Bestimmung fordert nun, wenn f nicht eine Constante, sondern eine Function von φ sein sollte, die Continuität von Sinus und Cosinus auch diese Eigenschaft in gleichem Maasse von f nach den Gleichungen (2) und (5), und man kann daher, auch f als Function von φ betrachtet, alle höheren Differentialquotienten aus (5) durch Differentiation ableiten. Diese verbunden mit der Substitution aus (5) giebt, wenn man die Differentialquotienten von f mit f_1, f_2 u. s. w. bezeichnet,

(6)

$s_2 = -f^2 s + f_1 c$	$c_2 = -f^2 c - f_1 s$
$s_3 = -f^3 c - 3ff_1 s + f_2 c$	$c_3 = +f^3 s - 3ff_1 c - f_2 s$
$s_4 = +f^4 s - 6f^2 f_1 c - 3f_1^2 s - 4ff_2 s + f_3 c$	$c_4 = +f^4 c + 6f^2 f_1 s - 3f_1^2 c - 4ff_2 c - f_3 s$

u. s. w.

und man sieht leicht, dass allgemein von s_n und c_n nur die ersten Glieder den Factor f^n, die übrigen aber sämmtlich Producte niederer Dimensionen von f und seinen Differentialquotienten enthalten, und daher auch, weil s und c abstracte Zahlen sind, von geringeren Dimensionen als der $n$ten in Bezug auf die in f gezählte Einheit sein werden. Eben aber, weil Sinus und Cosinus abstracte Zahlen sind, φ dagegen in irgend einer beliebigen Einheit ausgedrückt werden kann, so müssen c_n, s_n, C_n, S_n einen der $n$ten Potenz dieser Einheit proportionalen Divisor enthalten, damit die $n$ten Glieder der Gleichungen (2) ebenfalls abstracte Zahlen werden. Da hiernach und nach (6) s_n, c_n und f_n benannte Zahlen von der $(-n)$ten Dimension dieser Einheit sind, die in jeder der Gleichungen (6) auf die ersten folgenden Glieder jedoch sämmtlich, wie eben gezeigt, von einer geringeren Dimension als f^n, folglich von einer höheren als der $(-n)$ten dieser Einheit sind, so würden die Gleichungen (6) gegen das Grundprincip der Gleichartigkeit verstossen, wenn diese übrigen Glieder nicht sämmtlich gleich Null, also

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = \ldots = 0$$

wären, woraus, weil für $\varphi = 0$, $s_1 = S_1$ und $c = 1$ ist, nach (5) folgt:

(7) $$f = S_1.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (5) in die auf anderem Wege

gefundenen Gleichungen (3) über, und die allgemeinen Gleichungen (2) werden:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{S_1{}^2\varphi^2}{1.2} + \frac{S_1{}^4\varphi^4}{1..4} - \text{etc.},$$

$$\sin\varphi = S_1\varphi - \frac{S_1{}^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{S_1{}^5\varphi^5}{1....5} - \text{etc.},$$

in welcher nun S_1 zu bestimmen ist.

Sei zu dem Ende, um die Natur von S_1 der kurz vorher gemachten Bemerkung zufolge näher zu bezeichnen, R die Zahl der Theile des rechten Winkels, in welchem φ ausgedrückt ist, und K eine noch näher zu ermittelnde abstracte Zahl, so kann man setzen:

$$S_1 = \frac{K}{R},$$

und die vorhergehenden Gleichungen werden:

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{K}{R}\varphi\right)^2 + \frac{1}{1....4}\left(\frac{K}{R}\varphi\right)^4 - \text{etc.}, \\ \sin\varphi = \frac{K}{R}\varphi - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{K}{R}\varphi\right)^3 + \frac{1}{1....5}\left(\frac{K}{R}\varphi\right)^5 - \text{etc.} \end{cases}$$

Nun bestimmt bekanntlich die Analysis den hier der Unterscheidung wegen durch cos an und sin an zu bezeichnenden Cosinus und Sinus einer Zahl z durch die Formeln:

$$(9)\quad \begin{cases} \cos \text{an}\, z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1....4} - \text{etc.}, \\ \sin \text{an}\, z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1....5} - \text{etc.}, \end{cases}$$

welche Reihen offenbar für

$$(10)\quad z = \frac{K}{R}\varphi$$

mit den vorhergehenden ganz identisch werden. Sie geben daher mit $z = 0$, $\varphi = 0$ anfangend, und um ein ganz beliebiges Intervall $\Delta z = \frac{K}{R}\Delta\varphi$ fortschreitend, ganz dieselben Werthe der fraglichen Functionen, und erzeugen diese Werthe ganz in derselben Ordnung wieder, so oft z um 2π und φ um $4R$ sich geändert haben. Unter m und μ ganze Zahlen verstanden, würde man statt (10) auch setzen können:

$$z+m.2\pi=\frac{K}{R}(\varphi+\mu.4R).$$

Da aber diess für $z=0$ und $\varphi=0$, so wie, weil μ und m ganz willkührlich sind, auch für $m=1$ und $\mu=1$ gilt, so folgt:

(11) $$2\pi=\frac{K}{R}.4R \quad \text{also} \quad K=\frac{\pi}{2}.$$

Man kann diess auch so fassen: da der Bestimmung und dem Begriffe der fraglichen Functionen gemäss diese für

$z=0$	$\varphi=0$
$z=m.2\pi+\frac{1}{2}\pi$	$\varphi=m.4R+R$
$z=m.2\pi+\pi$	$\varphi=m.4R+2R$
$z=m.2\pi+\frac{3}{2}\pi$	$\varphi=m.4R+3R$

bezüglich die Werthe 0, 1, -1 erhalten, und zwischen diesen Werthen der z und φ bei dem Fortschritt $\Delta z=\frac{K}{R}\Delta\varphi$ ganz zusammen gehen, so müssen die obigen Intervalle mit Rücksicht auf (10) einander gleich sein, was zu der Gleichung (11) führt.

Auch noch auf ganz anderm Wege kann man zu demselben Resultate gelangen. Für $\varphi=R$ hat man nämlich aus (8)

$$1=K-\frac{K^3}{1.2.3}+\frac{K^5}{1....5}-\text{etc.}=\sin K,$$

indem diese Reihe nach (9) sin an K ist. Diese Gleichung giebt bekanntlich auch:

(⊙) $$z=2n\pi+\sin\text{an}\, z+\frac{1}{2}\frac{\sin\text{an}\, z^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\sin\text{an}\, z^5+\text{etc.},$$

oder

$$z=(2n+1)\pi-\text{der vorstehenden Reihe},$$

welche beide Ausdrücke für $\sin\text{an}\, z=1$ geben:

$$z=(2n+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Man hat also für $\sin\text{an}\, z=\sin\text{an}\, K=1$:

(11a.) $$K=(2n+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Setzt man nun, um das noch willkührliche n zu bestimmen, $\varphi=\frac{p}{q}R$, für $\frac{p}{q}$ solche Werthe wählend, dass die Functionen von

$\frac{p}{q}R$ aus den Dreiecken zwischen x, y, d leicht zu ermitteln sind, also $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w., so wird für $n=0$ die Grösse $\frac{K}{R}\varphi$ bezüglich $\frac{K}{3}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{K}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{3}K=\frac{\pi}{3}$ u. s. w., und man erhält aus (8) und (9) wie gehörig:

$$\sin\frac{K}{3}=\frac{1}{2}=\sin\text{an}\,\frac{\pi}{6},\quad \cos\frac{K}{3}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\cos\text{an}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\sin\frac{K}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\sin\text{ an}\,\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\text{an}\,\frac{\pi}{4},$$

u. s. w.

Wenn sich nun auch noch andere von Null verschiedene Werthe von n angeben lassen, welche diesen Sinussen und Cosinussen dieselben Werthe verschaffen wie $n=0$, so werden diese anderen Werthe von n jedoch wenigstens im Allgemeinen verschieden ausfallen für verschiedene Werthe von $\frac{p}{q}$ oder von φ. Nun ist aber $S_1=\frac{K}{R}$, also auch K eine für alle Werthe von φ gleiche constante Grösse, welche Eigenschaft hiernach mit einem von Null verschiedenen Werthe von n in der Gleichung (11a) sich nicht vereinbaren lässt. Man hat daher

$$n=0 \quad\text{und}\quad K=\frac{\pi}{2},$$

und die in die Gleichungen (8) eintretende Grösse

$$\frac{K}{R}\varphi=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varphi}{R}$$

oder, was dasselbe sagt, den Satz: die analytischen und geometrischen Cosinus und Sinus fallen ganz zusammen, wenn man in jenen $z=\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{R}$ setzt, oder in letzteren für die willkührliche Einheit, in welcher φ ausgedrückt werden soll, den πten Theil von $2R$ wählt.

Mit dieser Uebereinstimmung sind offenbar auch alle die Formeln, welche die Analysis für ihre aus den imaginären Exponenten herrührenden Zahlenfunctionen kennen lehrt, und zwar in völliger Allgemeinheit erwiesen. Namentlich gehören hierher die Gleichungen für die Tangente und die übrigen Winkelfunctio-

nen, die Ausdrücke für diese durch den Winkel, z. B. indem man in den Gleichungen (⨀) $z = \frac{\pi\varphi}{2R}$ setzt, (da nicht in dieser, sondern nur in (11a.) $n=0$ ist),

$$\varphi = 4nR + \frac{2R}{\pi}\{\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\frac{\sin\varphi^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin\varphi^5}{5} + \text{etc.}\};$$

ferner und vornehmlich die Gleichungen für die Functionen von Summen und Differenzen von Winkeln, so dass diese in rein wissenschaftlicher Grenze gar keiner weiteren Erörterung bedürfen.

B. Für den gewöhnlichen Unterricht.

§. 4. Wenn man die höhere Analysis nicht voraussetzen, und daher die Beziehung zwischen einem Winkel und seinen Functionen nicht gleich anfangs ableiten kann, so bleibt, wie §. 2. erwähnt, nichts übrig, als die nothwendigen Formeln und namentlich die für die Functionen der Summe und Differenz von Winkeln direct auf die Elemente, jedoch in allgemeiner Gültigkeit, zu gründen, was auf mehrfache Weise geschehen kann. Hierzu die Coordinaten-Verwandlung anzuwenden, führt eine Zerreissung dieses Gegenstandes im Vortrage der analytischen Geometrie herbei, und fordert, wenn die Trigonometrie allein behandelt wird, etwas lange, hernach in dieser nicht weiter nöthige Vorbereitungen. Man vermeidet diese Uebelstände, indem man die fraglichen Formeln auf die relativen Coordinaten oder noch besser auf den leicht ganz allgemein zu beweisenden Satz gründet: Wenn man zwei Punkte A und B im Raume durch eine gerade Linie L und durch einen zusammenhängenden Zug von n geraden Linien $l_1, l_2 \ldots . l_n$ verbindet, welche mit L und den damit durch die entweder sämmtlich nach A oder sämmtlich nach B zu genommenen Endpunkte der l gezogenen Parallelen*) bezüglich die in derselben Richtung und bis zu $4R$ gezählten Winkel $w_1, w_2 \ldots . w_n$ einschliessen, so ist:

---

*) Vermittelst dieser Parallelen und der durch sämmtliche $n+1$ Endpunkte gedachten auf L rechtwinkeligen Ebenen (oder wenn alle L und alle l in derselben Ebene liegen, auf L gefällten Perpendikel) lässt sich der Satz leicht beweisen, indem man bemerkt, dass, wenn im μten Punkte eine oder mehrere negative von B nach A zu liegende Projectionen vorkommen, dann nothwendig auch eine ihrem Gesammtbetrage gleiche Summe positiver, d. h. von A nach B zu liegender Projectionen vorkommen muss, um wieder in die μte auf L rechtwinkelige Ebene zu gelangen. — Aus (12) folgt auch leicht und allgemein der Satz für relative Coordinaten.

$$L = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} l_\lambda \cos w_\lambda.$$

Sofort ergiebt sich auch hieraus, dass, wenn in der xyEbene die w die in der Richtung von dem positiven Theile der xAchse nach dem positiven Theile der yAchse gezählten Winkel der l bedeuten, und man die relativen Coordinaten von B in Bezug auf A mit ξ und η bezeichnet, dann

$$(12) \qquad \xi = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} l_\lambda \cos w_\lambda \qquad \eta = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} l_\lambda \sin w_\lambda,$$

indem l_λ mit der yAchse den Winkel $w_\lambda - R$ macht, und nach der Andeutung im §. 1. $\cos(w_\lambda - R) = \sin w_\lambda$.

In Bezug auf $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(a \pm b)$ denke man sich nun Taf. IV. Fig. 1. für b im Isten u. 4ten, Fig. 2. für b im 2ten u. 3ten Qadranten) in der Richtung vom positiven Theile der xAchse nach dem der yAchse den Winkel $a = XMA$ und von MA aus den Winkel $b = AMB$ aufgetragen, nehme in MA im willkübrlichen Abstande d von M einen Punkt P an, errichte, wenn b zwischen 0 und R oder zwischen $3R$ und $4R$ ist, auf MP in P, wenn aber b zwischen R und $3R$ ist, auf dem jenseits M verlängerten MP in dem gleichfalls um d von M entfernten Punkte P' das Perpendikel PQ oder $P'Q$, welches im Punkte Q die Linie MB trifft, und fälle endlich von Q auf die xAchse oder ihre Verlängerung das Perpendikel QN. Sind alsdann der Abstand und die Coordinaten von Q

$$MQ = D, \quad MN = x, \quad NQ = y,$$

so ist begriffsmässig allgemein

$$\cos(a+b) = \frac{x}{D}, \quad \sin(a+b) = \frac{y}{D}.$$

Zufolge der Gleichungen (12) lassen sich aber x und y durch die Projectionen von MP und PQ oder von MP' und $P'Q$ auf die x- und yAchse ausdrücken. Bezeichnet man diese mit MP_x, MP_y, PQ_x, PQ_y, und die Winkel jener Linien mit den Achsen bezüglich durch XP, YP, XQ, YQ, und beachtet die angegebene Beziehung der Punkte P und P' zu der Grösse von l_n, so hat man,

wenn	b zwischen 0 u. R	b zwischen R u. $2R$	b zwischen $2R$ u. $3R$	b zwischen $3R$ u. $4R$
XP od. XP'	a	$a+2R$	$a+2R$	a
YP od. YP'	$a-R$	$a+R$	$a+R$	$a-R$
XQ	$a+R$	$a+R$	$a+3R$ od. $a-R$	$a+3R$ od. $a-R$
YQ	a	a	$a+2R$	$a+2R$
MP_x	$d\cos a$	$(-d)(-\cos a)$ $=d\cos a$	$d\cos a$	$d\cos a$
MP_y	$d\sin a$	$(-d)(-\sin a)$ $=d\sin a$	$d\sin a$	$d\sin a$
und da PQ od. $P'Q$	$d\operatorname{tg} b$	$(-d)\operatorname{tg}(2R-b)$ $=d\operatorname{tg} b$	$(-d)\operatorname{tg}(b-2R)$ $=-d\operatorname{tg} b$	$d\operatorname{tg}(4R-b)$ $=-d\operatorname{tg} b$
PQ_x	$-d\operatorname{tg} b\sin a$	$-d\operatorname{tg} b\sin a$	$-d\operatorname{tg} b\sin a$	$-d\operatorname{tg} b\sin a$
PQ_y	$d\operatorname{tg} b\cos a$	$d\operatorname{tg} b\cos a$	$d\operatorname{tg} b\cos a$	$d\operatorname{tg} b\cos a$

folglich in allen vier Fällen:

$$x = MP_x + PQ_x = d(\cos a - \operatorname{tg} b\sin a),$$

$$y = MP_y + PQ_y = d(\sin a + \operatorname{tg} b\cos a).$$

Nun ist aber nach (1) oder begriffsmässig:

$$\cos b = \frac{d}{D} \text{ also } d = D\cos b,$$

und daher ganz allgemein:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{D} = \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin b\sin a, \\[2ex] \dfrac{y}{D} = \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a. \end{cases}$$

Man sieht, dass bei diesem Beweise die Grösse des Winkels a ganz ohne Einfluss ist, und nur die von b die Unterscheidung der vier Fälle, wenigstens der grösseren Deutlichkeit wegen, erfordert, um dem Resultat strenge allgemeine Gültigkeit zu verschaffen.

Die Gleichungen für $\frac{\cos}{\sin}(a-b)$ lassen sich aus (13) auf verschiedenen Wegen ableiten, z. B. indem man $a+b=A$ setzt, wodurch aus (13) folgt:

$$\sin A \cos b - \cos A \sin b = \sin a = \sin (A-b),$$

$$\cos A \cos b + \sin A \sin b = \cos a = \cos (A-b),$$

da $\cos b^2 + \sin b^2 = 1$ und die übrigen Glieder rechts sich aufheben. Oder man kann auch, da für b alle Werthe zulässig sind, statt b schreiben $4R-b$, wodurch man aus (13) erhält:

$$\cos(a+4R-b) = \cos(a-b) = \cos a \cos(4R-b) - \sin a \sin(4R-b)$$

$$= \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+4R-b) = \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Diese, so wie alle übrigen, durch blosse analytische Operationen, aus (13) gefolgerten Gleichungen haben dieselbe unbeschränkte Gültigkeit, welche die obige Begründung den Formeln (13) verschafft, und bedürfen daher keiner weiteren Erörterung.

Grundformeln der ebenen Trigonometrie.

§. 5. Da bekanntlich nach den Elementen der constructiven Geometrie ein Dreieck durch solche drei seiner sechs Bestandtheile, unter denen wenigstens **eine** Seite sich befindet, völlig oder doch nur mit einer Zweideutigkeit bestimmt ist, so müssen die analytischen Beziehungen wenigstens vier Stücke, die drei gegebenen und ein gesuchtes, enthalten, und da Seiten und Winkel mit einander abwechseln, so folgt leicht, dass nur die drei Grundgleichungen aufzusuchen sind: 1) zwischen 4 an einander liegenden, 2) zwischen 3 an einander liegenden und 1 davon getrennten, und 3) zwischen 2 an einander liegenden und 2 davon getrennten aber eben desshalb an einander liegenden Stücken. — Zu Auffindung dieser Grundformeln werde im Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c, der Punkt A als Anfangspunkt der Coordinaten, sowie die Seite $AC = b$ als die Achse der x angenommen, und die Coordinaten x, y von B einmal direct in Bezug auf A, und einmal als relative Coordinaten in Bezug auf C und A ausgedrückt. Diess giebt

(I) $$x = c \cos A = b - a \cos C,$$

(II) $$y = c \sin A = a \sin C.$$

Die Gleichung (II) ist die dritte der bezeichneten Grundformeln. Die zweite *) ergiebt sich aus $(\mathrm{I})^2 + (\mathrm{II})^2$:

*) Die scheinbar hierher gehörige Bestimmung des dritten Winkels aus einer Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln ist durch $A+B+C = 2R$ erledigt.

$$c^2 = b^2 - 2ab\cos C + a^2,$$

und die erste hat man aus $\frac{I}{II}$:

$$\cot A = \frac{b}{a\sin C} - \cot C.$$

Die Umwandlungen dieser Gleichungen in bequemere Rechnungsformen, so wie die Fälle, wo einer oder mehrere bekannte Bestandtheile durch andere Angaben, z. B. des Flächeninhalts, vertreten sind, können hier keine Stelle finden.

Grundformeln der körperlichen Trigonometrie.

§. 6. Durch eine leichte constructive Betrachtung kann man sich überzeugen, dass von den sechs Winkeln, welche bei drei in einem Punkte sich schneidenden Ebenen an diesem sich bilden, je drei durch die drei anderen bestimmt sind, jedoch, ähnlich wie in der ebenen Trigonometrie bei zwei Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel, hier sowohl bei zwei Kantenwinkeln *) und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Flächenwinkel, als bei zweien Flächenwinkeln und einem nicht dazwischen liegenden Kantenwinkel Zweideutigkeit eintritt. Zwischen welchen Stücken Grundformeln aufzusuchen seien, ergiebt sich daher hier auch ähnlich wie in der ebenen Trigonometrie, nur mit dem Unterschiede, dass während in letzterer bei den drei an einander liegenden und einem davon getrennten Stücke die Beziehung einer Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln zu dem dritten Winkel durch die Gleichheit der Summe der drei Winkel mit $2R$ erledigt war, hier sowohl zwischen den drei Kanten- und einem Flächenwinkel, als den drei Flächen- und einem Kantenwinkel eine Grundgleichung aufzusuchen ist, von denen jedoch auch ohne Beschränkung der Grösse der Winkel die letztere Formel aus den ersteren abgeleitet werden kann, wie sich unten näher zeigen wird.

Zur unbeschränkten Begründung dieser Formeln bedarf man, wie §. 1. erwähnt, ausser den gewöhnlichen rechtwinkeligen Linear-

*) Die Benennungen Kantenwinkel und Flächenwinkel werden von manchen Schriftstellern, besonders in der Krystallographie, in anderer Bedeutung gebraucht. Sprachrichtig scheint mir Flächenwinkel nur den Winkel zwischen zweien Flächen, und Kantenwinkel daher den zwischen zweien Kanten bedeuten zu können. Richtig wäre es wohl, statt jenes Ebenenwinkel zu sagen.

coordinaten auch einer etwas allgemeiner als gewöhnlich gehaltenen Auffassung von Angularcoordinaten. Gegen eine feste Ebene und eine durch einen gewissen Punkt in ihr gehende, ihrer Lage nach unveränderliche Linie in ihr, wofür hier (Taf. IV. Fig. 3.) die xyEbene $ABCD$ der Linearcoordinaten und der positive Theil MX der durch ihren Anfangspunkt M gehenden xAchse zu nehmen sind, wird die Stelle eines beliebigen Punktes P bestimmt, wenn man sich durch diesen unter beliebigem Neigungswinkel N gegen die angegebene Fundamental-Ebene eine diese schneidende Ebene $PM\psi$ gelegt denkt, und nun 1) den Winkel $XM\psi$, welchen dieser Durchschnitt $M\psi$ mit der Linie XM macht, 2) den Neigungswinkel N, 3) den Winkel ψMP zwischen dem angegebenen Durchschnitt und der von M nach P gezogenen Linie MP, und endlich 4) die Länge D dieser Linie angiebt. Hierbei werden alle Winkel bis zu $4R$, der Winkel $XM\psi$ positiv von dem positiven Theile MX der xAchse nach dem MY der yAchse u. s. w., ferner N von dem in dieser Richtung weiter vorwärts als ψM liegenden Theile der xyEbene nach dem positiven Theile der zAchse zu, und ψMP von ψM an, wenn $N < 2R$, nach $+z$, wenn aber $N > 2R$, nach $-z$ zu gezählt; endlich wird der Abstand D stets positiv genommen *). Es sind zwei Systeme dieser Art von Coordinaten nöthig, das zweite jedoch dadurch vereinfacht, dass die durch den Punkt P zu legende Ebene $XVPWX'$ die xyEbene stets in MX schneidet und den Punkt P daher der Neigungswinkel n und der Winkel XMP bezeichnet, wobei n ähnlich wie N, also von dem $+y$ enthaltenden Theile der xyEbene nach $+z$ zu, und XMP ebenso wie ψMP, wenn $M\psi$ mit MX zusmmenfiele, gezählt werden. Die gesuchten Grundformeln ergeben sich nun sogleich, indem man x, y, z in beiden Systemen nöthigenfalls mit Hülfe der Gleichungen (12) ausdrückt.

§. 7. Zur Erleichterung denke man sich vom Punkte P auf die Ebene xy, den Durchschnitt $M\psi$ und die xAchse MX die Perpendikel $P\zeta$, $P\varpi$ und $P\xi$ gefällt, ziehe $\varpi\zeta$ und bemerke, dass für die Anwendung der Formeln (12), um die Coordinaten x, y von ζ oder P durch $M\varpi$ und $\varpi\zeta$ auszudrücken, diese Linien stets positiv zu nehmen sind, folglich in ihren algebraischen Werthen, wenn diese durch die Winkelfunctionen negativ werden, das

*) Wenn die obengenannten Winkel in der angegebenen Folge $(X\psi)$, N, (ψP) construirt gedacht werden, so findet keine Unbestimmtheit des fraglichen Punktes P statt, obgleich derselbe durch verschiedene Angaben bezeichnet werden kann, z. B. bei demselben N durch $X\psi = a$, $\psi P = b$ und $X\psi = a + 2R$, $\psi P = b + 2R$.

negative Zeichen vorzusetzen ist, um die numerischen Werthe positiv zu machen. Bezeichnet man nun durch $(X\psi)$, (XP), $(X\zeta)$, $(Y\psi)$ etc. die von den Achsen oder ihren Parallelen durch $\bar{\omega}$ in der positiven Richtung bis zu den Linien $M\psi$, MP, $\bar{\omega}\zeta$ gezählten Winkel, ebenso durch (ψP) den Winkel ψMP, ferner durch ξ, η, ξ', η' die Projectionen von $M\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}\zeta$ auf die x- und yAchse, und lässt dabei in den unten stehenden, aus der eben angegebenen Zählungsweise der Winkel leicht folgenden Ausdrücken von den doppelten Zeichen das obere für N zwischen $3R$ und R, das untere aber für N zwischen R und $3R$ gelten, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

für (ψP)	0 bis R	R bis $2R$	$2R$ bis $3R$	$3R$ bis $4R$
$(X\zeta)=$	$(X\psi)\pm R$	$(X\psi)\pm R$	$(X\psi)\mp R$	$(X\psi)\mp R$
$\bar{\omega}\zeta=$	$\pm D\sin(\psi P)\cos N$	$\pm D\sin(\psi P)\cos N$	$\mp D\sin(\psi P)\cos N$	$\mp D\sin(\psi P)\cos N$
$(X\bar{\omega})=$	$(X\psi)$	$(X\psi)+2R$	$(X\psi)+2R$	$(X\psi)$
$M\bar{\omega}=$	$D\cos(\psi P)$	$-D\cos(\psi P)$	$-D\cos(\psi P)$	$D\cos(\psi P)$

folglich in allen vier Fällen:

$$\xi'=-D\sin(\psi P)\cos N\sin(X\psi),\qquad \eta'=D\sin(\psi P)\cos N\cos(X\psi),$$

$$\xi=D\cos(\psi P)\cos(X\psi),\qquad \eta=D\cos(\psi P)\sin(X\psi);$$

also im ersten System ganz allgemein:

$$x=\xi+\xi'=D\cos(\psi P)\cos(X\psi)-D\sin(\psi P)\sin(X\psi)\cos N,$$

$$y=\eta+\eta'=D\cos(\psi P)\sin(X\psi)+D\sin(\psi P)\cos(X\psi)\cos N;$$

und, da nach obiger Art des Zählens stets gleichzeitig (ψP) und N entweder beide $<2R$ oder beide $>2R$, ebenso allgemein:

$$z=D\sin(\psi P)\sin N.$$

Im zweiten Coordinaten-Systeme kann man die Werthe der xyz leicht direct oder durch die Bemerkung ableiten, dass das erste System in das zweite übergeht für $(X\psi)=0$ und $N=n$, wodurch $(\psi P)=(X\psi)$, $M\bar{\omega}=x$, und $\bar{\omega}\zeta=y$ wird, jedoch, weil y Coordinate und nicht zu projicirende Linie ist, ohne Zeichenänderung, und man erhält:

$$x=D\cos(XP),\quad y=D\sin(XP)\cos n,\quad z=\sin(xP)\sin n.$$

Werden nun die Werthe der Coordinaten in beiden Systemen einander gleich gesetzt, und $(\psi P)=a$, $(XP)=b$, $(X\psi)=c$, $n=A$, $N=2R+B$ *), und dabei statt negativer Werthe von B (für $N>2R$) deren Ergänzungen zu $4R$ genommen, so ergiebt sich:

$$(14)\quad\begin{cases}\dfrac{x}{D}=\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B,\\[2ex] \dfrac{y}{z}=\cot A=\dfrac{\cot a\sin c}{\sin B}-\cos c\cot B,\\[2ex] \dfrac{z}{D}=\sin b\sin A=\sin a\sin B\end{cases}$$

oder

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

welches die bekannten drei ersten Grundformeln der körperlichen Trigonometrie sind, jedoch in **völlig allgemeiner Gültigkeit erwiesen**, indem bei der Unbeschränktheit aller bei der obigen Ableitung vorkommenden Winkel offenbar keine dreikantige Ecke denkbar ist, die sich nicht durch die betrachtete Ecke $X\psi P$, und zwar auf mehrfache Art darstellen liesse, so dass zwei beliebige der drei Flächenwinkel in den Endformeln vorkommen. Hierdurch ist nicht allein in der letzten der obigen Gleichungen der Quotient $\frac{\sin c}{\sin C}$, sondern auch in den andern beiden Formeln jede Vertauschung einander gegenüberstehender Kanten- und Flächenwinkeln mit andern einander gegenüberstehenden vollkommen gerechtfertigt.

§. 8. Die noch übrige vierte Grundformel ergiebt sich bekanntlich, wenn man von überstumpfen Winkeln absieht, sehr leicht mittelst der sogenannten Ergänzungsecke aus der ersten Grundformel, und es ist möglich, aber ziemlich weitläufig, hiervon ausgehend ihre allgemeine Gültigkeit zu zeigen. **Delambre Ast. I. pag. 141.** (ed. 1814) und **Tralles** in den **Abhandlungen der Berliner Akademie** von 1816 und 1817 haben diese Formel aus den drei anderen ganz allein mittelst Rechnung abgeleitet. Sie erhält hierdurch zwar mit diesen völlig gleiche allgemeine Gültigkeit;

*) Augenfällig bezeichnet B den innerhalb der Ecke an der Kante $M\psi$ liegenden, oder, allgemeiner ausgedrückt, den Winkel, welcher in entgegengesetzter Richtung von N und von dem Theile der xyEbene gezählt wird, welcher rückwärts von $M\psi$ oder nach MX zu, also von $M\psi$ aus in der der Zählung des Winkels $XM\psi$ entgegengesetzten Richtung liegt.

die Ableitung bleibt aber, wenn auch dem Mangel an Symmetrie bei derselben leicht abzuhelfen ist, doch immer künstlich und weitläuftig, und dürfte mehr als gute Uebung in analytischer Rechnung beim Unterrichte, wie als natürlicher Beweis einer solchen Grundformel anzusehen sein. Bei dieser Sachlage ist vielleicht die folgende Begründung, im Wesen eine Verallgemeinerung der sogenannten Ergänzungs- oder besser Hülfs-Ecke, einiger Beachtung nicht ganz unwerth.

Es seien (Taf. IV. Fig. 4.) $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ die Durchschnitte zweier Ebenen mit der des Papiers, $\alpha\delta$, $\alpha\vartheta$ die auf den inneren oder einander zugekehrten Seiten dieser Ebenen, $\alpha\Delta$, $\alpha\Theta$ die auf ihren äusseren Seiten errichteten Perpendikel, der hohle Winkel zwischen diesen Ebenen p, ihr erhabener oder überstumpfer $P = 4R - p$, und ähnlich der hohle Winkel der Perpendikel $\delta\alpha\vartheta = n$, der überstumpfe zwischen $\alpha\Delta$ und $\alpha\Theta = N$, so ist augenfällig

$$n = 2R - p \text{ also } p = 2R - n,$$

desgleichen wegen der vorhergehenden Gleichung zwischen P und p:

$$N = 2R + p = 6R - P \text{ also } P = 6R - N.$$

Errichtet man folglich auf den drei Ebenen irgend einer beliebigen körperlichen Ecke, und zwar, um die zusammengehörigen Flächenwinkel zu nehmen, auf den dem Beschauer zugekehrten Seiten der drei Ebenen (vergl. folgenden Paragr.) in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte (α Taf. IV. Fig. 4. und M Taf. IV. Fig. 3.) Perpendikel, und verbindet, je nachdem der zwischen je zwei derselben liegende Flächenwinkel der gegebenen Ecke ein hohler oder ein erhabener ist, diese beiden Perpendikel so durch eine Ebene, dass diese hiernach den hohlen oder den erhabenen Winkel zwischen diesen Perpendikeln ausfüllt (was immer möglich ist, da keine dieser drei Verbindungen auf die andere Einfluss hat), so erhält man eine Hülfsecke, deren Kantenwinkel zu den gegenüberstehenden Flächenwinkeln der gegebenen Ecke entweder in der Beziehung

(15a) $n = 2R - p$ oder in der Beziehung $N = 6R - P$

stehen. Da ferner hiernach jede Ebene der Hülfsecke durch zwei Linien geht, welche bezüglich auf zwei Ebenen der gegebenen Ecke rechtwinkelig sind, so muss auch jene Ebene auf der den letzteren beiden Ebenen gemeinschaftlichen Linie, d. h. auf der durch sie gebildeten Kante, rechtwinkelig sein, und daher, wenn der Winkel zwischen zweien solchen Kanten durch n' oder N' und der zwischen den entsprechenden beiden Ebenen der Hülfs-

ecke durch p' oder P', je nachdem er hohl oder überstumpf ist, bezeichnet wird, ebenso eine der Beziehungen

$$(15_b)\qquad p'=2R-n' \text{ oder } P'=6R-N'$$

stattfinden. Offenbar führen aber beide Beziehungen sowohl in (15_a), als (15_b) ganz zu denselben Winkelfunctionen, denn zwischen den Winkeln v und w giebt die Gleichung

$$v=6R-w$$

auch die

$$\frac{\sin}{\cos}(6R-w)=\frac{\sin}{\cos}(4R+2R-w)=\frac{\sin}{\cos}(2R-w).$$

Stehen nun den Winkeln a, b, c, A, B, C der gegebenen Ecke bezüglich die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der Hülfsecke gegenüber, so hat man nach der ersten der Gleichungen (14) allgemein:

$$\cos\mathfrak{b}=\cos\mathfrak{a}\cos\mathfrak{c}+\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{c}\cos\mathfrak{B},$$

also kraft der Beziehungen (15):

$$\cos B=\cos A\cos C-\sin A\sin C\cos b,$$

welche bekannte vierte Grundformel der Trigonometrie hiernach ebenfalls in völlig allgemeiner Gültigkeit erwiesen ist.

§. 9. Die Ableitung der, fünf und sechs Stücke einer körperlichen Ecke enthaltenden Formeln *), von denen zwei aus den Werthen von y §. 7. und aus dem vorigen Paragraphen sehr leicht sich ergeben, so wie die Umformung der Grundgleichungen für die einzelnen Aufgaben und Rechnungen liegt nicht im Plane des gegenwärtigen Aufsatzes, da diese Gleichungen vielleicht mit sehr wenigen Ausnahmen ganz dieselbe Gültigkeit wie die Grundformeln, aus denen sie abgeleitet sind, besitzen. — Zum Schlusse mögen aber noch einige Worte in Betreff der überstumpfen Winkel in einer Ecke um so eher gestattet sein, als dadurch die Constructionen des vorigen Paragraphen übersichtlicher werden.

Zur leichteren Auffassung der Entstehung und der verschiedenen Arten dieser Ecken denke man sich drei von einem Punkte M ausgehende, aber nicht in derselben Ebene liegende Linien MA, MB, MC, und je zwei derselben durch Ebenen entweder auf dem kürzesten oder auf dem weitesten Wege (d. h. entweder

*) In Delambre Astron. I. chap. X., Ad. Burg, Sammlung trig. Formeln S. 85. ff. und mehreren anderen Schriften ziemlich vollständig zu finden.

so, dass die Ebene den einspringenden, oder so, dass sie den ausspringenden oder überstumpfen Winkel zwischen den betreffenden beiden Linien einnimmt) verbunden. Es entstehen alsdann eigentlich zwei einander nahe verwandte, jedoch verschiedene Ecken aus den zwei entgegengesetzten Ansichten desselben Gebildes herrührend, indem bei der einen die drei Seiten α, β, γ dieser Ebenen, bei der anderen die drei entgegengesetzten Seiten α', β', γ' derselben dem Beschauer zugekehrt sind, in beiden Lagen zwar die Kantenwinkel dieselben bleiben, die Flächenwinkel in der einen aber die in der anderen zu $4R$ ergänzen, wenn man bei derselben Ansicht nicht verschiedene Seiten derselben Ebene, z. B. für einen Flächenwinkel an der ersten Ebene ihre Seite α, für den anderen ihre Seite α' nimmt, ein Versehen, welches namentlich in dem unten bei 3) aufzuführenden Falle leicht möglich wäre. Zur Angabe der einzelnen Fälle mögen die beiden Ansichten durch I. und II., die einspringenden hohlen Winkel durch abc, ABC, die entsprechenden ausspringenden oder überstumpfen aber mit $a^*b^*c^*$, $A^*B^*C^*$ bezeichnet werden.

1) Sind die drei Linien MA, MB, MC auf den kürzesten Wegen verbunden, so entstehen die drei Kantenwinkel abc und in I. die drei Flächenwinkel ABC, also die gewöhnliche Ecke (Taf. IV. Fig. 5. *)), in II. dagegen $A^*B^*C^*$.

2) Bleiben die Verbindungen von MA mit MB und MC wie eben, die zwischen letzteren beiden Linien geschieht aber auf dem weitesten Wege, so bleiben auch b und c, dagegen hat man statt a jetzt a^* und in I. AB^*C^*, in II. aber A^*BC (Taf. IV. Fig. 6 I. und Fig. 6 II.), also an überstumpfen Winkeln einen Kantenwinkel und in I. die beiden anliegenden, in II. aber den gegenüber liegenden Flächenwinkel.

3) Bleibt aber jetzt die Ebene BMC wie bei 1) und wird dagegen MA mit MB und MC auf den weitesten Wegen verbunden, so entstehen die drei Kantenwinkel ab^*c^* und in Taf. IV. Fig. 7 I. die Flächenwinkel A^*BC **), in II. jedoch (Taf. IV. Fig. 7 II.) die AB^*C^*, also werden zwei Kantenwinkel und entwe-

---

*) Die Begrenzung der Ebenen in diesen und den folgenden Figuren durch grösste Kreise einer Kugel ist blos der leichteren Zeichnung wegen gewählt und ohne irgend eine Beziehung zur Kugel.

**) B und C zwischen der unteren Seite der Ebene BMC und den vorliegenden Seiten der beiden anderen Ebenen. Um Taf. IV. Fig. 7 I. ganz wie die übrigen zu stellen, wurde MBC als von oben angesehen auch hier gezeichnet, sonst hätte eigentlich die untere Seite dieser Ebene dem Beschauer zugekehrt werden müssen.

der der eingeschlossene oder die beiden anliegenden Flächenwinkel überstumpf.

4) Verbindet man endlich je zwei der drei Linien auf den weitesten Wegen, so werden alle drei Kantenwinkel überstumpf, und entweder bei einer Ansicht alle drei Flächenwinkel ebenfalls oder bei der anderen diese Winkel hohl.

Durch die Fälle 3) und 4) ist die in v. Münchow's Trigonometrie ausgesprochene Behauptung, dass eine Ecke nicht zwei überstumpfe Kantenwinkel enthalten könne, thatsächlich widerlegt. Der Irrthum rührt davon her, dass die doppelten Zeichen, womit in den Gaussischen Gleichungen alle Functionen von Summen oder Differenzen von Winkeln behaftet werden müssen, bei der Formel

$$\pm\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\sin\frac{1}{2}b}=\pm\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}B}$$

nicht beachtet sind, und daher angegeben ist, dass, weil wegen $\sin a \sin c = \sin A \sin C$ der Quotient rechts positiv, diess auch auf der linken Seite der Fall sein müsse, diess jedoch nicht sein könne, wenn sowohl a als $c > 2R$ wären. Allein gerade in diesem Falle ist das doppelte Zeichen und namentlich das untere nothwendig, indem dadurch die Bedingung des Positivseins vollkommen erfüllt wird. Gegen die vielleicht vorzubringende Behauptung, dass die Fälle 3) und 4) überhaupt nicht zu den dreikantigen Ecken gehörten, ist zu erwidern, dass in dem Begriffe dieser Ecken als eines Gebildes aus dreien in einem Punkte sich durchschneidenden Ebenen es gar nicht ausgeschlossen ist, dass zwei derselben zwischen ihrem gegenseitigen und dem Durchschnitt einer jeden mit der dritten sich noch einmal schneiden. Wenn auch Ecken mit mehreren überstumpfen Kantenwinkeln in der Anwendung selten vorkommen, so erscheinen dagegen die mit ihnen besonders durch die Hülfsecken nahe verwandten mit mehreren überstumpfen Flächenwinkeln in der Astronomie und Geodäsie desto häufiger, und ganz abgesehen davon fordert doch die Wissenschaft Allgemeinheit in der Lösung ihrer Aufgaben.

XIX.

Ueber einen Satz von ganzen Zahlen.

Von

Herrn Doctor *Durège*

in Zürich.

In Legendre's Théorie des Nombres. Part. 2[de]. §. I. Art. 130. findet sich folgender Satz: Bedeutet n eine ganze Zahl, so ist

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^n+\ldots=1.2.3\ldots n.$$

Man kann diesen Satz auf eine Art beweisen, bei welcher sich zugleich die Werthe der Reihe, wenn der Exponent der Grössen n, $n-1$, $n-2$, u. s. w. von n verschieden ist, mit ergeben.

Bezeichnet man mit $(n)_\lambda$ den Coefficienten von x^λ in der Entwickelung von $(1+x)^n$, so dass

$$(n)_\lambda=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-\lambda+1)}{1.2.3\ldots.\lambda},$$

so kann man obige Reihe folgendermassen schreiben:

$$\sum_0^n{}_\lambda(-1)^\lambda(n)_\lambda(n-\lambda)^n,$$

wobei es gleichgültig ist, ob man die Summe für λ bis n oder bis $n-1$ nimmt, weil das Glied für $\lambda=n$ verschwindet. Setzt man jetzt

$$n-\lambda=k,$$

so bleiben die Gränzen unverändert, und da

$$(n)_{n-k}=(n)_k$$

ist, so geht der zu bestimmende Ausdruck über in

$$(-1)^n \sum_0^n {}_k (-1)^k (n)_k k^n. \qquad (1)$$

Setzt man

$$F(x) = x(x-1)(x-2) \ldots . (x-n)$$

und zerlegt den Bruch $\frac{1}{F(x)}$ in Partialbrüche, so erhält man bekanntlich

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_0^n {}_k \frac{1}{x-k} \frac{1}{F'_k},$$

wo F'_k den Werth des Differentialquotienten der Function $F(x)$ nach x genommen für $x = k$ bedeutet. Nun ist aber:

$$F'_k = k(k-1)(k-2) \ldots . (k-(k-1))(k-(k+1))(k-(k+2)) \ldots . (k-n)$$

oder, wenn man $1.2.3 \ldots . z = z!$ setzt:

$$F'_k = (-1)^{n-k} k!(n-k)!$$

Es ist aber:

$$(n)_k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

folglich wird

$$\frac{1}{F'_k} = \frac{(-1)^{n-k}(n)_k}{n!}$$

und

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_0^n {}_k \frac{(-1)^k (n)_k}{x-k}.$$

Entwickelt man jetzt den Bruch $\frac{1}{x-k}$ nach fallenden Potenzen von x, so kann man schreiben:

$$\frac{1}{x-k} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{k}{x}} = \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{k}{x} + \frac{k^2}{x^2} + \frac{k^3}{x^3} + \ldots . \right\},$$

und erhält dadurch:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{x} \Sigma(-1)^k (n)_k + \frac{1}{x^2} \Sigma(-1)^k (n)_k . k + \frac{1}{x^3} \Sigma(-1)^k (n)_k k^2 + \ldots \right\}, \qquad (2)$$

worin die Summen sämmtlich für k von 0 bis n zu nehmen sind.

In diesem Ausdrucke sind nun die Coefficienten der negativen Potenzen von x von der Form des Ausdrucks (1), indem nur statt der Potenz k^n alle möglichen ganzen Zahlen als Exponenten von

k vorkommen. Die Bestimmung dieser Coefficienten geschieht aber leicht durch die directe Entwickelung von $\frac{1}{F(x)}$ nach fallenden Potenzen von x. Setzt man nämlich

$$F(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n x,$$

so folgt:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{x^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}} \left\{ 1 - \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \right) + \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \right)^2 - \ldots \right\}$$

Nun ist aber ersichtlich, dass diese Entwickelung erst mit der $(n+1)$ten Potenz von $\frac{1}{x}$ anhebt, und dass diese Potenz den Factor 1 hat. Es werden daher die n ersten Glieder des Ausdrucks (2) verschwinden müssen, wodurch man erhält:

$$\Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k = 0, \quad \Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k k = 0, \quad \Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n_k) k^2 = 0,$$

$$\Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k k^3 = 0 \text{ u. s. f. } \ldots \text{ bis } \Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k k^{n-1} = 0.$$

Der Coefficient des $(n+1)$ten Gliedes aber wird $= 1$, also:

$$\frac{(-1)^n}{n!} \Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k k^n = 1 \quad \text{oder} \quad (-1)^n \Sigma_k{}_0^n (-1)^k (n)_k k^n = n!,$$

welches der Legendre'sche Satz ist.

Um die Werthe der Summe für die höheren Potenzen von k zu erhalten, muss man auf die Bedeutung der Grössen a zurückgehen. Es ist aber

$-a_1 =$ der Summe der Zahlen von 1 bis $n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$+a_2 =$ der Summe der Combinationen 2ter Classe der Zahlen von 1 bis n ohne Wiederholungen,

$-a_3 =$ der Summe der Combinationen 3ter Classe von denselben Zahlen,

u. s. f.

Nun ist der Coefficient von $\frac{1}{x^{n+2}}$ gleich $-a_1$; daher erhält man:

$$(-1)^n \overset{n}{\underset{0}{\Sigma}}_k(-1)^k (n)_k k^{n+1} = n!\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Coefficient von $\frac{1}{x^{n+3}}$ ist gleich $(-a_2+a_1^2)$, und führt man die Rechnung aus, so findet man ihn gleich der Summe der Combinationen 2ter Classe der Zahlen 1 bis n mit Wiederholungen, daher wird $(-1)^n \overset{n}{\underset{0}{\Sigma}}_k(-1)^k (n)_k k^{n+2} = n!$mal der Summe der Combinationen 2ter Classe mit Wiederholungen.

Für die höheren Potenzen von k aber lässt sich der Werth der Summe, wenn er auch immer ermittelt werden kann, doch nicht so einfach aussprechen.

XX.

Beweis des von Schlömilch Archiv Bd. XII. No. XXXV. aufgestellten Lehssatzes; — über die Ableitung des Differentials von log Γx; und — über eine allgemeine Aufgabe über die Functionen von Abel.

Von

Herrn Hofrath Dr. *T. Clausen*

zu Dorpat.

Der in Rede stehende merkwürdige Lehrsatz, der eine Vergleichung sehr hoher, noch nicht bearbeiteter Transcendenten enthält, durch dessen Auffindung Schlömilch grossen Scharfsinn gezeigt hat, scheint mir den Weg zu einer sehr ergie-

bigen Ernte auf diesem Felde zu öffnen. Lange habe ich fernere ausgedehnte Untersuchungen dieser Art vergebens erwartet. Um die Aufmerksamkeit des mathematischen Publikums auf's Neue und mehr auf diesen Gegenstand zu lenken, gebe ich folgende Auflösung.

Nach Minding's Integraltafeln p. 157. ist:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}\sin(\beta x)\,\partial x = \frac{\Gamma(n)\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-3\alpha x}x^{n-1}\sin(3\beta x)\,\partial x = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{\Gamma(n)\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-5\alpha x}x^{n-1}\sin(5\beta x)\,\partial x = \frac{1}{5^n}\cdot\frac{\Gamma(n)\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-7\alpha x}x^{n-1}\sin(7\beta x)\,\partial x = \frac{1}{7^n}\cdot\frac{\Gamma(n)\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}, \text{ etc.};$$

also

$$\int_0^\infty \{e^{-\alpha x}\sin(\beta x) - e^{-3\alpha x}\sin(3\beta x) + e^{-5\alpha x}\sin(5\beta x)$$
$$- e^{-7\alpha x}\sin(7\beta x) + \ldots\}x^{n-1}\partial x$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)f(n),$$

wenn man $f(n) = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \text{etc.}$ in infinitum setzt.

Sei

$$S = e^{-\alpha x}\sin(\beta x) - e^{-3\alpha x}\sin(3\beta x) + e^{-5\alpha x}\sin(5\beta x) - \text{etc.},$$

$$T = e^{-\alpha x}\cos(\beta x) - e^{-3\alpha x}\cos(3\beta x) + e^{-5\alpha x}\cos(5\beta x) - \text{etc.}$$

Hieraus folgt sogleich:

$$S\cos(2\beta x) + T\sin(2\beta x)$$
$$= e^{-\alpha x}\sin(3\beta x) - e^{-3\alpha x}\sin(5\beta x) + e^{-5\alpha x}\sin(7\beta x) - \text{etc.},$$

$$T\cos(2\beta x) - S\sin(2\beta x)$$
$$= e^{-\alpha x}\cos(3\beta x) - e^{-3\alpha x}\cos(5\beta x) + e^{-5\alpha x}\cos(7\beta x) - \text{etc.};$$

$$e^{-\alpha x}\sin(\beta x)-S=e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)\,S+e^{-2\alpha x}\sin(2\beta x)\,T,$$

$$e^{-\alpha x}\cos(\beta x)-T=e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)\,T-e^{-2\alpha x}\sin(2\beta x)\,S;$$

und hieraus:

$$e^{-\alpha x}\sin(\beta x)=\{1+e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)\}\,S+e^{-2\alpha x}\sin(2\beta x)\,T,$$

$$e^{-\alpha x}\cos(\beta x)=-e^{-2\alpha x}\sin(2\beta x)\,S+\{1+e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)\}\,T;$$

woraus durch Elimination von T folgt:

$$S=\frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-2\alpha x})\sin(\beta x)}{1+2e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)+e^{-4\alpha x}}.$$

Also wird

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-2\alpha x})\sin(\beta x)\,x^{n-1}\partial x}{1+2e^{-2\alpha x}\cos(2\beta x)+e^{-4\alpha x}}=\frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctang\frac{\beta}{\alpha}\right)f(n).$$

Setzt man $\alpha=0$, $\beta=1$, so wird der Zähler unter dem Integralzeichen $=0$, und der Nenner nicht verschwindend, ausser in den Fällen $2x=\pi$, 3π, 5π, etc. Der Werth des Integrals besteht also in diesem Falle aus mehreren einzelnen Theilen, deren Summirung mit der Cauchy'schen Residù-Rechnung Aehnlichkeit hat.

Es sei $\beta=1$ und $\alpha=\theta$ eine sehr kleine Grösse, deren Quadrat und höhere Potenzen vernachlässigt werden, $2x=(2\lambda+1)\pi+\zeta$, so dass man die Integration auf sehr kleine Werthe von ζ beschränken kann; dann wird:

$$1+2e^{-2\alpha x}\cos(2x)+e^{-4\alpha x}=(1+e^{-2\alpha x})^2\cos x^2+(1-e^{-2\alpha x})^2\sin x^2.$$

Es ist nun, wenn man sich auf die niedrigsten Potenzen von θ und ζ beschränkt:

$$1+e^{-2\alpha x}=2,\ \cos x=\pm\frac{\zeta}{2},\ 1-e^{-2\alpha x}=(2\lambda+1)\pi\theta,\ \sin x=(-1)^\lambda;$$

demnach für einen bestimmten Werth von λ das obige Integral:

$$\int(-1)^\lambda\frac{(\lambda+\frac{1}{2})\pi\theta\,\{(\lambda+\frac{1}{2})\pi\}^{n-1}\partial\zeta}{\zeta^2+\{(2\lambda+1)\pi.\theta\}^2}.$$

Sei $\zeta=(2\lambda+1)\pi.\theta\tang s$, so wird das Integral:

$$(-1)^\lambda\int\tfrac{1}{2}(\lambda+\tfrac{1}{2})^{n-1}\pi^{n-1}\partial s,$$

welches man von $s=-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ nehmen kann, da wegen der

Kleinheit von θ ein kleiner Werth von ζ schon einem Winkel von $\frac{\pi}{2}$ nahezu entspricht. Das Integral wird also:

$$(-1)^\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{1}{(2\lambda+1)^{1-n}},$$

und also für alle ganze Werthe von λ von 0 an bis ∞:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^n f(1-n)=\Gamma(n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)f(n),$$

welches die von Schlömilch gefundene Formel ist.

Das Differential von Log $\Gamma(x)$ lässt sich auf folgende sehr einfache Weise ableiten. Es ist (Minding's Integraltafeln p. 151.):

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\partial x=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Differentiirt man nach b, so ergiebt sich, wenn man nach Lagrange's Bezeichnung $\frac{\partial\Gamma(z)}{\partial z}=\Gamma'(z)$ setzt und $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ durch $\psi(z)$ bezeichnet:

$$\int_0^1 \operatorname{Log}(1-x)\,x^{a-1}(1-x)^{b-1}\partial x=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}(\psi(b)-\psi(a+b)).$$

Sei $(a+b)=t$, $b=1$, also $a=t-1$, so wird

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)}=\frac{1}{t-1},$$

also

$$\int_0^1 \operatorname{Log}(1-x)\,x^{t-2}\partial x=\frac{1}{t-1}\{\psi(1)-\psi(t)\},$$

oder durch theilweise Integration:

$$=\frac{1}{t-1}(x^{t-1}-1)\operatorname{Log}(1-x)+\frac{1}{t-1}\int_0^1\frac{x^{t-1}-1}{1-x}\partial x;$$

und da der erste Theil an beiden Grenzen verschwindet:

$$\psi(t)-\psi(1)=\int_0^1\frac{1-x^{t-1}}{1-x}\partial x.$$

Im zweiten Bande von Crelle's Journal für Mathematik findet sich eine Abhandlung von Abel über die Functionen, welche der Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\psi(xf(y)+yf(x))$$

Genüge leisten. Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich ziemlich einfach auf folgende Weise. Es sei, wenn $\psi(z)=u$, $z=\psi_1(u)$, $\varphi(x)=\xi$, $x=F(\xi)$, $\varphi(y)=v$, $y=F(v)$:

$$f(x)=F_1(\xi),\quad \text{also auch}\quad f(y)=F_1(v);$$

so wird

$$\psi_1(\xi+v)=F(\xi)\,F_1(v)+F(v)\,F_1(\xi).$$

Differentiirt man zweimal in Beziehung auf ξ, so ergiebt sich:

$$\psi_1{}'(\xi+v)=F'(\xi)\,F_1(v)+F_1{}'(\xi)\,F(v),$$
$$\psi_1{}''(\xi+v)=F''(\xi)\,F_1(v)+F_1{}''(\xi)\,F(v).$$

Setzt man nun

$$\xi=k,\quad F(\xi)=A,\quad F'(\xi)=A',\quad F''(\xi)=A'',$$
$$F_1(\xi)=B,\quad F_1{}'(\xi)=B',\quad F_1{}''(\xi)=B'';$$

so geben die obigen drei Gleichungen, nach Elimination von $F(v)$ und $F_1(v)$:

$$0=(A'B''-A''B')\,\psi_1(k+v)+(A''B-AB'')\,\psi_1{}'(k+v)$$
$$+(AB'-A'B)\,\psi_1{}''(k+v),$$

deren Integration bekannterweise sehr leicht ist.

XXI.

Ueber den Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind und $m > n$ oder $m = n$ ist.

Von

Herrn Professor Dr. *F. Minding*

an der Universität zu Dorpat.

Wenn $n = 1$ und m eine gerade Zahl ist, so wird das vorgelegte Integral $= \infty$. Denn es ist für ein gerades m

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x} dx = \int_0^\pi \sin x^m \, dx \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} + \frac{1}{2\pi + x} + \dots \text{ in inf.} \right\};$$

die Summe der eingeklammerten Reihe ist aber, wie bekannt, unendlich gross. Dieser Fall bleibt daher im Folgenden unbeachtet.

Die Gleichung $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma n} \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-1} dy$ giebt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{1}{\Gamma n} \int_0^\infty \sin x^m \, dx \int_0^\infty e^{-xy} y^{n-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma n} \int_0^\infty y^{n-1} dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x^m dx.$$

Für ein gerades m ist:

$$\sin x^m = \varepsilon(\cos mx - m_1 \cos \overline{m-2}x + m_2 \cos \overline{m-4}x - \dots + (-1)^{m'}.\tfrac{1}{2} m_{m'})$$

und für ein ungerades m:

$$\sin x^m = \varepsilon(\sin mx - m_1 \sin \overline{m-2}x + m_2 \sin \overline{m-4}x - \dots + (-1)^{m'}.m_{m'} \sin x),$$

wo m' überall für die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl und ε für $\frac{(-1)^{m'}}{2^{m-1}}$ gesetzt ist.

Da ferner

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cos ax\, dx = \frac{y}{a^2+y^2}, \quad \int_0^\infty e^{-xy}\sin ax\, dx = \frac{a}{a^2+y^2},$$

so folgt für ein gerades m:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{\varepsilon}{\Gamma n}\int_0^\infty Y dy,$$

$$Y = \frac{y^n}{m^2+y^2} - \frac{m_1 y^n}{\overline{m-2}^2+y^2} + \frac{m_2 y^n}{\overline{m-4}^2+y^2} - \dots + (-1)^{m'}.\tfrac{1}{2}m_{m'}.y^{n-2},$$

und für ein ungerades m:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{\varepsilon}{\Gamma n}\int_0^\infty Y_1 dy,$$

$$Y_1 = \frac{m.y^{n-1}}{m^2+y^2} - \frac{m_1.\overline{m-2}.y^{n-1}}{\overline{m-2}^2+y^2} + \frac{m^2.\overline{m-4}.y^{n-1}}{\overline{m-4}^2+y^2} - \dots + \frac{(-1)^{m'}.m_{m'}.y^{n-1}}{1+y^2}.$$

Bezeichnet wiederum n' die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so ist

$$\frac{y^n}{y^2+a^2} = y^{n-2} - a^2y^{n-4} + a^4y^{n-6} - \dots + (-1)^{n'-1}.a^{2n'-2}.y^{n-2n'} + \frac{(-1)^{n'}.a^{2n'}.y^{n-2n'}}{y^2+a^2},$$

wo $n-2n'=0$ oder $=1$, je nachdem n gerade oder ungerade; trennt man mit Hülfe dieser Formel in Y den ungebrochenen Theil vom gebrochenen, und bemerkt dabei sogleich, dass die $(n-2)$te Potenz von y aus dem ersteren wegfällt, weil für gerade m

$$1 - m_1 + m_2 - \dots + (-1)^{m'}.\tfrac{1}{2}m_{m'} = 0$$

ist, so folgt:

$$Y = \sum_{k=2}^{k=n'} (-1)^{k-1}.y^{n-2k}\{m^{2k-2} - m_1.\overline{m-2}^{2k-2} + m_2.\overline{m-4}^{2k-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{m'-1}.m_{m'-1}.2^{2k-2}\}$$
$$+(-1)^{n'}.y^{n-2n'}\left\{\frac{m^{2n'}}{y^2+m^2} - \frac{m_1.\overline{m-2}^{2n'}}{y^2+\overline{m-2}^2} + \frac{m_2.\overline{m-4}^{2n'}}{y^2+\overline{m-4}^2} - \dots\right.$$
$$\left.\dots + \frac{(-1)^{m'-1}.m_{m'-1}.2^{2n'}}{y^2+2^2}\right\},$$

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{k=n-n'-1} (-1)^{k-1} . y^{n-1-2k} \{ m^{2k-1} - m_1 . \overline{m-2}^{2k-1} + m_2 . \overline{m-4}^{2k-1} - ..$$
$$...... + (-1)^{m'} . m_{m'} \}$$

$$+ (-1)^{n-n'-1} . y^{2n'-n+1} \left\{ \frac{m^{2n-2n'-1}}{y^2+m^2} - \frac{m_1 . \overline{m-2}^{2n-2n'-1}}{y^2+\overline{m-2}^2} - .... \right.$$
$$\left. .... + \frac{(-1)^{m'} . m_{m'}}{y^2+1} \right\} .$$

(Der in Y_1 vorkommende Grenzwerth $n-n'-1$ von k drückt die grösste in $\frac{n-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl aus, nämlich $\frac{n-1}{2}$ für ein ungerades n, $\frac{n}{2}-1$ für ein gerades n.) Werden obige Reihen für $\sin x^m$ bei geradem m $2k$mal, bei ungeradem m $(2k-1)$mal differentiirt, so kommt:

$$\frac{\partial^{2k} . \sin x^m}{\partial x^{2k}} = (-1)^k \varepsilon (m^{2k} \cos mx - m_1 . \overline{m-2}^{2k} . \cos \overline{m-2}x + ...$$
$$.... + (-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 2^{2k} \cos 2x),$$

$$\frac{\partial^{2k-1} . \sin x^m}{\partial x^{2k-1}} = (-1)^{k-1} \varepsilon (m^{2k-1} \cos mx - m_1 . \overline{m-2}^{2k-1} . \cos \overline{m-2}x + ...$$
$$.... + (-1)^{m'} . m_{m'} \cos x),$$

jenes für gerade, dieses für ungerade m. So lange nun die Anzahl der Differentiationen kleiner ist als m, sind die Ableitungen linkerhand mit dem Factor $\sin x$ behaftet und verschwinden also für $x=0$. Wird daher die im Folgenden mehrmals wiederkehrende Summe

$$m^k - m_1 . \overline{m-2}^k + m_2 . \overline{m-4}^k - .... + (-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 2^k$$

zur Abkürzung mit $f(m, k)$ bezeichnet, so dass m in $f(m, k)$ immer eine gerade Zahl bedeutet, hingegen für ungerade m die entsprechende Summe

$$m^k - m_1 . \overline{m-2}^k + m_2 . \overline{m-4}^k - .... + (-1)^{m'} . m_{m'} = f_1(m, k)$$

gesetzt; so ist $f(m, 2k)=0$, wenn $2k$ eine Zahl aus der Reihe $2, 4, 6, 8, ... m-4, m-2$ ist, und $f_1(m, 2k-1)=0$, wenn $2k-1$ eine der Zahlen $1, 3, 5, 7, ... m-2$ ist.

Für $2k=m$ erhält $f(m, m)$ und für $2k-1=m$ $f_1(m, m)$ den Werth $2^{m-1} . m!$

Diesen Summationen zufolge verschwinden in Y und Y_1 sämmtliche positive Potenzen von y, und es zeigt sich, dass Y und Y_1 in der That ächte algebraische Brüche sind, nämlich:

$$Y = (-1)^{n'} . y^{n-2n'} \left\{ \frac{m^{2n'}}{y^2 + m^2} - \frac{m_1 . \overline{m-2}^{2n}}{y^2 + \overline{m-2}^2} + \ldots + \frac{(-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 2^{2n'}}{y^2 + 2^2} \right\},$$

$$Y_1 = (-1)^{n-n'-1} . y^{2n'-n+1} \left\{ \frac{m^{2n-2n'-1}}{y^2 + m^2} - \frac{m_1 . \overline{m-2}^{2n-2n'-1}}{y^2 + \overline{m-2}^2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{m'} . m_{m'}}{y^2 + 1} \right\}.$$

Für ein gerades n ist $n' = \frac{n}{2}$, daher findet sich sofort durch Integration, zufolge der so eben erklärten Bedeutung des Zeichens $f(m, k)$:

$$\int_0^\infty Y dy = (-1)^{\frac{n}{2}} . \frac{\pi}{2} . f(m, n-1).$$

Ferner ergiebt sich, wenn Y_1 zuerst von 0 bis y integrirt wird:

$$\int_0^y Y_1 dy = (-1)^{\frac{n}{2}-1} . \tfrac{1}{2} \{ m^{n-1} . \log(1 + \frac{y^2}{m^2}) - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log(1 + \frac{y^2}{\overline{m-2}^2})$$
$$+ \ldots + (-1)^{m'} . m_{m'} . \log(1 + y^2) \}.$$

Es ist aber $\frac{1}{2} \log(1 + \frac{y^2}{m^2}) = \log y - \log m + \frac{1}{2} \log(1 + \frac{m^2}{y^2})$; wird dieser Ausdruck nebst den entsprechenden ähnlichen in vorstehendes Integral eingeführt, so folgt:

$$\int_0^y Y_1 dy = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \{ f_1(m, n-1) . \log y + m^{n-1} . \tfrac{1}{2} \log(1 + \frac{m^2}{y^2})$$
$$- m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \tfrac{1}{2} \log(1 + \frac{\overline{m-2}^2}{y^2}) + \ldots + (-1)^{m'} m_{m'} . \tfrac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{y^2}) \}$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \{ m^{n-1} \log m - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log \overline{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 3^{n-1} \log 3 \}.$$

Es ist aber $f_1(m, n-1) = 0$, weil hier m und $n-1$ ungerade sind und $n - 1 < m$; daher fällt das erste Glied rechter Hand sofort aus; geht man ferner zur Grenze $y = \infty$ über, so verschwinden auch die folgenden Logarithmen, und es wird für gerade n:

$$\int_0^\infty Y_1 dy = (-1)^{\frac{n}{2}} \{ m^{n-1}\log m - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log \overline{m-2}$$

$$+ m_2 . \overline{m-4}^{n-1} . \log \overline{m-4} - \ldots + (-1)^{m'-1} m_{m'-1} . 3^{n-1} . \log 3 \}.$$

Für ungerade n wird:

$$\int_0^y Y dy = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \tfrac{1}{2} \{ m^{n-1} \log(1 + \frac{y^2}{m^2}) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 2^{n-1} \log(1 + \frac{y^2}{2^2}) \}.$$

Wird hier wieder mit den logarithmischen Factoren dieselbe Verwandlung vorgenommen wie vorhin und bemerkt, dass für gerade m und ungerade n, wenn zugleich $n-1<m$ und n wenigstens $=3$, $f(m, n-1)=0$ ist, so verschwindet auch hier das im Integrale auftretende Glied $f(m, n-1) . \log y$; ferner werden die übrigen Logarithmen in dem Integrale $=0$ für $y=\infty$, und man erhält:

$$\int_0^\infty Y dy = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \{ m^{n-1}\log m - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log \overline{m-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m'-1} . m_{m'-1} . 2^{n-1} \log 2 \}.$$

Endlich ist für ungerade n:

$$\int_0^\infty Y_1 dy = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{\pi}{2} . f_1(m, n-1).$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen auch noch die Summen

$$m^k \log m - m_1 . \overline{m-2}^k . \log \overline{m-2} + m_2 . \overline{m-4}^k . \log \overline{m-4} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} . m_{\frac{m}{2}-1} . 2^k \log 2 \text{ durch } f(m, k, \log m),$$

$$m^k \log m - m_1 . \overline{m-2}^k . \log \overline{m-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-3}{2}} . m_{\frac{m-3}{2}} . 3^k \log 3$$

durch $f_1(m, k, \log m)$, wo immer m in f gerade, in f_1 ungerade ist, so lassen sich die den unterschiedenen Fällen zugehörigen Werthe des gesuchten Integrals nunmehr wie folgt schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} . \pi}{2^m . \Gamma n} f(m, n-1) \quad (m \text{ und } n \text{ gerade}) \qquad 1.$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} . \pi}{2^m . \Gamma n} f_1(m, n-1) \quad (m \text{ und } n \text{ ungerade}) \qquad 2.$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}}{2^{m-1} . \Gamma n} f(m, n-1, \log m) \quad (m \text{ ger.}, n \text{ unger.}) \qquad 3.$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{2^{m-1} . \Gamma n} f_1(m, n-1, \log m) \quad (m \text{ unger.}, n \text{ ger.}) \qquad 4.$$

Hier ist, wie ich zu grösserer Deutlichkeit noch hervorheben will:

$$f(m, n-1) = m^{n-1} - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} + m_2 . \overline{m-4}^{n-1} - \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} . m_{\frac{m}{2}-1} . 2^{n-1},$$

$$f_1(m, n-1) = m^{n-1} - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} + m_2 . \overline{m-4}^{n-1} - \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} . m_{\frac{m-1}{2}},$$

$$f(m, n-1, \log m) = m^{n-1} \log m - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log m + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1} . m_{\frac{m}{2}-1} . 2^{n-1} . \log 2,$$

$$f_1(m, n-1, \log m) = m^{n-1} \log m - m_1 . \overline{m-2}^{n-1} . \log m + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-3}{2}} . m_{\frac{m-3}{2}} . 3^{n-1} . \log 3.$$

Insbesondere wird für $m = 1$:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n . \Gamma n} f(n, n-1) \text{ wenn } n \text{ gerade},$$

$$= \frac{\pi}{2^n . \Gamma n} f_1(n, n-1) \text{ wenn } n \text{ ungerade}.$$

Beispiele.

1. $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} . \int_0^\infty \frac{\sin x^4}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} . \int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^2} dx$$

$$= \frac{3\pi}{16} . \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx = \frac{\pi}{3} . \int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^4} dx = \frac{\pi}{8} . \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^6 dx = \frac{11 . \pi}{40},$$

$$2.\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^\infty \frac{\sin x^3}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$$

$$= \frac{3\pi}{8}.\int_0^\infty \frac{\sin x^5}{x^3}\,dx = \frac{5\pi}{32}.\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 dx = \frac{115.\pi}{504},$$

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{\sin x^4}{x^3}\,dx = \log 2.\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^3}\,dx = \frac{3}{16}\log\frac{256}{27}.\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^5}\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\log\frac{3^{27}}{2^{32}},$$

$$4.\quad \int_0^\infty \frac{\sin x^3}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\log 3.\int_0^\infty \frac{\sin x^5}{x^2}\,dx = \frac{5}{16}\log\frac{27}{5}.\int_0^\infty \frac{\sin x^5}{x^4}\,dx$$

$$= \frac{5}{96}\log\frac{5^{25}}{3^{27}}.$$

Ich benutze die gegenwärtige Gelegenheit, um über den Zusammenhang zwischen den Integralen $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ und $\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ eine Bemerkung einzuschalten, welche, wie ich mich erinnere, vor mehreren Jahren einer meiner damaligen Zuhörer, Herr S. N. Zwett, mir mittheilte.

Es ist

$$d\,\frac{\sin x^2}{x} = \frac{\sin 2x}{x}\,dx - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx;$$

daher

$$\int_0^x \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \int_0^x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + \frac{\sin x^2}{x}$$

oder

$$\int_0^{2a} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^a \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx + \frac{\sin a^2}{a}.$$

Aus dieser Bemerkung folgt für $a = \infty$ wieder, wie oben gefunden ward,

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Auch möchte noch die Folgerung der Erwähnung werth sein, dass für $\sin a = 0$, also $a = n\pi$,

$$\int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{n\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

wird.

In einem an mich gerichteten Schreiben aus Tschernigow vom 17. Mai d. J. stellte mein schon genannter Freund Herr Zwett über bestimmte Integrale, welche eine periodische Function enthalten, folgende Betrachtungen an, auf die ich schon desshalb gern näher eingehe, weil sie mir zu der gegenwärtigen Untersuchung den ersten Anlass gaben.

Es ist

$$\int_0^\infty fx.\varphi(\sin x)\,dx = \int_0^{2\pi} Fx.\varphi(\sin x)\,dx,$$

wo Fx eine sogleich anzugebende Function ist und statt $\sin x$ auch eine andere periodische Function gesetzt werden kann. Da nämlich

$$\int_0^\infty = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \ldots.$$

und $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} fx.\varphi(\sin x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+2n\pi).\varphi(\sin x)\,dx,$

so folgt:

$$Fx = fx + f(x+2\pi) + f(x+4\pi) + \ldots.$$

Die angegebene Umformung gilt unter der Voraussetzung, dass Fx zu einer endlich auszudrückenden Function convergirt. Es sei $fx = \frac{1}{x^n}$, $\varphi(\sin x) = \sin x^n$, so wird

$$Fx = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+2\pi)^n} + \ldots.$$

oder

$$F(2\pi x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \ldots\right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{t^x}{x} + \frac{t^{x+1}}{x+1} + \frac{t^{x+2}}{x+2} + \ldots = \int_0^t \frac{t^{x-1}dt}{1-t},$$

$$\frac{t^x}{x^2}+\frac{t^{x+1}}{(x+1)^2}+\ldots=\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{t^{x-1}dt}{1-t},$$

allgemein:

$$\frac{t^x}{x^n}+\frac{t^{x+1}}{(x+1)^n}+\ldots=\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\ldots\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{t^{x-1}dt}{1-t};$$

daher

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{(x+1)^n}+\ldots=(2\pi)^nF(2\pi x)=\int_0^1\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\ldots\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{t^{x-1}dt}{1-t},$$

und weil nach obigem Satze

$$\int_0^\infty fx\varphi(\sin x)\,dx=2\pi\int_0^1 F(2\pi x)\,\varphi(\sin 2\pi x)\,dx,$$

so folgt:

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^1\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\ldots\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t(1-t)}\int_0^1 t^x\overline{\sin 2\pi x}^n.dx,$$

wo die Anzahl der Integrationen nach t gleich n ist.

So weit ging die Mittheilung des Herrn Zwett; es schien mir der Mühe werth, den darin angefangenen, aber freilich wegen der vielfachen Integrationen einige Schwierigkeiten darbietenden Gang der Rechnung weiter zu verfolgen. Setzt man allgemeiner $\varphi(\sin x)=\sin x^m$, so ergiebt sich auf demselben Wege:

$$\int_0^\infty\frac{\sin x^m}{x^n}dx$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{2\pi t}\int_0^t\frac{dt}{2\pi t}\ldots\int_0^t\frac{dt}{2\pi t}\int_0^t\frac{dt}{t(1-t)}\int_0^1 t^x\overline{\sin 2\pi x}^m.dx.$$

Nach Einführung der Reihen für $\overline{\sin 2\pi x}^m$ und mittels der Integrale

$$\int_0^1 t^x(1-\cos 2m\pi x)\,dx=(1-t)\left\{\frac{\log t}{4m^2\pi^2+\overline{\log t}^2}-\frac{1}{\log t}\right\},$$

$$\int_0^1 t^x\sin 2m\pi x\,.\,dx=\frac{2m\pi(1-t)}{4m^2\pi^2+\overline{\log t}^2},$$

$$\int_0^t \frac{dt}{t(1-t)} \int_0^1 t^x (1-\cos 2m\pi x)\, dx = \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{4m^2\pi^2}{\log t^2}\right),$$

$$\int_0^t \frac{dt}{t(1-t)} \int_0^1 t^x \sin 2m\pi x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2m\pi}{\log\frac{1}{t}}\right)$$

wird nun folgender Werth in Gestalt eines $(n-1)$fachen Integrals gefunden, nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^1 \frac{dt}{2\pi t} \int_0^t \frac{dt}{2\pi t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{2\pi t} . T,$$

wo für gerade m:

$$T = m_{m'-1} . \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{4^2.\pi^2}{\log t^2}\right) - m_{m'-2} . \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{8^2\pi^2}{\log t^2}\right)$$

$$+ m_{m'-3} . \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{12^2.\pi^2}{\log t^2}\right) - \ldots + (-1)^{m'-1} . \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{4.m^2\pi^2}{\log t^2}\right),$$

und für ungerade m:

$$T = T_1 = m_{m'} \operatorname{arctg}\frac{2\pi}{\log\frac{1}{t}} - m_{m'-1} \operatorname{arctg}\frac{6\pi}{\log\frac{1}{t}} + m_{m'-2} \operatorname{arctg}\frac{10\pi}{\log\frac{1}{t}} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m'} \operatorname{arctg}\frac{2m\pi}{\log\frac{1}{t}}.$$

Durch Einführung einer neuen Veränderlichen $v = \dfrac{2\pi}{\log\frac{1}{t}}$ werden diese Integrale auf folgende Gestalt gebracht:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx = \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^\infty \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \cdots \int_0^v \frac{dv}{v^2} . T,$$

wo die Anzahl der Integrationen rechterhand stets $n-1$ ist, und für gerade m:

$$T = m_{m'-1} . \tfrac{1}{2}\log(1+2^2v^2) - m_{m'-2} . \tfrac{1}{2}\log(1+4^2v^2) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m'-1} . \tfrac{1}{2}\log(1+m^2v^2),$$

für ungerade m:

$$T = T_1 = m_{m'} \operatorname{arctg} v - m_{m'-1} \operatorname{arctg} 3v + \ldots. + (-1)^{m'} \operatorname{arctg} mv.$$

Die Ausführung der gesonderten Integrationen stösst sogleich auf die Schwierigkeit, dass schon die ersten oder doch die zweiten Integrale der Glieder von T und T_1, in so fern sie von Null anfangen sollen, unendlich gross werden; wesshalb dieser Gang der Rechnung auf den ersten Blick überhaupt nicht zum Ziele zu führen, sondern sich in Unbestimmtheit zu verlieren scheint. Bei näherer Prüfung zeigt sich jedoch, dass dieser Uebelstand gehoben wird, wenn man von jedem Logarithmus oder arctg in T die ersten Glieder der dafür geltenden Reihe, bis zu der zunächst der $n$ten vorangehenden Potenz von v, abzieht, indem vermöge der Eigenschaften von T alle so hinzugefügten Glieder sich für jeden Werth von v zu Null aufheben. Setzt man nämlich

$$v^2 - \tfrac{1}{2}v^4 + \tfrac{1}{3}v^6 - \ldots. + (-1)^{n-n'} \cdot \frac{v^{2n-2n'-2}}{n-n'-1} = \varphi(v),$$

wobei zu bemerken ist, dass $2n-2n'-2$ die der n zunächst vorhergehende gerade Zahl ausdrückt, nämlich $n-2$, wenn n gerade, und $n-1$, wenn n ungerade ist; so ist stets

$$m_{m'-1} \cdot \varphi(2v) - m_{m'-2} \cdot \varphi(4v) + m_{m'-3} \cdot \varphi(6v) - \ldots. + (-1)^{m'-1} \cdot \varphi(mv) = 0,$$

weil jede linkerhand vorkommende Potenz von v, sie sei v^{2k}, die Summe $f(m, 2k)$ zum Factor bekommt, welche hier wieder $=0$ ist, weil m gerade und grösser als 2, $2k$ wenigstens gleich 2 und kleiner als m ist. Demnach ist also T folgendermaassen zu schreiben:

$$2T = m_{m'-1}\{\log(1+2^2v^2) - \varphi(2v)\} - m_{m'-2}\{\log(1+4^2v^2) - \varphi(4v)\} + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{m'-1}\{\log(1+m^2v^2) - \varphi(mv)\}.$$

Wird auf ähnliche Weise gesetzt:

$$v - \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{5}v^5 - \ldots. + (-1)^{n'-1} \cdot \frac{v^{2n'-1}}{2n'-1} = \varphi_1(v),$$

wo $2n'-1$ die der n zunächst vorangehende ungerade Zahl darstellt, so ist wiederum

$$m_{m'} \varphi_1(v) - m_{m'-1} \cdot \varphi_1(3v) + m_{m'-2} \cdot \varphi_1(5v) - \ldots. + (-1)^{m'} \varphi_1(mv) = 0,$$

daher

$$T_1 = m_{m'}\{\operatorname{arctg} v - \varphi_1 v\} - m_{m'-1}\{\operatorname{arctg} 3v - \varphi_1(3v)\} + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{m'}\{\operatorname{arctg} mv - \varphi(mv)\}.$$

In dieser Form lassen sich nun die gesonderten Integrationen alle vollziehen; ich setze einige als Beispiele hierher:

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \log(1+v^2) = 2 \operatorname{arctg} v + v - \frac{\log(1+v^2)}{v},$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\log(1+v^2) - v^2\} = \frac{3}{2} - \frac{2 \operatorname{arctg} v}{v} - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{v^2}) \log(1+v^2),$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\log(1+v^2) - v^2\}$$

$$= -\frac{5}{6v} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{v^2}\right) \operatorname{arctg} v + (1 - \frac{1}{3v^2}) \frac{\log(1+v^2)}{2v},$$

u. s. f.

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\operatorname{arctg} v - v\} = 1 - \frac{\operatorname{arctg} v}{v} - \frac{1}{2} \log(1+v^2),$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\operatorname{arctg} v - v\} = -\frac{1}{2v} - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{v^2}) \operatorname{arctg} v + \frac{\log(1+v^2)}{2v},$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\operatorname{arctg} v - v + \tfrac{1}{3} v^3\}$$

$$= \frac{1}{6v^2} - \frac{11}{36} + (1 - \frac{1}{3v^2}) \frac{\operatorname{arctg} v}{2v} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{v^2}\right) \frac{1}{4} \log(1+v^2),$$

u. s. f.

Um allgemein die $(n-1)$fachen Integrale

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0^v \frac{dv}{v^2} \cdots \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\log(1+v^2) - \varphi(v)\} = \psi(v)$$

und

$$\int_0^v \frac{dv}{v^2} \int_0 \cdots \int_0^v \frac{dv}{v^2} \{\operatorname{arctg} v - \varphi_1(v)\} = \psi_1(v)$$

in Hinsicht auf ihr Verhalten für $v = \infty$ zu untersuchen, hat man nur nöthig, die vorgeschriebenen Integrationen für sehr grosse v

an der höchsten in $\varphi(v)$ und $\varphi_1(v)$ vorkommenden Potenz von v zu vollziehen; man findet durch die wiederholte Integration dieses höchsten Gliedes in $\varphi(v)$ bei geradem n: $\frac{2(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n-1)}\cdot\frac{1+\log v}{v}$,

bei ungeradem n: $\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma n}\log v$;

in $\varphi_1(v)$ bei geradem n: $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma n}\log v$,

bei ungeradem n: $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(n-1)}\cdot\frac{1+\log v}{v}$.

Im ersten und vierten Falle nähern sich diese Werthe mit wachsendem n der Null, woraus sich der Schluss ziehen lässt, dass $\psi(v)$ und $\psi_1(v)$ für $v=\infty$ dann endliche Werthe erhalten, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind, oder kürzer, wenn $m+n$ gerade ist. Dagegen werden bei ungeradem $m+n$ die Werthe von $\psi(v)$ und $\psi_1(v)$ für $v=\infty$ unendlich gross, aber, wie aus vorstehenden Integralen im zweiten und dritten Falle hervorgeht, in der Art, dass

$$\psi(v)-\delta\log v=\theta(v) \quad \text{und} \quad \psi_1(v)-\delta_1\log(v)=\theta_1(v),$$

wo

$$\delta=\frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma n} \quad \text{und} \quad \delta_1=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma n}$$

für $v=\infty$ endliche Werthe erlangen.

Um nun auf dem gegenwärtigen Wege das gesuchte Integral zu finden, hat man die Werthe folgender Ausdrücke für $v=\infty$ zu bestimmen, nämlich:

$$\frac{1}{2^m}\{m_{m'-1}.2^{n-1}\psi(2v)-m_{m'-2}.4^{n-1}.\psi(4v)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{m'-1}.m^{n-1}.\psi(mv)\}\text{ für gerade } m,$$

$$\frac{1}{2^{m-1}}\{m_{m'}.\psi_1(v)-m_{m'-1}.3^{n-1}.\psi_1(3v)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{m'}.m^{n-1}.\psi_1(mv)\}\text{ für ungerade } m.$$

Ist $m+n$ gerade, so erhalten $\psi(2v)$, $\psi(4v)$, $\psi(6v)$, ... für $v=\infty$ alle denselben endlichen Werth $\psi(\infty)$, und ebenso $\psi_1(v)$, $\psi_1(3v)$,

$\psi_1(5v)$, ... alle den Werth $\psi_1(\infty)$. Die Bestimmung dieser Werthe würde jetzt noch eine besondere Untersuchung fordern; vergleicht man aber die oben gefundenen Ergebnisse, so folgt sofort, wenn $m+n$ gerade ist,

$$\psi(\infty) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \pi}{\Gamma n} \quad \text{und} \quad \psi_1(\infty) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi}{2\Gamma n},$$

und damit erhält man $\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx$ wieder wie oben in den beiden einem geraden $m+n$ entsprechenden Fällen.

Für ein ungerades $m+n$ setze man $\psi(v) = \theta(v) + \delta \log v$, $\psi_1(v) = \theta_1(v) + \delta_1 \log v$, wodurch die beiden vorigen Ausdrücke in folgende übergehen:

$$\frac{1}{2^m} \{ m_{m'-1} \cdot 2^{n-1} \cdot \theta(2v) - \ldots + (-1)^{m'-1} \cdot m^{n-1} \theta(mv) \}$$
$$+ \frac{\delta}{2^m} \cdot (-1)^{m'-1} \{ f(m,\, n-1) \log v + f(m,\, n-1,\, \log m) \},$$

$$\frac{1}{2^{m-1}} \{ m_{m'} \cdot \theta_1(v) - m_{m'-1} \cdot 3^{n-1} \cdot \theta_1(3v) + \ldots + (-1)^{m'} \cdot m^{n-1} \theta_1(mv) \}$$
$$+ \frac{\delta_1}{2^{m-1}} \cdot (-1)^{m'} \{ f_1(m,\, n-1) \log v + f_1(m,\, n-1,\, \log m) \}.$$

In dem ersten dieser Ausdrücke ist m gerade, n ungerade, und $n-1 < m$, jedoch $n-1$ wenigstens $=2$, daher $f(m, n-1) = 0$; in dem zweiten ist m ungerade, n gerade, $n-1 < m$ und $n-1$ wenigstens $=1$, daher $f_1(m, n-1) = 0$; hiermit verschwinden die den Factor $\log v$ enthaltenden Glieder. Für $v = \infty$ erhalten ferner $\theta(2v)$, $\theta(4v)$, ... alle denselben endlichen Werth $\theta(\infty) = \theta$ und eben so $\theta_1(v)$, $\theta_1(3v)$, ... denselben endlichen Werth $\theta_1(\infty) = \theta_1$. Daher verwandeln sich für $v = \infty$ die ersten Glieder der beiden vorstehenden Ausdrücke in

$$\frac{\theta}{2^m} \cdot (-1)^{m'-1} \cdot f(m,\, n-1) \quad \text{und} \quad \frac{\theta_1}{2^{m-1}} \cdot (-1)^{m'} \cdot f_1(m,\, n-1),$$

und werden also gleich Null. Es bleiben also als Werthe des gesuchten Integrals

$\frac{(-1)^{m'-1} \cdot \delta}{2^m} f(m,\, n-1,\, \log m)$ für ein gerades m und ungerades n,

$\frac{(-1)^{m'} \cdot \delta_1}{2^{m-1}} f_1(m,\, n-1,\, \log m)$ für ein ungerades m und gerades n;

übereinstimmend mit den vorher gefundenen.

XXII.

Méthode nouvelle de discussion des lignes et surfaces du second ordre.

(Méthode des sections planes.)

Par

Monsieur *Georges Dostor,*

Docteur ès sciences mathématiques, Membre de la Société des Sciences et Arts de l'Ile de la Réunion (Mer des Indes).

---

1. Cette méthode consiste à ramener l'étude de la surface à celle des sections qu'y déterminent certains plans. Elle fournit des caractères analytiques, qui permettent de reconnaître immédiatement la nature géométrique de la surface.

L'équation du second degré

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \quad (1)$$

peut représenter trois espèces de surfaces, auxquelles répondent des caractères analytiques bien destincts, que l'on obtient immédiatement par la translation de l'origine au centre même de la surface, supposé réel ou imaginaire, unique ou multiple, à une distance finie ou à l'infini.

§. 1. Surfaces douées d'un centre.

2. Supposons que la surface (1) soit rapportée à son centre; l'équation (1) se change en

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + H = 0, \quad (2)$$

où l'on a

$$H = F + \frac{NC + N'C' + N''C''}{D}, \quad (I)$$

en même temps que

$$\left.\begin{aligned}
D&=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'',\\
&=A(B^2-A'A'')-B'(B''B-A'B')-B''(BB'-A''B''),\\
&=A'(B'^2-A''A)-B''(BB'-A''B'')-B(B'B''-AB),\\
&=A''(B''^2-AA')-B(B'B''-AB)-B'(B''B-A'B');
\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}
-N&=C(B^2-A'A'')+C'(A''B''-BB')+C''(A'B'-BB''),\\
&=B(BC-B'C'-B''C'')-CA'A''+C'A''B''+C''A'B';\\
-N'&=C'(B'^2-A''A)+C''(AB-B'B'')+C(AB-B''B),\\
&=B'(B'C'-B''C''-BC)-C'A''A+C''AB+CA''B'';\\
-N''&=C''(B''^2-AA')+C(A'B'-B''B)+C'(A'B'-BB'),\\
&=B''(B''C''-BC-B'C')-C''AA'+CA'B'+C'AB.
\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

Les égalités (II) donnent :

$$\left.\begin{aligned}
AD&=(AB-B'B'')^2-(B'^2-A''A)(B''^2-AA'),\\
A'D&=(A'B'-B''B)^2-(B''^2-AA')(B^2-A'A''),\\
A''D&=(A''B''-BB')^2-(B^2-A'A'')(B'^2-A''A);
\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned}
BD&=(B^2-A'A'')(AB-B'B'')-(A'B'-B''B)(A''B''-BB'),\\
B'D&=(B'^2-A''A)(A'B'-B''B)-(A''B''-BB')(AB-B'B''),\\
B''D&=(B''^2-AA')(A''B''-BB')-(AB-B'B'')(A'B'-B''B).
\end{aligned}\right\}\text{(V)}$$

Les équations (III) fournissent aussi :

(VI)

$$\begin{aligned}
NC-N'C'-N''C''&=2C'C''(AB-B'B'')-C^2(B^2-A'A'')\\
&\quad+C'^2(B'^2-A''A)+C''^2(B''^2-AA'),\\
N'C'-N''C''-NC&=2C''C(A'B'-B''B)-C'^2(B'^2-A''A)\\
&\quad+C''^2(B''^2-AA')+C^2(B^2-A'A''),\\
N''C''-NC-N'C'&=2CC'(A''B''-BB')-C''^2(B''^2-AA')\\
&\quad+C^2(B^2-A'A'')+C'^2(B'^2-A''A);
\end{aligned}$$

d'où on tire

(VII)

$$\begin{aligned}
NC+N'C'+N''C''&=C^2(B^2-A'A'')+C'^2(B'^2-A''A)+C''^2(B''^2-AA')\\
&\quad-2C'C''(AB-B'B'')-2C''C(A'B'-B''B)-2CC'(A''B''-BB'),
\end{aligned}$$

et, parsuite,

(VIII)

$$(NC+N'C'+N''C'')(B^2-A'A'')=-N^2+D(A'C''^2+A''C'^2-2BC'C''),$$
$$(NB+N'C'+N''C'')(B'^2-A''A)=-N'^2+D(A''C^2+AC''^2-2B'C''C),$$
$$(NC+N'C'+N''C'')(B''^2-AA')=-N''^2+D(AC'^2+A'C^2-2B''CC').$$

Dans le cas particulier, ou l'on a

$$A=0, \quad A'=0, \quad A''=0,$$

les relations précédentes se réduisent à:

$$\left.\begin{aligned} D &= -2BB'B'', \\ N &= B(B'C'+B''C''-BC), \\ N' &= B'(B''C''+BC-B'C'), \\ N'' &= B''(BC+B'C'-B''C''); \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

$$\left.\begin{aligned} N'C'+N''C''-NC &= B^2C^2-(B'C'-B''C'')^2, \\ N''C''+NC-N'C' &= B'^2C'^2-(B''C''-BC)^2, \\ NC+N'C'-N''C'' &= B''^2C''^2-(BC-B'C')^2; \end{aligned}\right\} \quad \text{(X)}$$

$$\begin{aligned} NC+N'C'+N''C'' = {} & 2(BB'CC'+B'B''C'C''+B''BC''C) \\ & -(B^2C^2+B'^2C'^2+B''^2C''^2). \end{aligned} \quad \text{(XI)}$$

3. Les trois plans de coordonnées coupent la surface suivant trois lignes représentées respectivement par les équations

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+A'y^2+2B''xy+H &= 0, \\ Ax^2+A''z^2+2B'xz+H &= 0, \\ A'y^2+A''z^2+2Byz+H &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et le plan $y=\beta z$ y détermine une section, qui se projette sur le plan xz suivant la courbe

$$Ax^2+2(B''\beta+B')xz+(A'\beta^2+2B\beta+A'')z^2+H=0, \quad (4)$$

qui sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'expression

$$(B''\beta+B')^2-A(A'\beta^2+2B\beta+A'')$$
$$=(B''^2-AA')\beta^2-2(AB-B'B'')\beta+(B'^2-AA''),$$

qui, en vertu de la première des relations (IV), peut s'écrire

$$\frac{[(B''^2-AA')\beta-(AB-B'B'')]^2-AD}{B''^2-AA'}, \qquad (5)$$

est inférieure, égale ou supérieure à zéro.

4. *Caractères analytiques de l'ellipsoïde.* Supposons que l'équation (2) représente un ellipsoïde. Les trois sections (3) par les plans coordonnés seront des ellipses; par conséquent, les trois différences

$$B^2-A'A'',\quad B'^2-A''A,\quad B''^2-AA'$$

sont toutes négatives, ce qui exige que les trois coéfficients

$$A,\ A',\ A''$$

des carrés des variables soient différents de zéro, de même signe, et, parsuite, positifs; puisqu'il est toujours admis que le premier terme de l'équation (2) a été rendu positif.

Il faudra de plus que la section (4) soit une ellipse, quel que soit β; ou, en d'autres termes, que l'expression (5) soit négative, pour toute valeur du paramètre variable β du plan sécant. Comme le dénominateur B''^2-AA' de la quantité (5) est négatif, le numérateur devra toujours être positif. Il est donc d'une nécessité absolue que le polynome D soit négatif.

Il est du reste évident que notre ellipsoïde sera réel et fini, se réduira à un point ou sera imaginaire, selon que les sections elliptiques (3) seront réelles et finies, se réduiront à leur centre, ou seront imaginaires, conditions qui sont exprimées par les trois relations

$$H<0,\quad H=0,\quad H>0.$$

Puisque D est négatif, ces trois relations peuvent être remplacées par les suivantes:

$$NC+N'C'+N''C''+FD>0,\quad NC+N'C'+N''C''+FD=0,$$
$$NC+N'C'+N''C''+FD<0.$$

Si nous rapprochons toutes ces conditions et que nous tenions compte des observations faites au numéro précédent, nous pouvons en déduire le théorème suivant:

Pour que l'équation du second degré à trois variables représente un ellipsoïde, il faut et il suffit

1° *que les carrés des variables se trouvent dans l'équation et soient affectés du même signe;*

2° *que les différences* $B^2 - A'A''$, $B'^2 - A''A$, $B''^2 - AA'$ *soient négatives ;*

3° *que le polynome D soit inférieur à zéro.*

Cet ellipsoïde est réel et fini, se réduit à son centre ou est imaginaire, suivant que l'expression

$$NC + N'C' + N''C'' + FD$$

est supérieure, égale ou inférieure à zéro.

5. *Caractères analytiques des hyperboloïdes:* Lorsque D est différent de zéro, l'équation (2) représente nécessairement une surface à centre ; donc, dans ce cas, l'un des deux hyperboloïdes, ou le cône, chaque fois qu'elle n'exprime pas l'ellipsoïde. Ces circonstances se présentent donc pour

$$D < 0, \quad B''^2 - AA' > 0;$$

et, pour

$$D > 0.$$

Il reste à séparer ces trois surfaces.

Il est d'abord évident qu'on a le cône, si $H = 0$.

Supposons que le coéfficient A de x^2 ne soit pas nul. En résolvant l'équation (2) par rapport à x, nous trouvons

$$Ax + B''y + B'z$$

$$= \pm \sqrt{(B''^2 - AA')y^2 - 2(AB - B'B'')yz + (B'^2 - A''A)z^2 - AH}. \quad (6)$$

Si $B''^2 - AA'$ n'est pas nul, cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$Ax + B''y + B'z$$

$$= \pm \sqrt{\frac{[(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z]^2 - ADz^2}{B''^2 - AA'} - AH}. \quad (7)$$

Pour le cône asymptote, nous trouvons

$$Ax + B''y + B'z = \pm \sqrt{\frac{[(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z]^2 - ADz^2}{B''^2 - AA'}}. \quad (8)$$

L'inspection de ces deux dernières équations fait voir que

1° si $D < 0$, $B''^2 - AA' > 0$, le cône asymptote admet les deux génératrices rectilignes

$$(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z = 0, \quad Ax + B''y + B'z \mp \sqrt{\frac{-AD}{B''^2 - AA'}} = 0;$$

2° si $D > 0$, il admettra les génératrices rectilignes

$$(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z = \pm z\sqrt{AD}, \quad Ax + B''y + B'z = 0.$$

Or, si la surface (2) est un hyperboloïde à une nappe, elle admettra des génératrices rectilignes parallèles à celles du cône. Mais, d'après l'équation (7), cette circonstance ne pourra se présenter, dans le premier cas, que si H est positif ou

$$NC + N'C' + N''C'' + FD < 0,$$

puisque D est négatif; et, dans le second cas, que si H est négatif ou encore $NC + N'C' + N''C'' + FD < 0$, attendu que D est positif.

Les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde, qui correspondent à celles du cône, seront alors respectivement

$$(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z \pm \sqrt{AH} = 0,$$

$$Ax + B''y + B'z \pm z\sqrt{\frac{-AD}{B''^2 - AA'}} = 0;$$

et

$$(B''^2 - AA')y - (AB - B'B'')z \pm z\sqrt{AD} = 0,$$

$$Ax + B''y + B'z \pm \sqrt{-AH} = 0.$$

Si le coéfficient de A est nul, l'équation du cône

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

est satisfaite par les valeurs $y = 0$, $z = 0$; le cône admet donc l'axe des x pour génératrice rectiligne.

Dans le cas, où l'on a en même temps $A = 0$, $A' = 0$, les axes des x et des y sont les deux des génératrices rectilignes du cône asymptote.

Il en serait ainsi des trois axes, si l'on avait en même temps $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$.

Or une discussion analogue à la précédente ferait voir que nos conclusions subsistent encore dans ces cas réduits. Nous pourrons donc dire que

L'équation du second degré à trois variables représente un hyperboloïde à une nappe, un cône, ou un hyperboloïde a deux nappes, suivant que l'on a

1° $D<0$, $B''^2-AA'>0$; ou $D>0$; et $NC+N'C'+N''C''+FD<0$;

2° $D<0$, $B''^2-AA'>0$; ou $D>0$; et $NC+N'C'+N''C''+FD=0$;

3° $D<0$, $B''^2-AA'>0$; ou $D>0$; et $NC+N'C'+N''C''+FD<0$.

§. II. Surfaces privées de centre.

6. L'équation (1) représentera l'un ou l'autre des deux paraboloïdes, si le polynome D est nul, et que les quantités N, N', N'' ne sont pas toutes égales à zéro. Dans ce cas, l'une au moins des trois quantités

$$B^2-A'A'',\quad B'^2-A''A,\quad B''^2-AA'$$

n'est pas nulle: car les trois plans coordonnés ne peuvent pas être tous les trois parallèles à l'axe du paraboloïde. Admettons donc que B''^2-AA' soit différent de zéro.

7. Cependant, avant d'aller plus loin, établissons quelques identités qui conviennent au cas où D est égal à zero et l'une au moins des trois quantités N, N', N'' différente de zéro. Ces identités s'obtiennent aisément; nous nous contenterons de les écrire, sans les démontrer:

$$\left.\begin{aligned}\frac{N}{B^2-A'A''}&=\frac{N'}{A''B''-BB'}=\frac{N''}{A'B'-B''B},\\ \frac{N'}{B'^2-A''A}&=\frac{N''}{AB-B'B''}=\frac{N}{A''B''-BB'},\\ \frac{N''}{B''^2-AA'}&=\frac{N}{A'B'-B''B}=\frac{N'}{AB-B'B''};\end{aligned}\right\}\quad\text{(XII)}$$

$$N(AB-B'B'')=N'(A'B'-B''B)=N''(A''B''-BB');\quad\text{(XIII)}$$

$$\left.\begin{aligned}AN+B''N'+B'N''&=0,\\ B''N+A'N'+BN''&=0,\\ B'N+BN'+A''N''&=0;\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIV)}$$

$$\frac{N^2}{B^2-A'A''}=\frac{N'^2}{B'^2-A''A}=\frac{N''^2}{B''^2-AA'}=\frac{N'N''}{AB-B'B''}=\frac{N''N}{A'B'-B''B}$$
$$=\frac{NN'}{A''B''-BB'};\quad\text{(XV)}$$

$$B^2-A'A''=\frac{-N^2}{NC+N'C'+N''C''},\quad B'^2-A''A=\frac{-N'^2}{NC+N'C'+N''C''},$$

$$B''^2-AA'=\frac{-N''^2}{NC+N'C'+N''C''};\qquad \text{(XVI)}$$

$$AB-B'B''=\frac{-N'N''}{NC+N'C'+N''C''},\quad A'B'-B''B=\frac{-N''N}{NC+N'C'+N''C''},$$

$$A''B''-BB'=\frac{-NN'}{NC+N'C'+N''C''};\qquad \text{(XVII)}$$

$$\left.\begin{aligned} A&=-\frac{N'N''}{N}\left(\frac{B'}{N'}+\frac{B''}{N''}\right),\\ A'&=-\frac{N''N}{N'}\left(\frac{B''}{N''}+\frac{B}{N}\right),\\ A''&=-\frac{NN'}{N''}\left(\frac{B}{N}+\frac{B'}{N'}\right);\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XVIII)}$$

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{A'N'^2+A''N''^2-AN^2}{2N'N''},\\ B'&=\frac{A''N''^2+AN^2-A'N'^2}{2N''N},\\ B''&=\frac{AN^2+A'N'^2-A''N''^2}{2NN'};\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XIX)}$$

$$AN^2+A'N'^2+A''N''^2=2(BN'N''+B'N''N+B''NN').\ \text{(XX)}$$

8. ***Caractères analytiques du paraboloïde elliptique.*** Si B''^2-AA' est négatif, la section

$$Ax^2+2B''xy+A'y^2+2Cx+2C'y+F=0$$

de la surface (I) par le plan xy sera une ellipse. Ainsi cette surface est un paraboloïde elliptique. Nous ferons observer que, dans ce cas, les deux autres différences $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$ sont ou négatives ou égales à zéro, ce qui exige que les trois coéfficients A, A', A'' soient différents de zéro, de même signe, et, parsuite, positifs.

Si cependant l'un de ces trois coéfficients était nul, ce qui ne pourrait avoir lieu que pour A'', il faudrait que B et B' fussent aussi nuls.

De ce qui précède, il nous est permis de conclure que

L'équation du second degré à trois variables représente un paraboloïde elliptique, lorsque, le polynome D étant nul, l'un au moins des trois numérateurs N, N', N'' est différent de zéro, et que l'une des trois différences $B^2 - A'A''$, $B'^2 - A''A$, $B''^2 - AA'$ est négative, les deux autres étant négatives ou nulles.

9. *Caractères analytiques du paraboloïde hyperbolique.* Par des considérations analogues aux précédentes on trouve que

L'équation du second degré à trois variables représente un paraboloïde hyperbolique, si le dénominateur D est nul, que l'un au moins des trois numérateurs N, N', N'' est différent de zéro, et que l'une des trois quantités $B^2 - A'A''$, $B'^2 - A''A$, $B''^2 - AA'$ est positive, les deux autres étant nulles ou positives.

§. III. Surfaces douées d'une infinité de centres en ligne droite.

10. Ces surfaces sont caractérisées par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

supposées distinctes deux à deux, mais telles que l'une quelconque d'entre elles soit une conséquence des deux autres. L'équation (1), dans ce cas, peut représenter un cylindre elliptique ou un cylindre hyperbolique. Si les trois droites représentées par la combinaison deux à deux des équations (9) sont parallèles, sans se confondre, le cylindre est parabolique.

11. *Cylindres elliptiques.* Les sections planes de ces cylindres sont des ellipses ou des génératrices rectilignes. Si aucun des plans (9) n'est parallèle à l'un des axes de coordonnées, les traces du cylindre sur les trois plans de coordonnées sont des ellipses. Il faudra donc que nous ayons

$$B^2 - A'A'' < 0, \quad B'^2 - A''A < 0, \quad B''^2 - AA' < 0,$$

en même temps que

$$D = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0, \quad N'' = 0.$$

Si le cylindre était parallèle au plan des yz, sa trace sur ce plan serait deux droites parallèles, ce qui exigerait que l'on eût

$$B^2 - A'A'' = 0, \quad B'^2 - A''A < 0, \quad B''^2 - AA' < 0.$$

Enfin si le cylindre était parallèle à l'axe des z, on aurait

$$B^2 - A'A'' = 0, \quad B'^2 - A''A = 0, \quad B''^2 - AA' < 0.$$

Supposons donc que $B''^2 - AA'$ soit celle de ces trois quantités, qui n'est pas nulle. La section par le plan des xy sera une ellipse représentée par l'équation

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F = 0; \qquad (10)$$

or cette ellipse est réelle et finie, se réduit à son centre, ou est imaginaire, suivant qu'on a

$$Cn + C'n' + Fd$$

positif, nul ou négatif, où

$$d = B''^2 - AA', \quad n = A'C - B''C', \quad n' = AC' - B''C.$$

Donc

L'équation (1) *représentera un cylindre elliptique réel et fini, un cylindre elliptique infiniment mince ou une droite, ou un cylindre elliptique imaginaire, suivant que*

1° $D=0, \quad N=0, \quad B''^2 - AA' < 0, \quad Cn + C'n' + Fd < 0;$

2° $D=0, \quad N=0, \quad B''^2 - AA' < 0, \quad Cn + C'n' + Fd = 0;$

3° $D=0, \quad N=0, \quad B''^2 - AA' < 0, \quad Cn + C'n' + Fd > 0.$

12. ***Cylindres hyperboliques.*** La discussion du numéro précédent nous montre de suite que

L'équation (1) *représente un cylindre hyperbolique ou deux plans qui se coupent, selon que*

1° $D=0, \quad N=0, \quad B''^2 - AA' > 0, \quad Cn + C'n' + Fd \neq 0,$ *)

2° $D=0, \quad N=0, \quad B''^2 - AA' > 0, \quad Cn + C'n' + Fd = 0.$

Nous ferons observer qu'on a

---

*) Le signe =/= signifie différent de.

$$Cu + C'v' + Fd = \frac{A'C^2 - 2B''CC' + AC'^2}{B''^2 - AA'} + F.$$

13. *Cylindres paraboliques.* Ces cylindres peuvent être regardés comme issus de cylindres elliptiques ou hyperboliques, dont les axes se sont transportés à l'infini. On peut donc dire aussi que les cylindres paraboliques sont doués d'une infinité de centres, disposés sur une droite reléguée à l'infini.

Les caractères analytiques de ces cylindres sont évidemment

$$D=0,\quad N=0,\quad B^2 - A'A''=0,\quad B'^2 - A''A=0,\quad B''^2 - AA'=0.$$

§. IV. Surfaces douées d'une infinité de centres situés dans un même plan.

14. Ces surfaces se présentent dans l'équation (1), chaque fois que les équations (9) rentrent dans une seule, qui est l'équation du *plan central.* Elles comprennent deux plans parallèles, réels ou imaginaires, ou bien un seul plan, et dérivent du cylindre parabolique.

Dans ce cas, les premiers membres des équations

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F = 0,$$

$$Ax^2 + 2B'xz + A''z^2 + 2Cx + 2C''z + F = 0,$$

$$A'y^2 + 2Byz + A''z^2 + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

devront être décomposables en un carré d'une fonction du premier degré, augmenté d'une quantité constante. Or ces équations peuvent s'écrire, en nous bornant aux deux premières,

$$(Ax + B''y + C)^2 - (B''^2 - AA')y^2 - 2(B''C - AC')y - (C^2 - AF) = 0,$$

$$(Ax + B'z + C)^2 - (B'^2 - A''A)z^2 - 2(B'C - AC'')z - (C^2 - AF) = 0.$$

Il faudra donc que l'on ait, outre $D=0$ et $N=0$,

$$B''^2 - AA' = 0,\quad B'^2 - AA'' = 0,\quad \frac{A}{C} = \frac{B''}{C'} = \frac{B'}{C''}.$$

Les deux plans sont réels, imaginaires ou se confondent, suivant que l'on a

$$C^2 - AF > 0,\quad C^2 - AF < 0,\quad C^2 - AF = 0.$$

§. V. Tableau général de la discussion de

15. *Représentation géométrique de l'équation.*		
Surfaces ayant un centre unique à une distance finie.	*Genre ellipsoïde*	Ellipsoïde réel et fini; Un point; Ellipsoïde imaginaire.
	Genre hyperboloïde	Hyperboloïde à une nappe; Cône du second degré; Hyperboloïde à deux nappes.
Surfaces privées de centre à distance finie et ayant un seul centre à l'infini.	*Genre paraboloïde*	Paraboloïde elliptique; Paraboloïde hyperbolique.
Surfaces douées d'une infinité de centres situés sur une droite à distance finie, ou sur une droite à l'infini ou dans un plan.	*Cylindre genre elliptique*	Cylindre elliptique; Une droite; Cylindre elliptique imaginaire.
	Cylindre genre hyperbolique	Cylindre hyperbolique; Deux plans sécants.
	Cylindre genre parabolique	Cylindre parabolique; Deux plans parallèles; Un seul plan; Deux plans parallèles imaginaires.

(*Voyez les notes*

l'équation du second degré à trois variables.

Caractères analytiques de la surface.			
$D<0$,	$B''^2-AA'<0$,		$NC+N'C'+N''C''+FD>0$;
$D<0$,	$B''^2-AA'<0$,		$NC+N'C'+N''C''+FD=0$;
$D<0$,	$B''^2-AA'<0$,		$NC+N'C'+N''C''+FD<0$.
$D<0$ et	$B''^2-AA'>0$, ou	$D>0$,	$NC+N'C'+N''C''+FD<0$;
$D<0$ et	$B''^2-AA'>0$, ou	$D>0$,	$NC+N'C'+N''C''+FD=0$;
$D<0$ et	$B''^2-AA'>0$, ou	$D>0$,	$NC+N'C'+N''C''+FD>0$.
$D=0$,	$N\neq0$, (1)	$B''^2-AA'<0$, (2)	
$D=0$,	$N\neq0$, (1)	$B''^2-AA'>0$, (3)	
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'<0$, (4)	$AC'^2-2B''CC'+A'C^2+F(B''^2-AA')>0$;
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'<0$, (4)	$AC'^2-2B''CC'+A'C^2+F(B''^2-AA')=0$;
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'<0$, (4)	$AC'^2-2B''CC'+A'C^2+F(B''^2-AA')<0$.
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'>0$, (5)	$AC'^2-2B''CC'+A'C^2+F(B''^2-AA')\neq0$;
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'>0$, (5)	$AC'^2-2B''CC'+A'C^2+F(B''^2-AA')=0$.
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'=0$, (6)	$\frac{A}{C}\neq\frac{B''}{C'}\neq\frac{B'}{C''}$; (7)
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'=0$, (6)	$\frac{A}{C}=\frac{B''}{C'}=\frac{B'}{C''}$, (8) $C^2-AF>0$;
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'=0$, (6)	$\frac{A}{C}=\frac{B''}{C'}=\frac{B'}{C''}$, (8) $C^2-AF=0$;
$D=0$,	$N=0$,	$B''^2-AA'=0$, (6)	$\frac{A}{C}=\frac{B''}{C'}=\frac{B'}{C''}$, (8) $C^2-AF<0$.

pag. 198.)

---

(1) Il suffit que l'un des trois numérateurs N, N', N'' soit différent de zéro.

(2) Aucune des trois différences $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$, B''^2-AA' n'est positive, et l'une d'elles, au moins, est négative.

(3) Aucune des trois différences B^2-AA', $B'^2-A''A$, B''^2-AA' n'est négative, et l'une d'elles, au moins, est positive.

(4) et (5) Si l'une des trois différences $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$, B''^2-AA' était nulle, le cylindre serait parallèle au plan correspondant des coordonnées ; et, si deux d'entre elles étaient nulles, le cylindre serait parallèle à l'axe, intersection des deux plans de coordonnées correspondant à ces différences ; mais, dans ce cas, les autres différences sont toujours négatives (4) ou positives (5), suivant que le cylindre est elliptique ou hyperbolique.

(6) Les trois différences $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$, B''^2-AA' sont toujours nulles dans tous ces cas.

(7) Si les trois rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B''}{C'}$, $\frac{B'}{C''}$ étaient égaux, il faudrait que les trois rapports $\frac{A'}{C'}$, $\frac{B}{C''}$, $\frac{B''}{C}$ ou les rapports $\frac{A''}{C''}$, $\frac{B'}{C}$, $\frac{B}{C'}$ ne fussent pas égaux tous les trois.

(8) Tous ces rapports sont nécessairement égaux. Il en est de même de $\frac{A'}{C'}$, $\frac{B}{C''}$, $\frac{B''}{C}$ et de $\frac{A''}{C''}$, $\frac{B'}{C}$, $\frac{B}{C'}$.

§. VI. Résumé général de la discussion des surfaces du second ordre.

I. Les trois carrés des variables se trouvent dans l'équation (1) de la surface.

16. 1° *Si ces trois carrés sont de même signe, et que les trois rectangles se trouvent dans l'équation* (1), celle-ci pourra représenter toute espèce de surface du second degré.

Pour reconnaître l'espèce de surface exprimée par l'équation (1), on calcule les trois différences

$$B^2 - A'A'', \quad B'^2 - A''A, \quad B''^2 - AA'. \qquad (11)$$

A. Si ces trois différences sont nulles, l'équation (1) représentera un cylindre parabolique ou l'un de ses dérivés. (Deux plans parallèles, un seul plan, deux plans parallèles imaginaires).

B. Si une seule ou deux des différences (11) sont nulles, la surface (1) ne pourra pas être d'ellipsoïde. Pour déterminer la nature de la surface, on calcule D.

a. Si D est égal à zéro, la surface (1) ne sera ni un hyperboloïde, ni un cône. — On calcule ensuite N, N', N''.

α. S'ils sont nuls tous les trois, la surface (1) ne pourra pas être de paraboloïde; elle est un cylindre elliptique ou l'un de ses dérivés (Une droite ou un cylindre elliptique imaginaire), un cylindre hyperbolique ou deux plans sécants, que celle des différences (11), qui n'est pas nulle est inférieure ou supérieure à zéro.

β. Si l'un ou l'autre, ou tous les trois numérateurs N, N', N'' sont différents de zéro, la surface sera celle de l'un des deux paraboloïdes. Le paraboloïde sera elliptique ou hyperbolique, suivant que la différence (11) qui n'est pas nulle, est inférieure ou supérieure à zéro.

b. Si D est différent de zéro, la surface (1) sera l'hyperboloïde à une nappe, le cône du second degré ou l'hyperboloïde à deux nappes.

C. Aucune des trois différences (11) n'est égale à zéro. L'équation (1) pourra représenter toutes les surfaces du second degré, à l'exception des cylindres genre parabolique.

a. Si le dénominateur D est nul, en même temps que les trois numérateurs N, N', N'', la surface sera un cylindre elliptique ou hyperbolique, suivant que les différences (11) sont inférieures ou supérieures à zéro.

b. Si D est nul et que l'un des numérateurs N, N', N'' est différent de zéro, la surface sera un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, suivant que les différences (11) sont inférieures ou supérieures à zéro.

c. Si D est différent de zéro, la surface est à centre unique.

α. Elle sera l'ellipsoïde, pour $D < 0$, $B''^2 - AA' < 0$.

β. Elle sera l'hyperboloïde à une nappe, le cône ou l'hyperboloïde à deux nappes, pour $D < 0$ et $B''^2 - AA' > 0$, ou pour $D > 0$, et cela suivant que $NC + N'C' + N''C'' + FD$ est inférieur, égal ou supérieur à zéro.

17. 2° *Le trois carrés sont de même signe et tous les rectangles ne sont pas dans l'équation* (1). Dans ce cas la surface n'est ni un paraboloïde hyperbolique, ni un cylindre hyperbolique, ni un cylindre parabolique; elle ne pourra être l'un des deux hyperboloïdes ou le cône que si l'on a $D > 0$.

Si les trois rectangles manquent dans l'équation (1), la surface est un ellipsoïde ou l'un de ses dérivées.

18. 3° *Les trois carrés ne sont pas de même signe.* L'équation (1) ne pourra représenter aucune des surfaces suivantes: l'ellipsoïde et ses dérivées, le paraboloïde elliptique, le cylindre elliptique et ses dérivées, le cylindre parabolique et ses dérivées.

A. Pour $D = 0$, elle exprimera le cylindre hyperbolique ou deux plans sécants, ou le paraboloïde hyperbolique, suivant que les trois numérateurs N, N', N'' sont nuls, ou que l'un d'eux au moins est différent de zéro.

B. Lorsque D est différent de zéro, on a l'un des deux hyperboloïdes ou le cône.

II. L'un des trois carrés manque dans l'équation (1).

(La surface ne pourra pas être d'ellipsoïde.)

19. 1° *Les deux autres carrés sont de même signe.* L'équation (1) pourra représenter toutes les surfaces du second ordre, autres que l'ellipsoïde. Cependant elle ne donnera le paraboloïde elliptique, le cylindre elliptique ou ses dérivées, le cylindre parabolique ou ses dérivées, qu'autant que les rectangles, qui renferment les variables du carré absent, manquent dans l'équation.

20. 2° *Les deux autres carrés sont de signes contraires.* La surface ne sera que l'un des deux hyperboloïdes, le paraboloïde hyperbolique, le cylindre hyperbolique ou son dérivé.

III. Deux des trois carrés manquent dans l'équation (1).

21. La surface ne pourra pas être l'ellipsoïde, ni aucun de ses dérivés, ni le paraboloïde elliptique, ni le cylindre elliptique ou l'un de ses dérivés, ni le cylindre parabolique ou l'un de ses dérivés. L'équation ne représentera que l'un ou l'autre des deux hyperboloïdes, le cône, le paraboloïde hyperbolique, le cylindre hyperbolique ou son dérivé.

1° La surface sera un cylindre hyperbolique, ou se composera de deux plans sécants, si l'on a $D=0$, $N=0$, $N'=0$, $N''=0$.

2° Elle sera un paraboloïde hyperbolique pour $D=0$, et l'un au moins des numérateurs N, N', N'' différents de zéro.

3° Elle sera l'un ou l'autre des deux hyperboloïdes ou le cône, pour D différent de zéro.

IV. L'équation (1) ne renferme aucun des trois carrés, mais contient les trois rectangles.

22. Dans ce cas, elle ne pourra représenter que l'un ou l'autre des deux hyperboloïdes ou le cône.

V. Les trois carrés et un rectangle manquent dans l'équation (1).

23. L'équation ne représentera que le paraboloïde hyperbolique, ou le cylindre hyperbolique ou son dérivé (deux plans sécants).

1° Elle ne donne la première de ces surfaces qu'autant qu'elle renferme au moins l'une des premières puissances des deux variables du rectangle absent.

Si ces deux variables se trouvent à la première puissance dans l'équation, il faudra en outre que les coëfficients de ces termes du premier degré ne soient pas proportionnels aux coëfficients des deux rectangles présents.

2° Elle exprime le cylindre hyperbolique ou son dérivé dans tous les autres cas.

VI. Les trois carrés et deux rectangles manquent dans l'équation.

24. Dans ce cas elle exprimera ou 1° le paraboloïde hyperbolique, si le terme du premier degré, qui renferme la variable commune aux rectangles absents, se trouve dans l'équation; ou 2° le cylindre hyperbolique, si ce terme manque dans l'équation.

XXIII.

Méthode rapide pour écrire les équations aux axes des lignes et surfaces du second ordre.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,

Docteur ès sciences mathématiques, Membre de la Société des Sciences et Arts de l'Ile de la Réunion (Mer des Indes).

1. La méthode, que nous publions dans cet article, est simple et élémentaire; elle est indépendante de la transformation des coordonnées. Elle permet d'écrire immédiatement, à l'aide des dérivées, l'équation aux axes de l'ellipse et de l'hyperbole, l'équation de l'axe de la parabole, ainsi que les équations aux axes de l'ellipsoïde, des hyperboloïdes et des paraboloïdes. Ces résultats s'obtiennent de suite, quelque compliquées que soient les équations de ces courbes et de ces surfaces, et quelque soient, d'ailleurs, les angles des axes de coordonnées.

I. *Equation aux axes de l'ellipse et de l'hyperbole.*

2. Supposons que l'équation

$$f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \qquad (1)$$

soit celle d'une conique à centre; admettons qu'elle soit rapportée à des axes de coordonnées inclinés entre eux d'un angle θ. Soient x', y' les coordonnées d'un sommet; p, q celles du centre de la courbe. L'axe, qui passe par ce sommet, est représenté par une équation dont le coéfficient angulaire est

$$m = \frac{y'-q}{x'-p}.$$

La tangente, qui passe par le même point, a un coëfficient d'inclinaison égal à

$$m' = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}.$$

Ces deux droites sont perpendiculaires entre elles; par conséquent, leurs coëfficients angulaires devront satisfaire à la relation de condition connue

$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0;$$

ce qui donne l'équation

$$1 - \frac{y'-q}{x'-p}\cdot\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}} + \left(\frac{y'-q}{x'-p} - \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\right)\cos\theta = 0,$$

ou

$$(f'_{x'} - \cos\theta f'_{y'})(y'-q) = (f'_{y'} - \cos\theta f'_{x'})(x'-p), \qquad (2)$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{f'_{x'}}{x'-p+(y'-q)\cos\theta} = \frac{f'_{y'}}{y'-q+(x'-p)\cos\theta}.$$

Or, je dis que l'équation

$$(f'_x - \cos\theta f'_y)(y-q) = (f'_y - \cos\theta f'_x)(x-p), \qquad (I)$$

que l'on obtient en remplaçant dans l'une de ces trois dernières relations les coordonnées x', y' du sommet par les variables courantes x, y, est précisément l'équation aux axes de la conique (1).

En effet, la ligne représentée par l'équation (I) passe par chacun des points x', y' et p, q, puisque, par (2), cette équation est satisfaite par les coordonnées de ces points; de plus, si l'on remplace dans cette équation f'_y, f'_x par leurs valeurs respectives

$$2Ay + Bx + D = 2Ay + Bx - 2Aq - Bp = 2A(y-q) + B(x-p),$$
$$By + 2Cx + E = By + 2Cx - Bq - 2Cp = B(y-q) + 2C(x-p)$$

et la transforme en

$$(B - 2A\cos\theta)(y-q)^2 - 2(A-C)(y-q)(x-p)$$
$$-(B - 2C\cos\theta)(x-p)^2 = 0,$$

et que l'on résolve cette dernière, on trouvera qu'elle se décompose dans les équations du premier degré

$$(B - 2A\cos\theta)(y-q) - (A-C)(x-p)$$
$$\pm (x-p)\sqrt{(A-C)^2 + (B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)} = 0,$$

ou

$$(B-2C\cos\theta)\,(x-p)-(C-A)\,(y-q)$$

$$\pm(y-q)\sqrt{(C-A)^2+(B-2C\cos\theta)\,(B-2A\cos\theta)}=0.$$

Donc l'équation (I), qui est du second degré, représente deux droites passant par le centre et par les sommets; donc elle est l'équation aux axes de la conique à centre.

De ce qui précède, nous déduisons cette règle bien simple:

Pour avoir l'équation aux axes d'une conique à centre, il suffit de remplacer, dans l'équation de condition

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0$$

de la rectangularité de deux droites

$$y=mx+n,\quad y=m'x+n,$$

m et m' respectivement par les rapports

$$\frac{y-q}{x-p},\quad -\frac{f'_x}{f'_y},$$

où p et q désignent les coordonnées du centre de la conique.

3. Si la conique est rapportée à son centre, l'équation aux axes sera

$$\frac{2Ay+Bx}{y+x\cos\theta}=\frac{2Cx+By}{x+y\cos\theta}, \tag{II}$$

et, dans le cas d'axes de coordonnées rectangulaires,

$$\frac{2Ay+Bx}{y}=\frac{2Cx+By}{x}, \tag{III}$$

c'est-à-dire

$$xf'_y-yf'_x=0. \tag{IV}$$

II. Equation de l'axe de la parabole.

4. Admettons maintenant que l'équation (I) représente une parabole; dans ce cas elle pourra se mettre sous la forme

$$f(x,y)=(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2+Dy+Ex+F=0, \tag{3}$$

qui fait voir, que toutes les droites parallèles à la ligne

$$y\sqrt{A}+x\sqrt{C}=0$$

ne rencontrent la courbe (3) qu'en un seul point ; donc

$$m = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}$$

est le coéfficient angulaire de l'axe de la parabole. Le coéfficient d'inclinaison de la tangente au sommet x', y' est

$$m' = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}};$$

et, comme ces deux droites sont perpendiculaires entre elles, on a la relation de condition

$$1 + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}} - \left(\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} + \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\right)\cos\theta = 0, \qquad (4)$$

ou, en supprimant les accents de x', y' :

$$(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})f'_y + (\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})f'_x = 0, \qquad \text{(V)}$$

que je dis être l'équation de l'axe de la parabole.

En effet, cette équation du premier degré est satisfaite par les coordonnées x', y' du sommet ; elle représente donc une droite passant par le sommet de la courbe. De plus, comme

$$f'_y = 2Ay + Bx + D = 2\sqrt{A}(y\sqrt{A} + x\sqrt{C}) + D,$$
$$f'_x = By + 2Cx + E = 2\sqrt{C}(y\sqrt{A} + x\sqrt{C}) + E,$$

elle peut s'écrire

$$2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})$$
$$+ D(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C}) + E(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A}) = 0,$$

ou

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta}{2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})} = 0 ; \qquad \text{(VI)}$$

elle représente donc une droite parallèle à l'axe ; donc elle représente l'axe même de la parabole (3).

Nous voyons ainsi que

Pour avoir l'axe de la parabole, il suffit de remplacer dans la relation

$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0$$

m et m' respectivement par

$$-\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}, \quad -\frac{f_x}{f_y}.$$

Si le coéfficient B du rectangle xy était négatif dans l'équation de la parabole, il faudrait changer le signe de $\sqrt{C}$ dans tout ce qui précède.

5. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation de l'axe sera

$$\sqrt{A}f'_y + \sqrt{C}f'_x = 0. \qquad \text{(VII)}$$

III. Equations aux axes de l'ellipsoïde et des deux hyperboloïdes.

6. Supposons que l'équation

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \qquad (5)$$

représente une surface à centre (l'ellipsoïde, l'un ou l'autre des deux hyperboloïdes, ou le cône du second degré).

Avant de calculer l'équation aux axes de cette surface, proposons-nous de déterminer l'équation du plan tangent au point x', y', z' de la surface.

L'équation de ce plan sera de la forme

$$a(x-x') + b(y-y') + c(z-z') = 0. \qquad (6)$$

Par le point x', y', z' menons un plan parallèle au plan des xz; il coupe la surface (5) suivant une courbe, dont la projection sur le plan des xz est

$$f(x, y', z) = Ax^2 + A''z^2 + 2B'zx + 2(B''y' + C)x + 2(By' + C'')z + A'y'^2 + 2C'y' + F = 0; \qquad (7)$$

et le plan (6) suivant une droite, qui se projette sur le plan des xz suivant

$$a(x-x') + c(z-z') = 0. \qquad (8)$$

La droite (8) devant être tangente à la courbe (7), au point x', z', nous avons la relation de condition

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_z}{c}. \qquad (9)$$

En coupant la surface par un plan, mené par le point x', y', z', parallèlement au plan des yz, nous trouverons de même

$$\frac{f'_{y'}}{b} = \frac{f'_{z'}}{c}. \qquad (10)$$

Substituant dans (8) les valeurs de a et b tirées de (9) et (10), nous obtenons

$$(x-x')f'_{x'} + (y-y')f'_{y'} + (z-z')f'_{z'} = 0, \qquad (11)$$

pour l'équation du plan tangent à la surface (5) au point x', y', z'.

Cela posé, supposons que x', y', z' soient les coordonnées d'un sommet de la surface (5); p, q, r celles du centre de la surface. L'axe, qui passe par ce sommet, est représenté par deux équations, dont les coéfficients angulaires sont

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x'-p}{z'-r}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{y'-q}{z'-r};$$

or cette droite est perpendiculaire au plan tangent (11); par conséquent, nous avons les égalités de condition

$$\frac{f'_{x'}}{x'-p+(y'-q)\cos\nu+(z'-r)\cos\mu} = \frac{f'_{y'}}{(x'-p)\cos\nu+(y'-q)+(z'-r)\cos\lambda}$$

$$= \frac{f'_{z'}}{(x'-p)\cos\mu+(y'-q)\cos\lambda+(z'-r)},$$

dans lesquelles la suppression des accents aux coordonnées x', y', z' donne les équations

$$\frac{f'_x}{(x-p)+(y-q)\cos\nu+(z-r)\cos\mu} = \frac{f'_y}{(x-p)\cos\nu+(y-q)+(z-r)\cos\lambda}$$

$$= \frac{f'_z}{(x-p)\cos\mu+(y-q)\cos\lambda+(z-r)}, \qquad \text{(VIII)}$$

que je dis être les équations aux axes de la surface (5).

D'abord la ligne représentée par les équations (VIII) passe par le point x', y', z', ainsi que par le centre p, q, r: car les équations sont satisfaites par les coordonnées de ces points. Je dis de plus que cette ligne se compose de trois droites.

Les coéfficients angulaires de la droite, qui passe par les points x', y', z'; p, q, r étant représentées par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, nous pouvons donner une forme plus explicite aux équations (VIII).

En effet, nous avons

$$f'_{x'} = Ax' + B''y' + B'z' + C,$$
$$f'_{y'} = B''x' + A'y' + Bz' + C',$$
$$f'_{z'} = B'x' + By' + A''z + C'',$$

en même temps que

$$Ap + B''q + B'r + C = 0,$$
$$B''p + A'q + Br + C' = 0,$$
$$B'p + Bq + A''r + C'' = 0;$$

il vient, par suite

$$f'_{x'} = A(x'-p) + B''(y'-q) + B'(z'-r),$$
$$f'_{y'} = B''(x'-p) + A'(y'-q) + B(z'-r),$$
$$f'_{z'} = B'(x'-p) + B(y'-q) + A''(z'-r).$$

Substituant dans les équations qui précèdent (VIII), puis remplaçant les rapports

$$\frac{x'-p}{z'-r}, \quad \frac{y'-q}{z'-r}$$

par leurs équivalents $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, nous trouvons les égalités de rapports

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha + \beta\cos\nu + \gamma\cos\mu} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\alpha\cos\nu + \beta + \gamma\cos\lambda} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\alpha\cos\mu + \beta\cos\lambda + \gamma} = S. \quad (12)$$

Nous représentons par S chacun de ces rapports égaux. Ordonnant par rapport aux inconnues α, β, γ, nous en déduisons les trois équations du premier degré

$$\left.\begin{aligned} (A-S)\alpha + (B''-S\cos\nu)\beta + (B'-S\cos\nu)\gamma = 0, \\ (B''-S\cos\nu)\alpha + (A'-S)\beta + (B-S\cos\lambda)\gamma = 0, \\ (B'-S\cos\mu)\alpha + (B-S\cos\lambda)\beta + (A''-S)\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ces trois équations du premier degré doivent avoir lieu entre les deux rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; il faut donc que l'une d'elles soit une conséquence du système des deux autres; cette restriction exige que leur résolution simultanée fournisse des valeurs α, β, γ, dont le dénominateur commun soit nul. On trouve ainsi l'équation de condition

$$(A-S)(A'-S)(A''-S)+2(B-S\cos\lambda)(B'-S\cos\mu)(B''-S\cos\nu)$$
$$-(A-S)(B-S\cos\lambda)^2-(A'-S)(B'-S\cos\mu)^2-(A''-S)(B''-S\cos\nu)^2$$
$$=0, \tag{14}$$

qui, étant développée, devient

$$S^3(1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu)$$
$$-S^2[A\sin^2\lambda+A'\sin^2\mu+A''\sin^2\nu+2B(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)$$
$$+2B'(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+2B''(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)]$$
$$+S[A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2$$
$$-2(AB-B'B'')\cos\lambda-2(A'B'-B''B)\cos\mu-2(A''B''-BB')\cos\nu]$$
$$+(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'')=0.$$

Cette équation est du troisième degré en S; elle fournit pour cette inconnue auxiliaire trois racines, qui toutes les trois sont réelles. En substituant ces trois valeurs successivement dans les équations (12), on trouve pour les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ trois systèmes de valeurs réelles; donc les équations (VIII) représentent trois droites, qui sont les axes de la surface (5). On en déduit la règle suivante :

Lorsqu'une surface du second degré à centre est rapportée à des coordonnées obliques, pour avoir les équations aux axes de cette surface, prenez les dérivées f'_x, f'_y, f'_z par rapport à x, y, z du premier membre de l'équation de la surface; divisez ses dérivées respectivement par

$$x+y\cos\nu+z\cos\mu,\quad x\cos\nu+y+z\cos\lambda,\quad x\cos\mu+y\cos\lambda+z;$$

égalez entre eux les trois quotients obtenus; puis, dans les équations résultantes, des variables x, y, z retranchez les coordonnées respectives p, q, r du centre de la surface.

7. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires et passent par le centre de la surface, il suffit d'égaler entre eux les rapports

$$\frac{f'_x}{x},\quad \frac{f'_y}{y},\quad \frac{f'_z}{z}.$$

Dans le cas où l'origine n'est pas le centre de la surface, il

faudra encore, dans ces équations, diminuer x, y, z des coordonnées p, q, r du centre.

On voit donc que

Si $f(x,y,z)=0$ est l'équation d'une surface du second ordre à centre, rapportée à des axes rectangulaires menés par le centre, les égalités

$$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z} \qquad \text{(IX)}$$

seront les équations aux axes de la surface.

IV. Equation de l'axe des surfaces de révolution du second degré à centre.

8. L'équation (5) représentera une surface de révolution, si les trois plans principaux que fournissent les trois valeurs de S tirées de (15) et substituées dans (12), se réduisent à un seul plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Cette condition sera remplie dans le cas, où les coéfficients des équations (13) sont proportionnels, c'est-à-dire où l'on a

$$\frac{A-S}{B''-S\cos\nu}=\frac{B''-S\cos\nu}{A'-S}=\frac{B'-S\cos\mu}{B-S\cos\lambda},$$

$$\frac{A-S}{B'-S\cos\mu}=\frac{B''-S\cos\nu}{B-S\cos\lambda}=\frac{B'-S\cos\mu}{A''-S}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que les axes de coordonnées soient rectangulaires, nos égalités de condition deviennent

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B},$$

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S},$$

et donnent les relations nécessaires et suffisantes

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}=S, \qquad (16)$$

pour que la surface (5) soit de révolution.

Or, dans ce cas particulier, les équations (13) deviennent

$$B'B''\alpha+B''B\beta+BB'\gamma=0.$$

$$\frac{x-p}{B}+\frac{y-q}{B'}+\frac{z-r}{B''}=0, \qquad (17)$$

qui est l'équation du plan mené par le centre perpendiculairement à l'axe. Les équations de l'axe seront donc

$$B(x-p)=B'(y-q)=B''(z-r). \qquad (X)$$

Nous avons ainsi la règle suivante:

Lorsqu'une surface de révolution du second degré à centre est rapportée à des coordonnées rectangulaires menées par le centre (p, q, r), on obtient les équations des axes en multipliant les différences $x-p$, $y-q$, $z-r$ respectivement par B, B', B'', et en égalant les produits entre eux.

V. *Equations de l'axe des deux paraboloïdes.*

9. Supposons que l'équation (5) représente l'un ou l'autre des deux paraboloïdes. Dans ce cas, on sait que les trois équations

$$f'_x=0,\quad f'_y=0,\quad f'_z=0$$

ou

$$\begin{aligned}
Ax+B''y+B'z+C&=0,\\
B''x+A'y+Bz+C'&=0,\\
B'x+By+A''z+C''&=0
\end{aligned}$$

se réduisent à deux équations compatibles et distinctes, et représentent deux plans, dont l'intersection est précisément l'axe du paraboloïde. La droite, menée par l'origine parallèlement à l'axe, est déterminée par les équations

$$(AB-B'B'')x=(A'B'-B''B)y=(A''B''-BB')z. \qquad (18)$$

Mais cet axe est aussi perpendiculaire au plan tangent (11) mené par le sommet; par conséquent, nous avons les relations

(XI)

$$\frac{1}{(AB-B'B'')f'_{x'}}=\frac{\cos\nu}{(A'B'-B''B)f'_{x'}}=\frac{\cos\mu}{(A''B''-BB')f'_{x'}}$$

$$=\frac{1}{(A'B'-BB'')f'_{y'}}+\frac{\cos\lambda}{(A''B''-BB')f'_{y'}}+\frac{\cos\nu}{(AB-B'B'')f'_{y'}}$$

$$=\frac{1}{(A''B''-BB')f'_{z'}}+\frac{\cos\mu}{(AB-B'B'')f'_{z'}}+\frac{\cos\lambda}{(A'B'-B''B)f'_{z'}}.$$

Or je dis que ces équations (XI), avec suppression d'accents aux coordonnées, sont précisément celles de l'axe du paraboloïde: car il est aisé de voir que la droite, qu'elles représentent, passe par le sommet x', y', z', et se trouve être perpendiculaire au plan (II).

10. Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, les équations de l'axe se réduisent à

$$(AB-B'B'')f'_x=(A'B'-B''B)f'_y=(A''B''-BB')f'_z. \quad \text{(XII)}$$

Donc

Pour avoir l'axe du paraboloïde, il suffit de multiplier les trois dérivées du premier membre de l'équation par les différences respectives $AB-B'B''$, $A'B'-B''B$, $A''B''-BB'$, et d'égaler entre eux les produits obtenus.

12. Si le paraboloïde est de révolution, les équations de l'axe se simplifient: car les égalités de condition

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}$$

les changent en

$$Bf'_x=B'f'_y=B''f'_z. \quad \text{(XIII)}$$

XXIV.

Neue Methode die Ellipse zu rectificiren.

Von

dem Herausgeber.

Die bekannten Methoden zur Rectification der Ellipse sind, namentlich wenn es um die Rectification einzelner Bogen der Ellipse sich handelt, immer beschwerlich, und selbst, insbesondere der Gebrauch der zu diesem Zwecke gegebenen unendlichen Reihen, etwas misslich. Ich habe daher schon vor längerer Zeit darauf gedacht, eine Methode zu finden, welche, nicht sehr beschwerlich in der Anwendung, zugleich völlige Sicherheit darböte, und namentlich auch ein Mittel an die Hand gäbe, in jedem Stadium der Annäherung die Grösse des begangenen Fehlers sicher beurtheilen zu können. Was sich mir aus meinen desfallsigen Untersuchungen als das Zweckmässigste ergeben hat, will ich jetzt mittheilen.

Die beiden Endpunkte des zu rectificirenden Bogens der Ellipse seien A_0 und A_1, und diese beiden Punkte seien durch die Anomalien u_0 und u_1 bestimmt. Den zwischen den beiden Punkten A_0 und A_1 liegenden elliptischen Bogen denken wir uns, indem wir voraussetzen, dass u_1 grösser als u_0 sei, von A_0 an nach A_1 hin immer nach der Richtung hin durchlaufen, nach welcher die Anomalien von 0 bis 360° gezählt werden. Die Sehne der Ellipse, welche die beiden Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindet, sei $s_{0,1}$, und $r_{0,1}$ sei der mit dieser Sehne parallele Halbmesser der Ellipse, welchen letzteren wir uns immer von dem Mittelpunkte der Ellipse aus so gezogen denken wollen, dass er mit der, als von A_0 aus nach A_1 hin gehend gedachten Sehne $s_{0,1}$ gleich gerichtet ist. Alle im Folgenden vorkommenden Kreis-

bogen nehmen wir in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers ausgedrückt an.

Nach Thl. XXIV. S. 374. S. 373. ist

$$s_{0,1}{}^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)^2\,\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)^2\},$$

und die Gleichung der Sehne $s_{0,1}$, dieselbe als eine gerade Linie von bestimmter Lage, aber unbestimmter Länge gedacht, ist:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) + ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1).$$

Also ist die Gleichung des Halbmessers $r_{0,1}$, welcher der Sehne $s_{0,1}$ parallel ist:

$$y = -\frac{b}{a}\,x\cot\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1);$$

und bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes, in welchem von diesem, nach der oben gegebenen Bestimmung gezogenen Halbmesser die Ellipse geschnitten wird, durch $x_{0,1}$, $y_{0,1}$; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{x_{0,1}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_{0,1}}{b}\right)^2 = 1,\quad y_{0,1} = -\frac{b}{a}\,x_{0,1}\cot\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1);$$

aus denen sich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander leicht ergiebt:

$$x_{0,1} = \pm\, a\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1),\quad y_{0,1} = \mp\, b\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1);$$

wo es sich nun frägt, welche Zeichen man zu nehmen hat. Um diese Frage zu beantworten, bezeichne man die Coordinaten der Punkte A_0 und A_1 respective durch x_0, y_0 und x_1, y_1; so ist bekanntlich:

$$x_0 = a\cos u_0,\quad y_0 = b\sin u_0 \quad\text{und}\quad x_1 = a\cos u_1,\quad y_1 = b\sin u_1.$$

Mittelst einer einfachen Betrachtung erhellet auf der Stelle, dass $y_{0,1}$ positiv oder negativ ist, jenachdem $y_1 > y_0$ oder $y_1 < y_0$ ist, wobei man immer die oben rücksichtlich des Halbmessers $r_{0,1}$ gegebene Bestimmung festzuhalten hat. Also ist $y_{0,1}$ positiv oder negativ, jenachdem

$$b\sin u_1 > b\sin u_0 \quad\text{oder}\quad b\sin u_1 < b\sin u_0,$$

d. i. jenachdem

$$\sin u_1 - \sin u_0 > 0 \quad\text{oder}\quad \sin u_1 - \sin u_0 < 0$$

ist. Folglich hat $y_{0,1}$ immer gleiches Vorzeichen mit

$$\sin u_1 - \sin u_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(u_1 - u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_1 + u_0),$$

also, weil $\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)$ offenbar stets positiv ist, mit $\cos\frac{1}{2}(u_1+u_0)$. Daher muss man im Obigen die unteren Zeichen nehmen und demzufolge

$$x_{0,1}=-a\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1),\quad y_{0,1}=b\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)$$

setzen.

Weil

$$r_{0,1}{}^2=x_{0,1}{}^2+y_{0,1}{}^2$$

ist, so ist nach vorstehenden Formeln:

$$r_{0,1}{}^2=a^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$s_{0,1}{}^2=4r_{0,1}{}^2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2,$$

und folglich, weil $\sin\frac{1}{2}(u_1-u_0)$ stets positiv ist:

$$s_{0,1}=2r_{0,1}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_0).$$

Denkt man sich, dass die Sehne $s_{0,1}$ entweder in die Berührende der Ellipse in dem Punkte A_0 oder in deren Berührende in dem Punkte A_1 übergehe, so gehen die vorstehenden Coordinaten offenbar respective in

$$-a\sin u_0,\quad b\cos u_0 \quad\text{und}\quad -a\sin u_1,\quad b\cos u_1$$

über; und bezeichnet man nun die Anomalien der Punkte, in denen die Ellipse von den mit den beiden in Rede stehenden Berührenden parallel gezogenen Halbmessern geschnitten wird, durch v_0 und v_1, so sind die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte bekanntlich $a\cos v_0$, $b\sin v_0$ und $a\cos v_1$, $b\sin v_1$; folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$\cos v_0=-\sin u_0,\ \sin v_0=\cos u_0 \text{ und } \cos v_1=-\sin u_1,\ \sin v_1=\cos u_1;$$

mittelst welcher Formeln die zwischen 0 und 360° liegenden Anomalien v_0 und v_1 immer leicht und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden können, worüber hier nichts weiter zu sagen ist.

Die Differenz u_1-u_0 der Anomalien u_0 und u_1 wollen wir jetzt in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile theilen, deren jeder i sein mag, so dass

$$u_1-u_0=ni$$

ist. Die den Anomalien

$$u_0,\ u_0+i,\ u_0+2i,\ u_0+3i;\ \ldots\ldots;\ u_0+(n-1)i,\ u_0+ni$$

entsprechenden Sehnen der Ellipse mögen der Reihe nach durch

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots.\ s_{n-1}$$

und die diesen Sehnen parallelen Halbmesser der Ellipse respective durch

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots.\ r_{n-1}$$

bezeichnet werden. Dann ist nach dem Obigen:

$s_0 = 2r_0 \sin\frac{1}{2}i,\ s_1 = 2r_1 \sin\frac{1}{2}i,\ s_2 = 2r_2 \sin\frac{1}{2}i, \ldots,\ s_{n-1} = 2r_{n-1} \sin\frac{1}{2}i;$

also:

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_{n-1}$$
$$= 2(r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_{n-1}) \sin\tfrac{1}{2}i,$$

und folglich

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_{n-1}$$
$$= (u_1 - u_0).\frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_{n-1}}{n}.\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}.\frac{u_1 - u_0}{n}},$$

also nach dem Obigen:

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_{n-1}$$
$$= (u_1 - u_0).\frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_{n-1}}{n}.\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_{n-1}$$

setzen:

$$S_n = (u_1 - u_0).\frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_{n-1}}{n}.\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}.$$

Bezeichnen wir nun den durch die beiden Anomalien u_0, u_1 bestimmten elliptischen Bogen durch $E_{u_0,\,u_1}$, so ist

$$E_{u_0,\,u_1} > S_n,$$

und offenbar für ein in's Unendliche wachsendes n, also für ein der Null sich näherndes i:

$$E_{u_0,\,u_1} = \text{Lim}\, S_n,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$E_{u_0,\,u_1} = (u_1 - u_0).\,\text{Lim}\frac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_{n-1}}{n}.\,\text{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i},$$

also, weil bekanntlich

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}=1$$

ist,

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0).\operatorname{Lim}\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}}{n}.$$

Geht die Ellipse in einen mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis über, so ist

$$r=r_0=r_1=r_2=r_3=\ldots=r_{n-1},$$

also

$$\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}}{n}=r,$$

und folglich

$$E_{u_0,u_1}=r(u_1-u_0),$$

wie es bekanntlich sein muss.

Aus der Gleichung

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0).\operatorname{Lim}\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}}{n}$$

ergiebt sich unmittelbar der folgende sehr bemerkenswerthe Satz:

Die Länge eines elliptischen Bogens ist gleich dem, die Differenz der Anomalien seiner Endpunkte messenden, in Theilen der Einheit ausgedrückten Kreisbogen, multiplicirt mit dem arithmetischen Mittel aller der Halbmesser der Ellipse, welche den Berührenden der Ellipse in allen, in stetiger Folge gedachten Punkten des zu messenden Bogens parallel sind.

Durch alle, durch die Anomalien

$$u_0,\ u_0+i,\ u_0+2i,\ u_0+3i,\ \ldots,\ u_0+ni$$

bestimmten Punkte der Ellipse wollen wir jetzt an dieselbe Berührende ziehen, wodurch ein ausserhalb der Ellipse liegender Polygon-Theil entsteht, wie durch Taf. IV. Fig. 8. näher erläutert wird, aus welcher Figur zugleich auch von selbst die Bedeutung der Zeichen

$$\sigma_0;\ \sigma_1',\ \sigma_1;\ \sigma_2',\ \sigma_2;\ \sigma_3',\ \sigma_3;\ \ldots;\ \sigma'_{n-1},\ \sigma_{n-1};\ \sigma_n'$$

erhellet. Die den in Rede stehenden Berührenden parallelen Halbmesser der Ellipse mögen durch

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots,\ \varrho_n$$

bezeichnet werden. Dann haben wir, nach einer in der Abhandlung Thl. XXX. Nr. II. S. 26., auf welche uns der Kürze wegen zu verweisen erlaubt sein mag, bewiesenen Formel die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma_0 = \varrho_0 \tan \tfrac{1}{2}i,$$

$$\sigma_1 = \varrho_1 \tan \tfrac{1}{2}i, \qquad \sigma_1' = \varrho_1 \tan \tfrac{1}{2}i;$$

$$\sigma_2 = \varrho_2 \tan \tfrac{1}{2}i, \qquad \sigma_2' = \varrho_2 \tan \tfrac{1}{2}i;$$

$$\sigma_3 = \varrho_3 \tan \tfrac{1}{2}i, \qquad \sigma_3' = \varrho_3 \tan \tfrac{1}{2}i;$$

u. s. w. u. s. w.

$$\sigma_{n-1} = \varrho_{n-1} \tan \tfrac{1}{2}i, \qquad \sigma_{n-1}' = \varrho_{n-1} \tan \tfrac{1}{2}i;$$

$$\sigma_n' = \varrho_n \tan \tfrac{1}{2}i\ ^{*});$$

also:

$$\sigma_0 + (\sigma_1' + \sigma_1) + (\sigma_2' + \sigma_2) + (\sigma_3' + \sigma_3) + \ldots + (\sigma_{n-1}' + \sigma_{n-1}) + \sigma_n'$$
$$= \varrho_0 \tan \tfrac{1}{2}i + 2\varrho_1 \tan \tfrac{1}{2}i + 2\varrho_2 \tan \tfrac{1}{2}i + \ldots + 2\varrho_{n-1} \tan \tfrac{1}{2}i + \varrho_n \tan \tfrac{1}{2}i$$

oder

$$\sigma_0 + (\sigma_1' + \sigma_1) + (\sigma_2' + \sigma_2) + (\sigma_3' + \sigma_3) + \ldots + (\sigma_{n-1}' + \sigma_{n-1}) + \sigma_n'$$
$$= 2(\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_n) \tan \tfrac{1}{2}i - (\varrho_0 + \varrho_n) \tan \tfrac{1}{2}i,$$

und folglich:

$$\sigma_0 + (\sigma_1' + \sigma_1) + (\sigma_2' + \sigma_2) + (\sigma_3' + \sigma_3) + \ldots + (\sigma_{n-1}' + \sigma_{n-1}) + \sigma_n'$$
$$= (u_1 - u_0) \cdot \frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_n}{n} \cdot \frac{\tan \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} \cdot \frac{u_1 - u_0}{n}}$$
$$- (u_1 - u_0) \cdot \frac{\varrho_0 + \varrho_n}{2n} \cdot \frac{\tan \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} \cdot \frac{u_1 - u_0}{n}},$$

also nach dem Obigen:

---

*) Ich mache hierbei aufmerksam auf die jedenfalls beachtenswerthen und eine Analogie zu einer bekannten Eigenschaft des Kreises darbietenden Gleichungen:

$$\sigma_1 = \sigma_1', \quad \sigma_2 = \sigma_2', \quad \sigma_3 = \sigma_3', \ldots, \quad \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}'.$$

$$\sigma_0+(\sigma_1'+\sigma_1)+(\sigma_2'+\sigma_2)+(\sigma_3'+\sigma_3)+\ldots+(\sigma_{n-1}'+\sigma_{n-1})+\sigma_n'$$

$$=(u_1-u_0).\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_n}{n}.\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

$$-(u_1-u_0).\frac{\varrho_0+\varrho_n}{2n}.\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\Sigma_n=\sigma_0+(\sigma_1'+\sigma_1)+(\sigma_2'+\sigma_2)+(\sigma_3'+\sigma_3)+\ldots+(\sigma_{n-1}'+\sigma_{n-1})+\sigma_n'$$

setzen:

$$\Sigma_n=(u_1-u_0).\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_n}{n}.\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

$$-(u_1-u_0).\frac{\varrho_0+\varrho_n}{2n}.\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}.$$

Bezeichnet nun wieder E_{u_0,u_1} den durch die Anomalien u_0, u_1 bestimmten elliptischen Bogen, so ist

$$E_{u_0,u_1}<\Sigma_n\ ^*),$$

und offenbar für ein in's Unendliche wachsendes n, also ein der Null sich näherndes i:

$$E_{u_0,u_1}=\text{Lim}\,\Sigma_n,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0).\text{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_n}{n}.\text{Lim}\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

$$-(u_1-u_0).\text{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_n}{2n}.\text{Lim}\frac{\tang\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}.$$

*) In Taf. IV. Fig. 9. ist

$$A+\alpha>a+a',$$
$$a'+\beta>b+b',$$
$$b'+\gamma>c+c',$$
$$c'+\delta>d+d',$$
$$d'+\varepsilon>e+e',$$
$$e'+\zeta>f;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt, aufhebt, was sich aufheben lässt, und

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon+\delta+\zeta=B$$

setzt:

$$A+B>a+b+c+d+e+f.$$

Die Anwendung hiervon auf krumme Linien zu machen, bleibt dem Leser überlassen.

Weil

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}=\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}i}$$

ist, so ist

$$\operatorname{Lim}\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}=\operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cdot\frac{1}{\operatorname{Lim}\cos\frac{1}{2}i}=1.\frac{1}{1}=1;$$

und weil ferner offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_n}{2n}=0$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0)\,.\operatorname{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.+\varrho_n}{n}$$

oder

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0)\,.\operatorname{Lim}\left\{\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.+\varrho_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right\}$$

$$=(u_1-u_0)\,.\operatorname{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.+\varrho_n}{n}\,.\operatorname{Lim}(1+\frac{1}{n}),$$

also, weil

$$\operatorname{Lim}(1+\frac{1}{n})=1$$

ist:

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0)\,.\operatorname{Lim}\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.+\varrho_n}{n+1},$$

woraus sich ganz derselbe Satz wie oben ergiebt.

Weil nach dem Obigen

$$S_n<E_{u_0,u_1}<\Sigma_n$$

ist, so sind

$$S_n=(u_1-u_0)\,.\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+\ldots.+r_{n-1}}{n}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

und

$$\Sigma_n=(u_1-u_0)\,.\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.+\varrho_n}{n}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

$$-(u_1-u_0)\,.\frac{\varrho_0+\varrho_n}{2n}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}$$

jederzeit zwei Gränzen, zwischen denen der elliptische Bogen E_{u_0, u_1} liegt, und der Fehler, welchen man begeht, wenn man eine dieser beiden Gränzen als einen Näherungswerth des Bogens E_{u_0, u_1} betrachtet, ist nicht grösser als die Differenz $\Sigma_n - S_n$. Ein noch genauerer Näherungswerth des Bogens E_{u_0, u_1} als eine der beiden Gränzen S_n, Σ_n ist das arithmetische Mittel

$$\frac{S_n + \Sigma_n}{2}$$

zwischen beiden, wo der Fehler offenbar nicht grösser als

$$\frac{\Sigma_n - S_n}{2}$$

ist.

Um sich dieser Methode bei der Berechnung der Länge elliptischer Bogen bedienen zu können, kommt es hauptsächlich darauf an, dass wir zeigen, wie die Halbmesser

$$\varrho_0, \quad \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \ldots \varrho_n$$

und

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \ldots r_{n-1}$$

mit Leichtigkeit berechnet werden können.

Nach der Abhandlung in Thl. XXX. Nr. II. S. 26. ist aber:

$$\varrho_0 = \sqrt{a^2 \sin u_0{}^2 + b^2 \cos u_0{}^2},$$
$$\varrho_1 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + i)^2 + b^2 \cos (u_0 + i)^2},$$
$$\varrho_2 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + 2i)^2 + b^2 \cos (u_0 + 2i)^2},$$
$$\varrho_3 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + 3i)^2 + b^2 \cos (u_0 + 3i)^2},$$
u. s. w.
$$\varrho_n = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + ni)^2 + b^2 \cos (u_0 + ni)^2};$$

und nach derselben Abhandlung S. 14., oder auch nach dem Obigen, ist:

$$r_0 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + \tfrac{1}{2}i)^2 + b^2 \cos (u_0 + \tfrac{1}{2}i)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + \tfrac{3}{2}i)^2 + b^2 \cos (u_0 + \tfrac{3}{2}i)^2},$$
$$r_2 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + \tfrac{5}{2}i)^2 + b^2 \cos (u_0 + \tfrac{5}{2}i)^2},$$
$$r_3 = \sqrt{a^2 \sin (u_0 + \tfrac{7}{2}i)^2 + b^2 \cos (u_0 + \tfrac{7}{2}i)^2},$$
u. s. w.
$$r_{n-1} = \sqrt{a^2 \sin \left(u_0 + \frac{2n-1}{2}\, i\right)^2 + b^2 \cos \left(u_0 + \frac{2n-1}{2}\, i\right)^2}.$$

Setzen wir aber

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2},$$

so können die zur Bestimmung der Halbmesser

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots.\ \varrho_n$$

und

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots.\ r_{n-1}$$

erforderlichen Formeln im Zusammenhange mit einander auf folgende Art dargestellt werden:

$$\varrho_0 = a\sqrt{1-e^2\cos u_0{}^2},$$

$$r_0 = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+1.\tfrac{i}{2})^2},$$

$$\varrho_1 = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+2.\tfrac{i}{2})^2},$$

$$r_1 = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+3.\tfrac{i}{2})^2},$$

$$\varrho_2 = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+4.\tfrac{i}{2})^2},$$

$$r_2 = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+5.\tfrac{i}{2})^2},$$

u. s. w.

$$\varrho_{n-1} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(2n-2)\tfrac{i}{2})^2},$$

$$r_{n-1} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(2n-1)\tfrac{i}{2})^2},$$

$$\varrho_n = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+2n\tfrac{i}{2})^2}.$$

Berechnet man die Hülfswinkel

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \ldots.\ \omega_{2n}$$

mittelst der Formeln:

$$\sin\omega_0 = e\cos u_0, \qquad \sin\omega_1 = e\cos(u_0 + 1.\tfrac{i}{2});$$

$$\sin\omega_2 = e\cos(u_0 + 2.\tfrac{i}{2}), \qquad \sin\omega_3 = e\cos(u_0 + 3.\tfrac{i}{2});$$

$$\sin\omega_4 = e\cos(u_0 + 4.\tfrac{i}{2}), \qquad \sin\omega_5 = e\cos(u_0 + 5.\tfrac{i}{2});$$

u. s. w.

$$\sin\omega_{2n-2} = e\cos(u_0 + (2n-2)\tfrac{i}{2}), \quad \sin\omega_{2n-1} = e\cos(u_0 + (2n-1)\tfrac{i}{2});$$

$$\sin\omega_{2n} = e\cos(u_0 + (2n\tfrac{i}{2});$$

so ist:

$$\varrho_0 = a\cos\omega_0, \qquad r_0 = a\cos\omega_1;$$

$$\varrho_1 = a\cos\omega_2, \qquad r_1 = a\cos\omega_3;$$

$$\varrho_2 = a\cos\omega_4, \qquad r_2 = a\cos\omega_5;$$

$$\varrho_3 = a\cos\omega_6, \qquad r_3 = a\cos\omega_7;$$

u. s. w.

$$\varrho_{n-1} = a\cos\omega_{2n-2}, \quad r_{n-1} = a\cos\omega_{2n-1};$$

$$\varrho_n = a\cos\omega_{2n};$$

wobei vorausgesetzt worden ist, dass die Winkel

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4, \ldots\ \omega_{2n}$$

absolut sämmtlich kleiner als 90° genommen worden sind, was offenbar immer verstattet ist.

Wenn man die Differenz $u_1 - u_0$, nachdem man sie in n gleiche Theile getheilt hatte, um zu einer ferneren Näherung überzugehen, in $2n$ gleiche Theile theilt, so sind die Formeln zur Berechnung der Halbmesser, die wir jetzt mit oberen Accenten versehen wollen, die folgenden:

$$\varrho_0' = a\sqrt{1 - e^2\cos u_0{}^2} \qquad = a\sqrt{1 - e^2\cos u_0{}^2},$$

$$r_0' = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + 1.\tfrac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_1' = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + 2.\tfrac{i}{4})^2} = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + 1.\tfrac{i}{2})^2},$$

$$r_1' = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + 3.\tfrac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_2' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+4.\frac{i}{4})^2} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+2.\frac{i}{2})^2},$$

$$r_2' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+5.\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_3' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+6.\frac{i}{4})^2} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+3.\frac{i}{2})^2},$$

u. s. w.

$$\varrho_{2n-2}' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(4n-4)\frac{i}{4})^2} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(2n-2)\frac{i}{2})^2},$$

$$r_{2n-2}' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(4n-3)\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_{2n-1}' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(4n-2)\frac{i}{4})^2} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(2n-1)\frac{i}{2})^2},$$

$$r_{2n-1}' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+(4n-1)\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_{2n}' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+4n\frac{i}{4})^2} = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+2n\frac{i}{2})^2};$$

also:

$$\varrho_0' = \varrho_0,$$

$$r_0' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+1.\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_1' = r_0,$$

$$r_1' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+3.\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_2' = \varrho_1,$$

$$r_2' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+5.\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_3' = r_1,$$

$$r_3' = a\sqrt{1-e^2\cos(u_0+7.\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_4' = \varrho_2,$$

u. s. w.

$$\varrho_{2n-2}' = \varrho_{n-1},$$

$$r_{2n-2}' = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + (4n-3)\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_{2n-1}' = r_{n-1},$$

$$r_{2n-1}' = a\sqrt{1 - e^2\cos(u_0 + (4n-1)\frac{i}{4})^2},$$

$$\varrho_{2n}' = \varrho_n.$$

Hieraus ergiebt sich der für diese Rechnungen wichtige Umstand, dass man bei jeder neuen Näherung die ganze bei der vorhergehenden Näherung gemachte Rechnung wieder benutzen kann, was natürlich für die Abkürzung dieser Rechnungen von sehr grosser Wichtigkeit ist. Besonders bemerke man auch, dass nach dem Vorhergehenden immer

$$\varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \varrho_3' + \ldots + \varrho_{2n-2}' + \varrho_{2n-1}' + \varrho_{2n}'$$
$$= (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) + (\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-1} + \varrho_n)$$

ist.

Um ein Beispiel zu der vorhergehenden Rectification der Ellipse zu geben, wollen wir

$$a = 1, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad e^2 = \tfrac{3}{4}, \quad \log e = 0{,}9375307 - 1$$

und

$$u_0 = 17^\circ, \quad u_1 = 29^\circ, \quad u_1 - u_0 = 12^\circ$$

setzen. Nehmen wir nun im Obigen $n = 6$ an, so ist $i = 2^\circ$ und $\frac{1}{2}i = 1^\circ$; also:

$$u_0 = 17^\circ,$$
$$u_0 + 1.\frac{i}{2} = 18^\circ,$$
$$u_0 + 2.\frac{i}{2} = 19^\circ,$$
$$u_0 + 3.\frac{i}{2} = 20^\circ,$$
$$u_0 + 4.\frac{i}{2} = 21^\circ,$$
$$u_0 + 5.\frac{i}{2} = 22^\circ,$$
$$u_0 + 6.\frac{i}{2} = 23^\circ,$$

$$u_0+7.\frac{i}{2}=24^0,$$

$$u_0+8.\frac{i}{2}=25^0,$$

$$u_0+9.\frac{i}{2}=26^0,$$

$$u_0+10.\frac{i}{2}=27^0,$$

$$u_0+11.\frac{i}{2}=28^0,$$

$$u_0+12.\frac{i}{2}=29^0.$$

Mittelst der im Obigen entwickelten Formeln findet man zuerst:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 55^0.\ 54'.\ 45'',6\\
\omega_1 &= 55.\ 27.\ 2,8\\
\omega_2 &= 54.\ 58.\ 9,0\\
\omega_3 &= 54.\ 28.\ 7,2\\
\omega_4 &= 53.\ 57.\ 0,3\\
\omega_5 &= 53.\ 24.\ 51,1\\
\omega_6 &= 52.\ 51.\ 42,2\\
\omega_7 &= 52.\ 17.\ 36,5\\
\omega_8 &= 51.\ 42.\ 36,4\\
\omega_9 &= 51.\ 6.\ 44,5\\
\omega_{10} &= 50.\ 30.\ 3,2\\
\omega_{11} &= 49.\ 52.\ 34,8\\
\omega_{12} &= 49.\ 14.\ 21,5
\end{aligned}$$

und hieraus ferner:

$r_0=0,5671140$	$\varrho_0=0,5604558$
$r_1=0,5811483$	$\varrho_1=0,5740171$
$r_2=0,5960260$	$\varrho_2=0,5884897$
$r_3=0,6116171$	$\varrho_3=0,6037406$
$r_4=0,6277951$	$\varrho_4=0,6196406$
$r_5=0,6444396$	$\varrho_5=0,6360661$
$3,6281401$	$\varrho_6=0,6529010$
6) $0,6046900$	$4,2353109$
	6) $0,7058852$
	$-0,1011131$
	$0,6047721$

$$\varrho_0 = 0,5604558$$
$$\varrho_6 = 0,6529010$$
$$\overline{1,2133568}$$
$$12)\ \overline{0,1011131}$$

Es ist also:

$$\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}{6} = 0,6046900$$

$$\frac{\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\varrho_4+\varrho_5+\varrho_6}{6} - \frac{\varrho_0+\varrho_6}{12} = 0,6047721$$

und die Logarithmen dieser beiden Grössen sind respective

$$0,7815328-1 \quad \text{und} \quad 0,7815917-1.$$

Nun ist in Theilen der Einheit ausgedrückt:

$$\tfrac{1}{2}i = 0,01745329,$$

$$\log \tfrac{1}{2}i = 0,2418773-2,$$

also:

$$\log \frac{\sin \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i} = 0,9999780-1, \quad \log \frac{\tang \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i} = 0,0000442;$$

folglich:

0,7815328 − 1	0,7815917 − 1
0,9999780 − 1	0,0000442
0,7815108 − 1	0,7816359

und zu diesen beiden Logarithmen sind die Zahlen:

$$0,6046594 \quad \text{und} \quad 0,6048336.$$

Weil nun in Theilen der Einheit ausgedrückt

$$u_1 - u_0 = 0,20943951$$

ist, so sind

$$0,20943951 . 0,6046594$$

$$\text{und} \quad 0,20943951 . 0,6048336,$$

oder, wie man leicht mit Hülfe der Logarithmen findet:

$$0,1266396 \quad \text{und} \quad 0,1266760$$

zwei Gränzen, zwischen denen der elliptische Bogen E_{u_0,u_1} im vorliegenden Falle liegt.

Das Mittel zwischen diesen beiden Gränzen ist

$$0,1266578,$$

und setzt man nun näherungsweise

$$E_{u_0,u_1}=0,1266578,$$

so ist der Fehler, welchen man begeht, jedenfalls nicht grösser als

$$\frac{0,1266760-0,1266396}{2}=\frac{0,0000362}{2},$$

d. i. nicht grösser als

$$0,0000182.$$

Die numerischen Rechnungen, welche bei dieser Methode der Berechnung der Längen elliptischer Bogen nöthig sind, sind im Ganzen leicht auszuführen, wie Jeder selbst finden wird, der einmal ein Beispiel nach dieser Methode rechnet. Vor der gewöhnlichen Methode durch Entwickelung in Reihen hat dieselbe den grossen und wesentlichen Vorzug, dass sie bei grossen und kleinen Excentricitäten ziemlich mit gleicher Leichtigkeit anwendbar ist, wogegen die Entwickelung in Reihen nur bei kleinen Excentricitäten einige Bequemlichkeit darbietet. Als den Hauptvorzug meiner obigen Methode vor den sonst bekannten Methoden betrachte ich aber die Sicherheit, mit welcher sich bei derselben in jedem Stadium der Näherung ein Urtheil über den Grad der erreichten Genauigkeit oder über den in dem erhaltenen annähernden Resultat noch steckenden Fehler fällen lässt. Endlich kommt in methodischer Rücksicht hierzu nun noch, dass die obige Methode in der That ganz elementar, und, wie es mir scheint, völlig geeignet ist, in den Elementar-Unterricht über die Lehre von den Kegelschnitten oder von den Linien des zweiten Grades aufgenommen zu werden.

In wie fern sich von dem oben ausgesprochenen merkwürdigen, in der Gleichung

$$E_{u_0,u_1}=(u_1-u_0).\mathrm{Lim}\frac{r_0+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}}{n},$$

wobei n als in's Unendliche wachsend gedacht wird, enthaltenen Satze Anwendungen zur Bestimmung der Länge elliptischer Bögen durch Construction machen lassen, und in welcher Beziehung und Verbindung zu und mit der eigentlichen Integralrechnung derselbe steht, werde ich späterhin vielleicht in einem besonderen Aufsatze zeigen. Hier wollte ich nicht über den Kreis der gewöhnlichen Elemente hinausgehen.

XXV.

Miscellen.

Ein neues mathematisches Paradoxon.

Von Herrn Dr. G. Zehfuss, provisorischem Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt.

Will man sich die Entstehung einer Linie durch Fortbewegung eines Punktes klar machen, so bieten sich bei näherer Betrachtung dieser Bewegung folgende zwei Fälle dar:

1) Es ist zwischen den aufeinanderfolgenden Lagen des sich bewegenden Punktes kein Zwischenraum. In diesem Falle würde, da jedes Element der Linie $= 0$ wäre, und aus noch so vielen, selbst unendlich vielen wirklichen Nullen (welche man von unendlich kleinen Grössen wohl zu unterscheiden hat) keine endliche Grösse zusammengesetzt werden kann, überhaupt gar keine Linie entstehen können.

2) Es ist zwischen den aufeinanderfolgenden Lagen des sich bewegenden Punktes ein Zwischenraum. In diesem Falle wäre keine stetige Bewegung, welche doch stillschweigend vorausgesetzt wird, vorhanden.

Es bietet sich also hier ein wirkliches Paradoxon dar, weil beide Fälle, die einzig möglichen, auf Widersprüche führen. Die Auflösung desselben werde ich später in einem besonderen philosophischen Artikel zeigen.

Sehr einfache Bestimmung eines bekannten Integrals.

Von Herrn Friedrich Gauss, Kandidaten der Mathem. zu Greifswald.

Das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

wo c gleich, grösser oder kleiner als Null sein kann, lässt sich leicht durch folgende bemerkenswerthe Substitution allgemein auflösen. Man setze den Differentialquotienten der Wurzelgrösse gleich einer neuen Variabeln, nämlich

$$\frac{\partial\sqrt{a+bx+cx^2}}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}b+cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = z.$$

Dann findet man

$$\tfrac{1}{2}b+cx = z\sqrt{a+bx+cx^2},$$

$$c\partial x = z\frac{\frac{1}{2}b+cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\partial x + \partial z\sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$= z^2\partial x + \partial z\sqrt{a+bx+cx^2},$$

also

$$(c-z^2)\partial x = \partial z\sqrt{a+bx+cx^2},$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\partial z}{c-z^2}, \quad \int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int\frac{\partial z}{c-z^2}.$$

Hierdurch ist unsere Aufgabe gelöst, weil das Integral

$$\int\frac{\partial z}{c-z^2},$$

wo nur die drei Fälle, dass c gleich, grösser oder kleiner als Null ist, unterschieden werden müssen, bekanntlich ohne alle Schwierigkeit aufgelöst werden kann.

Von dem Herausgeber.

I.

Aufgabe.

Zwei ganze Zahlen zu finden, deren Quotient oder Verhältniss ihrer Differenz gleich ist.

Auflösung.

Die Aufgabe verlangt die Erfüllung der Gleichung

$$\frac{x}{y} = x - y,$$

in ganzen Zahlen. Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$x=\frac{y^2}{y-1}=\frac{(y^2-1)+1}{y-1}=y+1+\frac{1}{y-1},$$

und es muss also $\frac{1}{y-1}$ eine ganze Zahl sein, was nur dann der Fall sein kann, wenn $y-1=\pm 1$, also $y=2$ oder $y=0$ ist; dann ist aber, weil $y=0$ offenbar nicht zulässig ist,

$$x=\frac{y^2}{y-1}=4.$$

Die beiden gesuchten ganzen Zahlen sind also $x=4$ und $y=2$.

Anmerkung. Wollte man zwei ganze Zahlen suchen, deren Quotient ihrer Summe gleich wäre, so hätte man die Gleichung

$$\frac{x}{y}=x+y$$

in ganzen Zahlen zu erfüllen. Aus dieser Gleichung folgt

$$x=\frac{y^2}{1-y}=\frac{1-(1-y^2)}{1-y}=\frac{1}{1-y}-(1+y).$$

Also muss $\frac{1}{1-y}$ eine ganze Zahl sein, was nur dann der Fall ist, wenn $1-y=\pm 1$, also $y=0$ oder $y=2$ ist. Dann ist aber, weil $y=0$ wieder offenbar nicht zulässig ist,

$$x=\frac{y^2}{1-y}=-4.$$

Die beiden gesuchten Zahlen sind also $x=-4$ und $y=2$, so dass also diese Aufgabe ohne Zulassung negativer ganzer Zahlen nicht gelöst werden kann.

II.

Berichtigung.

Weil ich den in der Abhandlung Thl. VI. Nr. I. von mir empfohlenen Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades immer noch für bemerkens- und berücksichtigungswerth halte, so erlaube ich mir darauf aufmerksam zu machen, dass in dieser Abhandlung gegen das Ende eine Auslassung Statt gefunden hat, die leicht Missverständnisse herbeiführen kann und daher eine Berichtigung wünschenswerth macht.

Bei der Betrachtung des Falls, wenn $\frac{4}{27}a^3 > b^2$ ist, auf S. 5., ist nämlich stillschweigend angenommen oder vorausgesetzt worden, dass, so wie a, welches in diesem Falle nothwendig positiv sein muss, auch b positiv sei. Dies erhellet daraus, weil auf derselben Seite weiter unten

$$\sin\varphi^3 - 3\sin\varphi\cos\varphi^2 = \frac{3b}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}$$

gesetzt worden ist, welches nur unter Voraussetzung eines positiven b zulässig ist, da man ja natürlich, weil a jedenfalls nothwendig positiv sein muss, für ein negatives b keineswegs

$$\frac{3b}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}$$

setzen darf.

Daher gilt auch auf S. 7. die Behauptung:

> „3. Wenn $\frac{4}{27}a^3 > b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung drei sämmtlich unter einander ungleiche reelle Wurzeln, zwei negative und eine positive.“

natürlich nur unter Voraussetzung eines positiven b, was a. a. O. zu bemerken unterlassen worden ist.

Wenn man aber in der in jenem Aufsatze betrachteten Gleichung

$$x^3 = ax + b$$

die Grösse $x = -(-x)$ setzt, so geht diese Gleichung offenbar in

$$(-x)^3 = a(-x) - b$$

über, woraus also erhellet, dass die Gleichungen

$$x^3 = ax + b \quad \text{und} \quad x^3 = ax - b$$

jederzeit absolut gleiche, rücksichtlich der Zeichen aber entgegengesetzte Wurzeln haben.

Man würde also auf S. 7. noch hinzuzusetzen oder zu bemerken haben,

> „dass, wenn $\frac{4}{27}a^3 > b^2$ und b negativ ist, die gegebene Gleichung drei sämmtlich unter einander ungleiche reelle Wurzeln, zwei positive und eine negative habe.“

Um allen möglichen Missverständnissen vorzubeugen, habe ich dies hier bemerkt, wenn auch der in Rede stehende Aufsatz schon vor einer ziemlichen Reihe von Jahren erschienen ist, indem ich aber, wie schon oben erinnert, die darin vorgetragene Methode immer noch der Berücksichtigung nicht ganz unwerth halte. G.

III.

Ich bin einigemal brieflich aufgefordert worden, eine recht deutliche Erläuterung der Einrichtung der Gauss'schen Tafeln zur Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen zu geben, die nicht selbst, sondern nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, und habe solchen Aufforderungen auch einigemal brieflich entsprochen. Um indess dergleichen Aufforderungen ein für alle Mal zu genügen, möge die nachstehende Erläuterung der an sich zwar ganz einfachen Sache, die mir aber doch nicht überall mit der gehörigen Deutlichkeit, Strenge und Allgemeinheit gegeben zu werden scheint, aus welchem Umstande wohl auch die erwähnten Aufforderungen hauptsächlich hervorgegangen sind, hier folgen.

Wenn x und y zwei beliebige positive Zahlen bezeichnen und die Basis des logarithmischen Systems b genannt wird, so ist, vorausgesetzt, dass im Falle der Subtraction y die kleinere der beiden Zahlen x und y ist:

$$x = b^{\log x}, \quad y = b^{\log y}, \quad x \pm y = b^{\log(x \pm y)};$$

also:

$$b^{\log(x \pm y)} = b^{\log x} \pm b^{\log y}.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$b^{\log(x \pm y)} = b^{\log x}.(1 \pm \frac{b^{\log y}}{b^{\log x}}) = b^{\log x}.(1 \pm b^{\log y - \log x}),$$

und nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man, weil $\log b = 1$ ist, die Gleichung:

$$\log(x \pm y) = \log x + \log(1 \pm b^{\log y - \log x})$$

oder

$$\log(x \pm y) = \log x + \log\{1 \pm \left(\frac{1}{b}\right)^{\log x - \log y}\};$$

und weil nun, wenn wir überhaupt die Zahl, deren Logarithmus

die Grösse X ist, durch Num log X *), eigentlich durch Num log$(=X)$, bezeichnen,

$$b^{\log y-\log x}=\text{Num}\log(\log y-\log x)$$

ist, so ist:

$$\log(x\pm y)=\log x+\log\{1\pm\text{Num}\log(\log y-\log x)\}.$$

Ferner ist nach dem Obigen auch:

$$b^{\log(x\pm y)}=b^{\log y}.\left(\frac{b^{\log x}}{b^{\log y}}\pm 1\right)=b^{\log y}.(b^{\log x-\log y}\pm 1),$$

also, wenn man wieder auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$\log(x\pm y)=\log y+\log(b^{\log x-\log y}\pm 1)$$

oder

$$\log(x\pm y)=\log y+\log\{\text{Num}\log(\log x-\log y)\pm 1\}.$$

Wir wollen nun, die Differenz $\log x-\log y$ jetzt immer positiv annehmend,

$$A=\log x-\log y,$$

$$B=\log(1+b^{\log y-\log x})=\log\{1+\text{Num}\log(\log y-\log x)\},$$

$$C=\log(1+b^{\log x-\log y})=\log\{1+\text{Num}\log(\log x-\log y)\}$$

setzen.

Das Argument der Gauss'schen Tafel **) ist die Grösse A, und schreitet in derselben fort von $A=0{,}000$ bis $A=5{,}0$. Für diese Argumente enthält die Tafel in zwei mit B und C bezeichneten Spalten, nebst den nöthigen Differenzen, die Werthe der obigen Grössen

$$B=\log(1+b^{\log y-\log x}),$$

$$C=\log(1+b^{\log x-\log y}).$$

Die Werthe von B schreiten abnehmend fort von

*) Man denke an die in der Analysis allgemein gebräuchlichen Bezeichnungen Arcsin$x$, Arctang$x$, u. s. w.

**) Ich lege absichtlich zu Grunde: Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Herausgegeben von H. G. Köhler. Fünfte revidirte Stereotyp-Ausgabe. Leipzig bei Tauchnitz. 1857., worin sich S. 207. bis S. 221. die Gauss'sche Tafel in ihrer ursprünglichen Gestalt befindet.

$$B = 0{,}30103 \text{ bis } B = 0{,}00000;$$

die Werthe von C gehen wachsend von

$$C = 0{,}30103 \text{ bis } C = 5{,}00000;$$

so dass also 0,30103, nämlich log 2, in der Tafel für B die grösste, in der Tafel für C die kleinste Zahl ist.

Nach den oben bewiesenen Formeln ist, was zuerst den Logarithmus der Summe betrifft,

$$\log(x+y) = \log x + B \text{ und } \log(x+y) = \log y + C,$$

woraus sich zwei Methoden zur Berechnung von $\log(x+y)$ mittelst der Tafeln ergeben, wenn bloss $\log x$ und $\log y$, nicht x und y selbst, gegeben ist. Durch Subtraction der gegebenen Logarithmen berechne man, unter der Voraussetzung, dass $\log x$ grösser als $\log y$ ist, das Argument

$$A = \log x - \log y,$$

gehe mit demselben in die erste mit A bezeichnete Spalte der Tafel ein, und nehme aus der zweiten und dritten mit B und C bezeichneten Spalte derselben die dem in Rede stehenden Argument A entsprechenden Werthe von B und C; dann findet man $\log(x+y)$ leicht mittelst einer der beiden obigen Formeln, nämlich mittelst einer der beiden Formeln:

$$\log(x+y) = \log x + B, \quad \log(x+y) = \log y + C.$$

Was ferner den Logarithmus der Differenz betrifft, so hat man in dieser Beziehung zuerst Folgendes zu merken.

Weil nach der Theorie der Logarithmen

$$1 + b^{\log y - \log x} = b^{\log(1 + b^{\log y - \log x})},$$

$$1 + b^{\log x - \log y} = b^{\log(1 + b^{\log x - \log y})}$$

ist, so ist in den obigen Bezeichnungen:

$$1 + b^{-A} = b^{B}, \quad 1 + b^{A} = b^{C};$$

also

$$b^{-A} = b^{B} - 1, \quad b^{A} = b^{C} - 1,$$

und folglich, wenn man multiplicirt:

$$(b^{B} - 1)(b^{C} - 1) = 1.$$

Nach dem Obigen ist nun:

$$\log(x-y) = \log x + \log(1 - b^{-A}),$$

$$\log(x-y) = \log y + \log(b^{A} - 1);$$

also nach den vorhergehenden Formeln auch:

$$\log(x-y) = \log x + \log(2 - b^{B}),$$

$$\log(x-y) = \log y + \log(b^{C} - 2)$$

oder

$$\log(x-y) = \log x + \log(b^{\log 2} - b^{B}),$$

$$\log(x-y) = \log y + \log(b^{C} - b^{\log 2}).$$

Bei dem Gebrauche der Tafeln sind nun die zwei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. $\log x - \log y \overline{\overline{>}} 0{,}30103$, d. i. $\log x - \log y \overline{\overline{>}} \log 2$.

In diesem Falle suche man die Differenz $\log x - \log y$ in der dritten Spalte für C auf, deren kleinste Zahl nach dem Obigen 0,30103 ist, und nehme aus der ersten und zweiten Spalte das entsprechende A und B. Dann hat man nach dem Vorhergehenden die beiden folgenden Gleichungen:

$$b^{A} = b^{\log x - \log y} - 1,$$

$$(b^{B} - 1)(b^{\log x - \log y} - 1) = 1.$$

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich leicht:

$$b^{\log x - \log y} = \frac{b^{B}}{b^{B} - 1},$$

also

$$b^{\log y - \log x} = 1 - b^{-B},$$

und folglich:

$$1 - b^{\log y - \log x} = b^{-B}.$$

Daher haben wir die beiden folgenden Ausdrücke:

$$1 - b^{\log y - \log x} = b^{-B},$$

$$b^{\log x - \log y} - 1 = b^{A};$$

also:

$$\log(1-b^{\log y-\log x})=-B,$$

$$\log(b^{\log x-\log y}-1)=A;$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\log(x-y)=\log x+\log(1-b^{\log y-\log x}),$$

$$\log(x-y)=\log y+\log(b^{\log x-\log y}-1)$$

ist, so wird $\log(x-y)$ mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke leicht berechnet:

$$\log(x-y)=\log x-B,\quad \log(x-y)=\log y+A.$$

$$\text{II.}\quad \log x-\log y\leqq 0{,}30103,\ \text{d. i.}\ \log x-\log y\leqq\log 2.$$

In diesem Falle suche man die Differenz $\log x-\log y$ in der zweiten Spalte für B auf, deren grösste Zahl nach dem Obigen 0,30103 ist, und nehme aus der ersten und dritten Spalte das entsprechende A und C. Dann hat man nach dem Vorhergehenden die beiden folgenden Gleichungen:

$$b^{-A}=b^{\log x-\log y}-1,$$

$$(b^{\log x-\log y}-1)(b^{C}-1)=1.$$

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich leicht:

$$b^{\log x-\log y}=\frac{b^{C}}{b^{C}-1},$$

also

$$b^{\log y-\log x}=1-b^{-C},$$

und folglich:

$$1-b^{\log y-\log x}=b^{-C}.$$

Daher haben wir die beiden folgenden Ausdrücke:

$$1-b^{\log y-\log x}=b^{-C},$$

$$b^{\log x-\log y}-1=b^{-A};$$

also:

$$\log(1-b^{\log y-\log x})=-C,$$

$$\log(b^{\log x-\log y}-1)=-A;$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\log(x-y)=\log x+\log(1-b^{\log y-\log x}),$$
$$\log(x-y)=\log y+\log(b^{\log x-\log y}-1)$$

ist, so wird $\log(x-y)$ mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke leicht gefunden:

$$\log(x-y)=\log x-\mathrm{C},\quad \log(x-y)=\log y+\mathrm{A}.$$

Dies dient zur vollständigen Erläuterung der Einrichtung und des Gebrauchs der Gauss'schen Tafeln in ihrer ursprünglichen Form.

Eine andere Einrichtung ist der Tafel gegeben in: Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln von E. F. August. Berlin. 1846., welche allgemeiner gekannt zu sein verdient, als sie zu sein scheint.

Dieser Einrichtung liegen die beiden aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\log(x+y)=\log y+\log(b^{\log x-\log y}+1),$$
$$\log(x-y)=\log y+\log(b^{\log x-\log y}-1)$$

zu Grunde, wo es in der ersten Gleichung ganz gleichgültig ist, welche der beiden Zahlen x, y die grössere und welche die kleinere ist, in der zweiten Gleichung aber y als die kleinere der beiden Zahlen x, y angenommen wird. Als Argument ist in der Tafel die Grösse

$$\mathrm{A}=\log x-\log y$$

angenommen, welches nun aber nicht, wie in der ursprünglichen Gauss'schen Tafel stets positiv ist, sondern positiv und negativ sein kann, und nach einer der Einrichtung der gewöhnlichen Logarithmentafeln ganz conformen, daher durch sich selbst leicht verständlichen Einrichtung von $\mathrm{A}=-4{,}0$ bis $\mathrm{A}=+5{,}9$ fortschreitet. Für diese Argumente sind in der Tafel die Werthe der Grösse

$$\log(b^{\log x-\log y}+1)\quad\text{oder}\quad\log(1+b^{\log x-\log y})$$

berechnet. Für positive Argumente sind die Zahlen dieser Tafel offenbar einerlei mit den Zahlen

$$\mathrm{C}=\log(1+b^{\log x-\log y})$$

der dritten Spalte der ursprünglichen Gauss'schen Tafel. Für negative Argumente sind die Zahlen einerlei mit den Zahlen

$$\mathrm{B}=\log(1+b^{\log y-\log x})$$

oder

$$B = \log(1 + b^{-(\log x - \log y)})$$

der zweiten Spalte der ursprünglichen Gauss'schen Tafel, wie augenblicklich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass die Gauss'sche Tafel das stets positive Argument $\log x - \log y$ hat. Die August'sche Tafel konnte daher aus der Gauss'schen Tafel, bei verschiedener Anordnung der Zahlen, unmittelbar abgeschrieben werden. Der Gebrauch dieser Tafel ist nun aber folgender, wobei wir jetzt die den positiven oder negativen Argumenten

$$A = \log x - \log y$$

entsprechenden Zahlen der Tafel durch B bezeichnen wollen, wo also

$$B = \log(b^{\log x - \log y} + 1)$$

ist.

Um $\log(x+y)$ zu finden, berechne man durch einfache Subtraction der gegebenen Logarithmen $\log x$ und $\log y$, abgesehen davon, welcher der grössere oder der kleinere ist, das Argument

$$A = \log x - \log y,$$

und nehme das dazu gehörende B aus der Tafel. Weil nun nach dem Obigen

$$\log(x+y) = \log y + \log(b^{\log x - \log y} + 1)$$

ist, so ist

$$\log(x+y) = \log y + B,$$

mittelst welcher Formel der gesuchte Logarithmus der Summe durch eine blosse Addition leicht gefunden wird.

Um $\log(x-y)$ zu finden, wobei y kleiner als x vorausgesetzt wird, berechne man die Differenz $\log x - \log y$, suche dieselbe unter den Zahlen B der Tafel auf, und nehme aus derselben das entsprechende positive oder negative A. Weil nun allgemein nach dem Obigen

$$B = \log(b^A + 1),$$

also jetzt

$$\log x - \log y = \log(b^A + 1)$$

ist, so ist

$$b^{\log x - \log y} = b^{\log(b^A + 1)} = b^A + 1,$$

also

$$b^{A} = b^{\log x - \log y} - 1,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$A = \log(b^{\log x - \log y} - 1).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\log(x-y) = \log y + \log(b^{\log x - \log y} - 1),$$

folglich

$$\log(x-y) = \log y + A,$$

mittelst welcher Formel $\log(x-y)$ sehr leicht gefunden wird, indem nur A immer gehörig mit seinem durch die Tafel gegebenen Vorzeichen in Rechnung gebracht wird.

Ich stehe nicht an, zu bemerken, dass es mir selbst am zweckmässigsten scheinen möchte, für das stets positive Argument $A = \log x - \log y$ eine Tafel für $B = \log(b^{\log x - \log y} + 1)$ und eine zweite Tafel für $C = \log(b^{\log x - \log y} - 1)$ neu zu berechnen. Dann wäre, weil nach dem Obigen

$$\log(x+y) = \log y + \log(b^{\log x - \log y} + 1),$$
$$\log(x-y) = \log y + \log(b^{\log x - \log y} - 1)$$

ist,

$$\log(x+y) = \log y + B, \quad \log(x-y) = \log y + C;$$

wo immer y als die kleinere der beiden Zahlen x, y angenommen wird. In diese Tafel würde man immer mit dem positiven Argument $A = \log x - \log y$ eingehen, und unmittelbar aus der Tafel das entsprechende B oder C entnehmen, jenachdem es sich um die Berechnung von $\log(x+y)$ oder $\log(x-y)$ handelte, welche Logarithmen dann leicht mittelst der obigen Formeln gefunden würden. Eine solche Tafel würde nach meiner Meinung die durch dieselben dargebotenen Vortheile sehr erhöhen, da doch immer der umgekehrte Gebrauch der jetzigen Tafeln manche Nachtheile mit sich führt. Man hat ja bekanntlich aus diesem Grunde jetzt auch schon den Gebrauch der gewöhnlichen Logarithmen durch die Berechnung sogenannter Anti-Logarithmen zu erhöhen gesucht.

Wie die verdienstliche Zech'sche Tafel eingerichtet ist, kann ich jetzt nicht mit Bestimmtheit sagen, da mir dieselbe gerade nicht zur Hand ist. Auch werden von Lehrern auf Schulen wohl nur die Köhler'schen oder August'schen Tafeln gebraucht werden, und dem Schulunterrichte zu dienen, war der Hauptzweck der obigen Erläuterungen; die trefflichen Bremiker'schen Tafeln enthalten die Gauss'schen Logarithmen nicht. G.

XXVI.

Ueber die Relation, die zwischen den Abschnitten der Seiten eines Dreiecks besteht, welche durch sich in einem Punkte schneidende Gerade gebildet werden.

Von

Herrn Doctor *Durège*

in Zürich.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt aus den Ecken eines Dreiecks gerade Linien, so besteht zwischen den Abschnitten, welche diese Linien auf den gegenüberliegenden Seiten bilden, wenn man diese Abschnitte ordnungsmässig mit m, n, p und m', n', p' bezeichnet, die bekannte Relation:

$$\frac{m.n.p}{m'.n'.p'}=1.$$

Wir wollen mit dem Beweise dieses Satzes zugleich den des reciproken verbinden, und daran dann noch einige Bemerkungen knüpfen.

Die Bezeichnungen sollen so eingerichtet werden, dass in der reciproken Figur die Geraden mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, wie in der ursprünglichen Figur die entsprechenden Punkte, und umgekehrt. (Taf. V. Fig. 1. und 2.)

Drei Punkte (Gerade) a, b, c bilden ein Dreieck, die Verbindungslinien (Durchschnittspunkte) derselben seien α, β, γ. Ich nehme beliebig einen vierten Punkt (eine vierte Gerade) M an und bezeichne die Verbindungslinien (Durchschnittspunkte) derselben mit a, b, c durch A, B, C. Bezeichne ich ferner noch

die Durchschnittspunkte (Verbindungslinien) dieser drei Geraden (Punkte) mit α, β, γ durch 1, 2, 3, so lautet der zu beweisende Satz:

$$b1.c2.a3 = c1.a2.b3,$$

$$\sin(b1).\sin(c2).\sin(a3) = \sin(c1).\sin(a2).\sin(b3).$$

Im Dreiecke $b1a$ oder $\alpha\gamma A$ und den analogen Dreiecken ist:

$$\begin{array}{ll}
b1.\sin(\alpha\gamma) = a1.\sin(A\gamma) & \alpha\gamma.\sin(b1) = A\gamma.\sin(a1) \\
c2.\sin(\beta\alpha) = b2.\sin(B\alpha) & \beta\alpha.\sin(c2) = B\alpha.\sin(b2) \\
a3.\sin(\gamma\beta) = c3.\sin(C\beta) & \gamma\beta.\sin(a3) = C\beta.\sin(c3) \\
c1.\sin(\beta\alpha) = a1.\sin(A\beta) & \beta\alpha.\sin(c1) = A\beta.\sin(a1) \\
a2.\sin(\gamma\beta) = b2.\sin(B\gamma) & \gamma\beta.\sin(a2) = B\gamma.\sin(b2) \\
b3.\sin(\alpha\gamma) = c3.\sin(C\alpha) & \alpha\gamma.\sin(b3) = C\alpha.\sin(c3)
\end{array}$$

Daraus ergiebt sich:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{b1.c2.a3}{c1.a2.b3} = \dfrac{\sin(A\gamma)\sin(B\alpha)\sin(C\beta)}{\sin(A\beta)\sin(B\gamma)\sin(C\alpha)}, \\[2ex]
\dfrac{\sin(b1)\sin(c2)\sin(a3)}{\sin(c1)\sin(a2)\sin(b3)} = \dfrac{A\gamma.B\alpha.C\beta}{A\beta.B\gamma.C\alpha}.
\end{array}\right.$$

Nun ist ferner im Dreiecke $b1M$ oder $BA\alpha$ und den analogen Dreiecken:

$$\begin{array}{ll}
b1.\sin(B\alpha) = M1.\sin(AB) & B\alpha.\sin(b1) = AB.\sin(M1) \\
c2.\sin(C\beta) = M2.\sin(BC) & C\beta.\sin(c2) = BC.\sin(M2) \\
a3.\sin(A\gamma) = M3.\sin(CA) & A\gamma.\sin(a3) = CA.\sin(M3) \\
c1.\sin(C\alpha) = M1.\sin(CA) & C\alpha.\sin(c1) = CA.\sin(M1) \\
a2.\sin(A\beta) = M2.\sin(AB) & A\beta.\sin(a2) = AB.\sin(M2) \\
b3.\sin(B\gamma) = M3.\sin(BC) & B\gamma.\sin(b3) = BC.\sin(M3)
\end{array}$$

Hieraus folgt:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{b1.c2.a3}{c1.a2.b3} = \dfrac{\sin(A\beta)\sin(B\gamma)\sin(C\alpha)}{\sin(A\gamma)\sin(B\alpha)\sin(C\beta)}, \\[2ex]
\dfrac{\sin(b1)\sin(c2)\sin(a3)}{\sin(c1)\sin(a2)\sin(b3)} = \dfrac{A\beta.B\gamma.C\alpha}{A\gamma.B\alpha.C\beta}.
\end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt dann unmittelbar:

$$(3)\quad \frac{b1.c2.a3}{c1.a2.b3} = 1, \qquad \frac{\sin(b1)\sin(c2)\sin(a3)}{\sin(c1)\sin(a2)\sin(b3)} = 1;$$

$$(4)\quad \frac{\sin(A\beta)\sin(B\gamma)\sin(C\alpha)}{\sin(A\gamma)\sin(B\alpha)\sin(C\beta)}=1,\qquad \frac{A\beta\,.\,B\gamma\,.\,C\alpha}{A\gamma\,.\,B\alpha\,.\,C\beta}=1.$$

Dies war der zu beweisende Satz. Allein es hat sich dabei noch mehr ergeben. Die Gleichung (4 II.) sagt nämlich von den Punkten A, B, C dasselbe aus, wie die Gleichung (3 I.) von den Punkten 1, 2, 3. Die Relation zwischen den Abschnitten findet also nicht bloss dann statt, wenn die Verbindungslinien der Punkte, welche die Abschnitte bilden, mit den Ecken des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, sondern auch dann, wenn die Punkte selbst in einer geraden Linie liegen.

Ich will nun zuerst nachweisen, dass dies die beiden einzig möglichen Fälle sind, in welchen die in Rede stehende Relation stattfindet. Zu diesem Ende nehme ich an, es seien auf den Seiten eines Dreiecks abc (Taf. V. Fig. 1.) drei Punkte so gegeben, dass zwischen den gehörig bezeichneten Abschnitten auf den Seiten des Dreiecks, m, n, p und m', n', p', die Relation

$$(5)\qquad \frac{m\,.\,n\,.\,p}{m'\,.\,n'\,.\,p'}=1$$

stattfindet, und stelle zugleich die Bedingung, dass die Verbindungslinien der gegebenen Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks sich nicht in einem Punkte schneiden sollen. Ich werde dann nachweisen, dass die drei gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen müssen.

Es seien 1, 2, 4 die gegebenen Punkte. Ziehe ich $a1$ und $b2$ und durch den Durchschnittspunkt M beider die Gerade $c3$, so ist, wenn ich die neuen Abschnitte auf ab mit π und π' bezeichne,

$$m\,.\,n\,.\,\pi = m'\,.\,n'\,.\,\pi'.$$

Da aber auch

$$m\,.\,n\,.\,p = m'\,.\,n'\,.\,p'$$

war, so muss

$$\pi : \pi' = p : p'$$

sein, d. h. die Punkte 3 und 4 müssen zugeordnete harmonische Punkte zu a, b sein. Betrachtet man nun $1M2c$ als ein vollständiges Vierseit und erinnert sich, dass die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits sich in zu den Ecken desselben zugeordneten harmonischen Punkten schneiden, so erhellet, dass die Diagonale 12 die Diagonale ab im Punkte 4 schneiden wird, dass also 1, 2, 4 in gerader Linie liegen müssen.

Auch die Gleichungen (3 II.) und (4 I.) sagen dasselbe aus.

Es wird also die Relation zwischen den Sinussen sowohl dann stattfinden, wenn die drei Strahlen die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in solchen Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, als auch, wenn die drei Strahlen sich in einem Punkte schneiden. Auch hier lässt sich ebenso zeigen, dass nur in diesen beiden Fällen allein die in Rede stehende Relation stattfinden kann.

Es seien nämlich durch die Ecken eines Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ (Taf. V. Fig. 2.) drei Strahlen 1, 2, 4 so gezogen, dass zwischen den gehörig bezeichneten Winkeln mit den Seiten des Dreiecks, m, n, p und m', n', p', die Relation

$$(6) \qquad \sin m \, . \sin n \, . \sin p = \sin m' \, . \sin n' \, . \sin p'$$

stattfindet. Nehmen wir nun an, die Durchschnittspunkte der Strahlen 1, 2, 4 mit den gegenüberliegenden Seiten liegen nicht in einer geraden Linie, so kann man einen Strahl 3 durch γ so ziehen, dass diese Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen. Bezeichnet man die Winkel von 3 mit a und b durch π und π', so hat man

$$\sin m \, . \sin n \, . \sin \pi = \sin m' \, . \sin n' \, . \sin \pi',$$

und folglich

$$\sin \pi : \sin \pi' = \sin p : \sin p'.$$

Die Strahlen 3 und 4 sind also zugeordnete harmonische Strahlen zu den Seiten a und b; es sind also auch β, C', α, C harmonische Punkte. Nach dem Vorhergehenden muss daher der Strahl 3 durch den Durchschnittspunkt von 1 und 2 hindurchgehen.

Wir haben nun also gesehen, dass:

1) wenn auf den Seiten eines Dreiecks drei Punkte gegeben sind, so dass zwischen den dadurch gebildeten Abschnitten die Relation (5) stattfindet, allemal entweder diese drei Punkte in gerader Linie liegen oder die Verbindungslinien der Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken sich in einem Punkte schneiden.

2) Wenn durch die Ecken eines Dreiecks Strahlen gezogen werden dergestalt, dass zwischen den dadurch gebildeten Winkelabschnitten die Relation (6) stattfindet, so schneiden sich die Strahlen entweder in einem Punkte oder ihre Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Seiten liegen in gerader Linie.

Wir wollen nun diese Sätze in ihrer ganzen Vollständigkeit betrachten. Sind die drei Verhältnisse $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{p}{p'}$, deren Product der Einheit gleich ist, gegeben, so wird durch jedes Ver-

hältniss auf der zugehörigen Seite des Dreiecks nicht ein Punkt, sondern vielmehr zwei Punkte bestimmt, die zu den zugehörigen Ecken des Dreiecks zugeordnete harmonische Punkte sind. Man erhält also sechs Punkte, von denen je drei, auf verschiedenen Seiten des Dreiecks liegende, beliebig mit einander combinirt werden können. Wir wollen diejenigen Punkte, welche zwischen die Ecken des Dreiecks fallen, innere nennen und mit A, B, C (Taf. V. Fig. 3.) bezeichnen, dagegen diejenigen Punkte, welche auf die Verlängerungen der Seiten fallen, äussere nennen und mit A', B', C' bezeichnen. Dann finden folgende Combinationen der Punkte statt:

A, B, C; Durchschnittspunkt der drei Verbindungslinien N,
A, B', C'; „ „ „ „ N_1,
B, C', A'; „ „ „ „ N_2,
C, A', B'; „ „ „ „ N_3;

und ferner folgende Combinationen, wo die drei Punkte in gerader Linie liegen:

A' B' C'
A' B C
B' C A
C' A B.

Combinirt man also entweder die drei inneren Punkte oder einen inneren mit zwei äusseren, so schneiden sich die drei Verbindungslinien mit den Ecken des Dreiecks in einem Punkte. Combinirt man dagegen entweder die drei äusseren Punkte, oder zwei innere mit einem äusseren, so liegen je drei Punkte auf einer Geraden.

Sind ferner die drei Verhältnisse $\frac{\sin m}{\sin m'}$, $\frac{\sin n}{\sin n'}$, $\frac{\sin p}{\sin p'}$, deren Product der Einheit gleich ist, gegeben, so wird durch jedes Verhältniss in der ihm zugehörigen Ecke des Dreiecks nicht ein Strahl, sondern zwei Strahlen bestimmt, welche zu den zugehörigen Seiten des Dreiecks zugeordnete harmonische Strahlen sind. Man erhält also sechs Strahlen, von denen je drei, durch verschiedene Ecken des Dreiecks gehende, beliebig mit einander combinirt werden können. Nennen wir wiederum die Strahlen, welche innerhalb des Dreiecks liegen, innere, und bezeichnen sie mit 1, 2, 3, so wie die, welche ausserhalb des Dreiecks liegen, äussere, und bezeichnen sie mit I, II, III (Taf. V. Fig. 3.), so haben wir folgende Combinationen:

Strahlen, die sich in einem Punkte schneiden:

1 2 3	Durchschnittspunkt	N;	2 III I	Durchschnittspunkt	N_2;
1 II III	„	N_1;	3 I II	„	N_3.

Strahlen, deren Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen:

I	II	III	Durchschnittspunkte	A', B', C';
I	2	3	„	A', B, C;
II	3	1	„	B', C, A;
III	1	2	„	C', A, B.

Combinirt man also drei innere oder einen inneren und zwei äussere Strahlen, so schneiden sie sich in einem Punkte. Combinirt man dagegen drei äussere oder einen äusseren und zwei innere Strahlen, so liegen die Durchschnittspunkte mit den gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden.

Es erhellt, dass hier die reciproke Betrachtung eigentlich nichts Neues ergiebt, denn die Grundbedingung wird mit der Grundbedingung der ursprünglichen Betrachtung zugleich erfüllt.

XXVII.

Einige Beweise des Fermat'schen Lehrsatzes.

(Archiv Theil XXVII. Heft 1.)

Von

Herrn Doctor *Heinen*,

Director der Realschule zu Düsseldorf.

Beschreibt man über dem Durchmesser AB (Taf. V. Fig. 4.) eines Halbkreises AEB als Grundlinie ein Rechteck $ABCD$, dessen Höhe AC oder BD der Sehne des Quadranten des Kreises,

zu welchem der Halbkreis AEB gehört, gleich ist, und zieht von den beiden Punkten C und D nach dem beliebigen Punkte E des Halbkreises die Linien CE und DE, welche den Durchmesser AB in F und G schneiden, so ist:

$$AG^2 + BF^2 = AB^2.$$

A) I. Es ist

$$AG = AB - BG, \qquad BF = AB - AF;$$

folglich

$$AG^2 + BF^2 = AB^2 + AB^2 - 2AB.(BG + AF) + BG^2 + AF^2. \quad (1)$$

Fällt man nun auf AB die Senkrechte EK, so ist $\triangle BGD \sim \triangle EGK$, und $\triangle EFK \sim \triangle AFC$, mithin, wenn man $BD = AC = r\sqrt{2}$ setzt,

$$BG = \frac{BK.r\sqrt{2}}{EK + r\sqrt{2}}, \qquad AF = \frac{AK.r\sqrt{2}}{EK + r\sqrt{2}}.$$

Hieraus ergibt sich, da $BK + AK = AB = 2r$ und $BK^2 + AK^2 = AB^2 - 2BK.AK = 4r^2 - 2EK^2$ ist,

$$2AB.(BG + AF) = \frac{4r.2r.r\sqrt{2}}{EK + r\sqrt{2}} = \frac{4r^2.2r\sqrt{2}}{EK + r\sqrt{2}},$$

$$BG^2 + AF^2 = \frac{2r^2(4r^2 - 2EK^2)}{(EK + r\sqrt{2})^2} = \frac{4r^2(r\sqrt{2} - EK)}{EK + r\sqrt{2}},$$

folglich

$$-2AB.(BG + AF) + BG^2 + AF^2 = -4r^2 = -AB^2,$$

und nach (1)

$$AG^2 + BF^2 = AB^2.$$

II. Man verbinde A und B mit E, so ist

$$AE^2 = AG^2 + GE^2 - 2AG.GK,$$

$$EB^2 = FE^2 + FB^2 - 2FB.FK;$$

also:

$$AE^2 + EB^2 = AB^2 = AG^2 + BF^2 + GE^2 + FE^2 - 2AG.GK - 2FB.FK.$$

Aber

$$FE^2 + GE^2 = 2EK^2 + FK^2 + KG^2$$

und

$$2AG.GK + 2FB.KF = 2AK.KG + 2KG^2 + 2BK.KF + 2KF^2,$$

also

$$AB^2 = AG^2 + BF^2 + 2EK^2 - KG^2 - FK^2 - 2AK.KG - 2BK.KF.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke EKG und GBD, FEK und AFC aber ist

$$KG = \frac{KB.EK}{EK+BD}, \quad FK = \frac{KA.EK}{EK+AC};$$

folglich, wenn $BD = AC = r\sqrt{2}$, $KB^2 + KA^2 = 4r^2 - 2EK^2$ gesetzt wird,

$$KG^2 + FK^2 = \frac{KE^2}{(KE+r\sqrt{2})^2}.(4r^2 - 2KE^2) = \frac{2KE^2}{KE+r\sqrt{2}}.(r\sqrt{2} - KE)$$

und

$$2AK.KG + 2BK.KF = \frac{4KE.KB.KA}{KE+r\sqrt{2}} = \frac{2KE^2.2KE}{KE+r\sqrt{2}}.$$

Die negative Summe der beiden letzten Gleichungen aber gibt $-2EK^2$, folglich ist

$$AB^2 = AG^2 + BF^2.$$

B) Nimmt man den Satz als richtig an, also $AB^2 = AG^2 + BF^2$, so ist:

$$(AF + FG + GB)^2 = (AF + FG)^2 + (BG + FG)^2,$$

folglich:

$$2AF.BG = FG^2.$$

Die Richtigkeit dieser Formel aber ergibt sich auf folgende Weise:

1) Zieht man (Taf. V. Fig. 4.) EH und EJ, so ist $\Delta\, ACH \sim \Delta\, BDJ$ (weil die Schenkel senkrecht stehen). Also

$$AC : CH = DJ : BD \text{ oder } AC.BD = DJ.CH = AC^2 = \frac{CD^2}{2},$$

$$CD^2 = 2CH.DJ.$$

Ferner ist:

$$\frac{CD}{FG} = \frac{CH}{AF} = \frac{DJ}{BG}, \text{ also } \frac{CD^2}{FG^2} = \frac{CH.DJ}{AF.BG} = \frac{CD^2}{2AF.BG},$$

mithin

$$2AF.BG = FG^2.$$

2) Verlängert man (Taf. V. Fig. 5.) AE und BE, bis AE der Seite BD in J, BE der Seite AC in H begegnet, so ist $\Delta\, ABH \sim \Delta\, ABJ$ (weil die Schenkel senkrecht stehen). Also

$$AB:AH = BJ:AB$$

oder

$$AB^2 = AH.BJ. \tag{1}$$

Für das Dreieck ACF ist:

$$\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AH}{HC} = 1 = \frac{BA}{FG}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AH}{HC} = 1,$$

also

$$\frac{FB}{FG} = \frac{AH+AC}{AH} \text{ oder } \frac{FB-FG}{FG} = \frac{AC}{AH} = \frac{BG}{FG}. \tag{2}$$

Für das Dreieck BDG findet man ebenso:

$$\frac{BD}{BJ} = \frac{AF}{FG} = \frac{AC}{BJ}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{BG.AF}{FG^2} = \frac{AC^2}{AH.BJ} = \frac{AB^2}{2AH.BJ},$$

oder nach (1):

$$\frac{BG.AF}{FG^2} = \tfrac{1}{2}, \text{ also } FG^2 = 2BG.AF.$$

3) Errichtet man (Taf. V. Fig. 6.) in F und G auf AB Senkrechte, so ist $\Delta AFH \backsim \Delta BGJ$, also $AF:HF = JG:BG$ oder $AF.BG = HF.JG$.

Nun ist:

$$HF = JG, \text{ denn } \frac{EF}{EC} = \frac{HF}{AC} = \frac{JG}{BD}.$$

folglich

$$AF.BG = HF^2.$$

Aber:

$$\frac{HF^2}{AC^2} = \frac{FG^2}{CD^2} = \frac{FG^2}{2AC^2}, \text{ folglich } HF^2 = \frac{FG^2}{2},$$

also

$$2AF.BG = FG^2.$$

Ein directer Beweis, bei welchem obige Formel nicht in Betracht kommt, ist folgender:

Man verbinde (Taf. V. Fig. 6.) A mit J, B mit H und H mit J, so ist:

$$AG^2 = (AE^2 + EJ^2) - JG^2,$$
$$BF^2 = (BE^2 + EH^2) - HF^2,$$
$$AG^2 + BF^2 = AB^2 + HJ^2 - JG^2 - HF^2.$$

Nun ist

$$\frac{HF}{AC} = \frac{JH}{BD}, \text{ also } JG = HF \text{ und } HJ = FG;$$

daher

$$AG^2 + BF^2 = AB^2 + FG^2 - 2HF^2.$$

Aber

$$\frac{HF^2}{AC^2} = \frac{FG^2}{CD^2}, \text{ also } FG^2 = 2HF^2,$$

folglich

$$AB^2 = AG^2 + BF^2.$$

XXVIII.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Von
Herrn Professor Dr. *J. Dienger*
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

I.

In den bekannten „Vorlesungen über die Integralrechnung" von Moigno finden sich im Anfange der 19. Vorlesung mehrere interessante Umformungen bestimmter Integrale, deren Ableitung mir jedoch sehr unklar und verworren erscheint. Ich will daher im Nachstehenden einen Theil derselben genauer erweisen; die

übrigen würden sich ganz ebenso erweisen, beziehungsweise berichtigen lassen.

Wir wollen uns das bestimmte Integral

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z,\ a_3x+b_3y+c_3z)\partial x\partial y\partial z \tag{1}$$

vorlegen, in welchem $a_1, b_1, \ldots, c_3$ bestimmte Konstanten sind, und von welchem wir voraussetzen, dass die Grösse unter den Integralzeichen innerhalb der Gränzen der Integration nicht unendlich werde — eine Voraussetzung, die wir stillschweigend bei allen folgenden bestimmten Integralen machen. Behufs der Umformung führen wir drei neue Veränderliche ξ, v, ζ ein, die mit den früheren zusammenhängen durch die Gleichungen:

$$a_1x+b_1y+c_1z=\xi,\quad a_2x+b_2y+c_2z=v,\quad a_3x+b_3y+c_3z=\zeta; \tag{2}$$

woraus folgen möge:

$$Dx+A_1\xi+B_1v+C_1\zeta,\quad Dy=A_2\xi+B_2v+C_2\zeta,\quad Dz=A_3\xi+B_3v+C_3\zeta; \tag{3}$$

wo bekanntlich D die Determinante des Systems der Koeffizienten in (2) ist; A_1 ist ferner der Koeffizient von a_1 in derselben, B_1 der Koeffizient von a_2, C_1 der von $a_3, \ldots,$ A_3 der von c_1, B_3 von c_2, C_3 von c_3. (Vergl. Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten, §. 9.) Formt man nun das bestimmte Integral (1) nach den in meiner Differential- und Integralrechnung §. 52. IV. gegebenen Formeln um, so ist die dortige Grösse M gleich

$$\frac{A_3(B_1C_2-C_1B_2)+B_3(C_1A_2-C_2A_1)+C_3(A_1B_2-A_2B_1)}{D^3}=\frac{D^2}{D^3}=\frac{1}{D},$$

wenn man Baltzer a. a. O. §. 7. hiermit vergleicht. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} D&=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,\\ A_1&=b_2c_3-b_3c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Gränzen der neuen Veränderlichen sind:

$$a_3x+b_3y+c_3z=\zeta \text{ für } \zeta,\quad (a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3+b_3c_2)y=c_3v-c_2\zeta \text{ für } v,$$
$$Dx=A_1\xi+B_1v+C_1\zeta \text{ für } \xi;$$

aus welchen nun für die Gränzen folgt (wobei die untere Gränze immer zuerst geschrieben ist):

wenn $c_3 > 0$, so sind die Gränzen von ζ: $-\infty$ und $+\infty$,
„ $c_3 < 0$, „ „ „ „ „ ζ: $+\infty$ „ $-\infty$;
„ $\frac{A_1}{c_3} > 0$, „ „ „ „ „ v: $-\infty$ „ $+\infty$,
„ $\frac{A_1}{c_3} < 0$, „ „ „ „ „ v: $+\infty$ „ $-\infty$;
„ $\frac{D}{A_1} > 0$, „ „ „ „ „ ξ: $-\infty$ „ $+\infty$,
„ $\frac{D}{A_1} < 0$, „ „ „ „ „ ξ: $+\infty$ „ $-\infty$.

Je nachdem also die Zeichen von D, A_1, c_3 beschaffen sind, werden die Gränzen von ξ, v, ζ andere sein, und da in dieser Beziehung acht Kombinationen möglich sind, so wird man die folgende Tabelle haben, in der je die Zeichen von D, A_1, c_3 zuerst angegeben sind, und nebenan die Gränzen von ξ, v, ζ:

$D>0$	$A_1>0$	$c_3>0$	$-\infty+\infty$	$-\infty+\infty$	$-\infty+\infty$
$D>0$	$A_1>0$	$c_3<0$	$-\infty+\infty$	$+\infty-\infty$	$+\infty-\infty$
$D>0$	$A_1<0$	$c_3>0$	$+\infty-\infty$	$+\infty-\infty$	$-\infty+\infty$
$D>0$	$A_1<0$	$c_3<0$	$+\infty-\infty$	$-\infty+\infty$	$+\infty-\infty$
$D<0$	$A_1>0$	$c_3>0$	$+\infty-\infty$	$-\infty+\infty$	$-\infty+\infty$
$D<0$	$A_1>0$	$c_3<0$	$+\infty-\infty$	$+\infty-\infty$	$+\infty-\infty$
$D<0$	$A_1<0$	$c_3>0$	$-\infty+\infty$	$+\infty-\infty$	$-\infty+\infty$
$D<0$	$A_1<0$	$c_3<0$	$-\infty+\infty$	$-\infty+\infty$	$+\infty-\infty$

Hieraus geht hervor, dass, wenn man überall als Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ setzt, dabei den Satz beachtet, dass bei Umkehrung der Gränzen das bestimmte Integral sein Zeichen wechselt, man für $D>0$ den Werth nicht ändert, für $D<0$ aber das Zeichen sich umkehrt. Ist also k der absolute (positiv genommene) Werth von D, so ist endlich:

(5)

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z,\ a_3x+b_3y+c_3z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$
$$=\frac{1}{k}\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\ v,\ \zeta)\,\partial\xi\,\partial v\,\partial\zeta.$$

Sei die Funktion f so beschaffen, dass

$$f(u,\, v,\, w) = e^{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\, F\left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right),$$

so ergiebt also die (5):

(5')

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, F\left(\frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z}{\sqrt{t}}\right) \partial x\, \partial y\, \partial z$$

$$= \frac{1}{k} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\, F\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\right) \partial \xi\, \partial v\, \partial \zeta,$$

wo zur Abkürzung

$$t = (a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2.$$

Angenommen nun, die Koefficienten $a_1, \ldots\ldots, c_3$ genügen folgenden Bedingungen:

(6)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \alpha^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \beta^2, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \gamma^2;$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0, \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0;$$

was immer möglich ist, da, wenn

$$\cos m_1,\ \cos n_1,\ \cos p, \ldots\ldots;\ \cos m_3,\ \cos n_3,\ \cos p_3$$

die bekannten neun Cosinus sind, die bei der Umformung rechtwinklicher Koordinaten auftreten, man nur zu setzen braucht:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = \alpha \cos m_1, & a_2 = \alpha \cos m_2, & a_3 = \alpha \cos m_3; \\ b_1 = \beta \cos n_1, & b_2 = \beta \cos n_2, & b_3 = \beta \cos n_3; \\ c_1 = \gamma \cos p_1, & c_2 = \gamma \cos p_2, & c_3 = \gamma \cos p_3; \end{array}\right\} \quad (6')$$

alsdann ist $t = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$ und die (5') wird:

(7)

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}}\, F\left(\frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}}\right) \partial x\, \partial y\, \partial z$$

$$= \frac{1}{k} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\, F\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\right) \partial \xi\, \partial v\, \partial \zeta,$$

wo nun aber, wie man aus **Baltzer** a. a. O. §. 15. 5. leicht schliesst, $k^2 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$, $k = \alpha\beta\gamma$ ist.

Setzt man in dem Integrale der ersten Seite: $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$, und in dem der zweiten: $\xi = \varrho\cos u\cos v$, $v = \varrho\sin u\cos v$, $\zeta = \varrho\sin v$, so findet man, wie in meiner Differential- und Integralrechnung §. 110., dass die Gränzen von r und ϱ sind 0 und ∞, von φ und u: 0 und 2π, von ψ und v: $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, da nur dadurch alle Punkte des unendlichen Raumes umfasst sind, so dass die (7) wird:

$$\int_0^\infty \partial r \int_0^{2\pi} \partial\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2\cos\psi e^{-r\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi}} F\left(\frac{a_3\cos\varphi\cos\psi + b_3\sin\varphi\cos\psi + c_3\sin\psi}{\sqrt{[\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi]}}\right)\partial\psi$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int_0^\infty \partial\varrho \int_0^{2\pi} \partial u \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varrho^2\cos v e^{-\varrho} F(\sin v)\partial v,$$

oder, wenn man die Integrationen nach r und ϱ vollzieht, so wie die nach u:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \partial\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi}{\sqrt{[\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi]^3}} F\left(\frac{a_3\cos\varphi\cos\psi + b_3\sin\varphi\cos\psi + c_3\sin\psi}{\sqrt{[\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi]}}\right)\partial\psi \\ &= \frac{2\pi}{\alpha\beta\gamma}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos v F(\sin v)\partial v. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Da aber $\frac{a_3^2}{\alpha^2} + \frac{b_3^2}{\beta^2} + \frac{c_3^2}{\gamma^2} = \cos^2 m_3 + \cos^2 n_3 + \cos^2 p_3 = 1$, so werden wir also zu setzen haben:

$$a_3 = \frac{\alpha k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}, \quad b_3 = \frac{\beta k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}}, \quad c_3 = \frac{\gamma k_3}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}};$$

wo k_1, k_2, k_3 willkürliche Grössen sind, was immer angeht, da hiedurch drei der neun Cosinus in (6') bestimmt sind. Setzt man endlich $F(t)=f[t\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}]$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{\sqrt{[\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi]^3}}f\left(\frac{\alpha k_1\cos\varphi\cos\psi+\beta k_2\sin\varphi\cos\psi+\gamma k_3\sin\psi}{\sqrt{[\alpha^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\gamma^2\sin^2\psi]}}\right)\partial\psi\\ =\frac{2\pi}{\alpha\beta\gamma}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v f[\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\sin v]\partial v,\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

worin α, β, γ, k_1, k_2, k_3 ganz beliebige Konstanten sind, die ersten drei jedoch positiv sein müssen.

Nimmt man $\alpha=\beta=\gamma=1$, so ist hieraus:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\psi f(k_1\cos\varphi\cos\psi+k_2\sin\varphi\cos\psi+k_3\sin\psi)\partial\psi=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v f[\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\sin v]\partial v,\quad(10)$$

welcher Satz von Poisson gefunden ist.

Wir wollen nun weiter in dem allgemeinen Satze (5) setzen:

$$f(u,v,w)=\frac{e^{-\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{w}F\left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right),$$

ferner $a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=0$, so ist:

$$[illegible] = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{[a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2]}}\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}{cz} F\left(\frac{cz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\right)\partial x\partial y\partial z$$

$$= \frac{1}{k}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}{\zeta} F\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+v^2+\zeta^2}}\right)\partial\xi\partial v\partial\zeta,$$

worin k der absolute Werth von abc ist. Führt man dieselben Polarkoordinaten wieder ein, wie oben, so ist:

$$\int_0^{\infty}\partial r\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{l} e^{-r\sqrt{[a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]}}\sqrt{a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi} \\ \times\frac{r^2\cos\psi}{c\sin\psi}F\left(\frac{c\sin\psi}{\sqrt{[a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]}}\right)\end{array}\right\}\partial\psi$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\infty}\partial\varrho\int_0^{2\pi}\partial u\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\varrho r^2}}{\sin v}\cos v F(\sin v)\partial v,$$

d. h.

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi}F\left(\frac{c\sin\psi}{\sqrt{[a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]}}\right)\frac{\partial\psi}{c\sin\psi}$$

$$= \frac{2\pi}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos v}{\sin v}F(\sin v)\partial v. \qquad (11)$$

Setzt man hier die $F(t)$ so, dass $F(t)=tf(t)$, so ergiebt sich:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{[a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}f\left(\frac{c\sin\psi}{[a^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}}\right)\partial\psi$$

$$= \frac{2\pi}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v f(\sin v)\partial v, \qquad (12)$$

welche Formel übrigens auch aus (8) hervorgeht. Setzt man noch spezieller $a=b$, nimmt a und c positiv an, so ist:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}f\left(\frac{c\sin\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{2\pi}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v f(\sin v)\partial v,$$

oder, wenn man die Integration nach φ vollzieht:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}f\left(\frac{c\sin\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{1}{2}}}\right)\partial\psi$$

$$=\frac{1}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v f(\sin v)\partial v, \qquad (13)$$

worin a und c positiv sind. Als Spezialisirungen ergeben sich hieraus:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\partial\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos v\partial v=\frac{2}{a^2c},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi\cos\psi\partial\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^2}=\frac{1}{a^2c^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin v\cos v\,\partial v=0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi\cos\psi\partial\psi}{[a^2\cos^2\psi+c^2\sin^2\psi]^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{a^2c^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin v^2\cos v\partial v=\frac{2}{3a^2c^3}\text{ u.s.w.}$$

II.

Das bestimmte Integral

$$ab\iint\frac{\sqrt{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\partial x\partial y, \qquad (14)$$

worin $\alpha^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}$, $\beta^2=\frac{b^2-c^2}{b^2}$, ausgedehnt auf alle positiven

Werthe von x und y, für welche $x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1$, drückt bekanntlich den achten Theil der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist, aus, wenn $a>b>c$.

Um nun das Integral in (14) zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}=\varrho,$$

wo also $\varrho \overline{\overline{>}} 1$ ist, woraus folgt:

$$\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2=1. \tag{15}$$

Die Gleichung (15) stellt eine Ellipse vor, deren Halbaxen sich ändern, wenn ϱ sich ändert. Lässt man ϱ gehen von 1 bis ∞, welche Werthe ϱ haben kann, wenn x und y die Werthe im Integrale (14) annehmen, so wird man eine Reihe Ellipsen aus (15) erhalten, welche so beschaffen sind, dass je eine nachfolgende die vorhergehenden umschliesst, ohne sie zu durchschneiden, während alle in dem Kreise $x^2+y^2=1$ enthalten sind, dem sie sich um so mehr nähern, je grösser ϱ wird. Das Integral in (14), nämlich $\int\int\sqrt{\varrho}\,\partial x\,\partial y$, ist, den Bedingungen der Aufgabe gemäss, ausgedehnt auf alle Punkte, die innerhalb des genannten Kreises, und zwar in seinem positiven Quadranten liegen, d. h. wenn *OA*, *OB* die positiven Koordinatenaxen sind, *MN* ein Kreisquadrant vom Halbmesser 1, so hat man in dem Integrale (14) x und y alle Werthe beizulegen, die als zusammengehörige Koordinaten irgend eines Punktes in *OMN* angesehen werden können. Denken wir uns nun die durch (15) ausgedrückten Ellipsen (von $\varrho=1$ bis $\varrho=\infty$) konstruirt, und seien *CD*, *C'D'* zwei zu ϱ und $\varrho+\varDelta\varrho$ gehörige, so liegt zwischen ihnen der Streifen *CDD'C'*, für welchen ϱ immer denselben Werth haben wird, wenn $\varDelta\varrho$ unendlich klein ist; das Integral in (14), ausgedehnt auf die Punkte in *CDC'D'*, wird also $=\sqrt{\varrho}\int\int\partial x\,\partial y$ sein, wo letzteres Integral auf die Punkte des fraglichen Streifens auszudehnen ist. Alsdann stellt dasselbe aber bekanntlich den Inhalt des Streifens dar, der als die Differenz *OC'D'* — *OCD*

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{\varrho+\varDelta\varrho-1}{\varrho+\varDelta\varrho-\alpha^2}}\cdot\sqrt{\frac{\varrho+\varDelta\varrho-1}{\varrho+\varDelta\varrho-\beta^2}}-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\alpha^2}}\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\beta^2}}$$

ist, d. h.

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\partial}{\partial\varrho}\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\alpha^2}\cdot\frac{\varrho-1}{\varrho-\beta^2}}\Delta\varrho.$$

Also ist der Theil des Integrals in (14), der auf die Punkte *CDC'D'* ausgedehnt wird,

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\right)\cdot\sqrt{\varrho}\,\Delta\varrho.$$

Lässt man ϱ gehen von 1 bis ∞ und summirt die erhaltenen Resultate, so hat man das ganze Integral in (14), das demnach

$$=\frac{\pi}{4}\int_1^\infty\sqrt{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\right)\partial\varrho$$

ist. Also ist die ganze Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids:

$$2\pi ab\int_1^\infty\sqrt{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\right)\partial\varrho,$$

welche Grösse in meinem oben angeführten Buche §. 108. I. auf elliptische Integrale reduzirt ist.

III.

Sei

$$y=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\sin ax\partial x,\quad z=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\cos ax\partial x\,(n>0),$$

so ergiebt sich leicht:

$$\left.\begin{aligned}(1+a^2)\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+2(n+1)a\frac{\partial y}{\partial a}+n(n+1)y=0,\\(1+a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}+2(n+1)a\frac{\partial z}{\partial a}+n(n+1)z=0;\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

wobei übrigens $z=\frac{1+a^2}{n}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+ay$ ist, indem $\frac{\partial y}{\partial a}=\int_0^\infty x^n e^{-x}\cos ax\partial x$ und

$$\int x^n e^{-x}\cos ax\partial x=\frac{x^n e^{-x}(a\sin ax-\cos ax)}{1+a^2}$$
$$-\frac{n}{1+a^2}\int x^{n-1}e^{-x}(a\sin ax-\cos ax)\partial x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}=-\frac{n}{1+a^2}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}(a\sin ax-\cos ax)\partial x=-\frac{n}{1+a^2}(ay-z).$$

Aus den Gleichungen

$$\int_0^\infty x^{n-1}\cos\alpha x\partial x=\frac{\Gamma(n)\cos\frac{1}{2}n\pi}{\alpha^n},\quad \int_0^\infty x^{n-1}\sin\alpha x\partial x=\frac{\Gamma(n)\sin\frac{1}{2}n\pi}{\alpha^n},$$

in denen man $\alpha=a\pm i$ setzt, wird man die Vermuthung schöpfen, es genüge $\frac{1}{(a\pm i)^n}$ der ersten Gleichung (16), so dass also etwa

$$y=\frac{A}{(a+i)^n}+\frac{B}{(a-i)^n}\text{ oder auch }y=\frac{C}{(1+ai)^n}+\frac{C'}{(1-ai)^n}$$

wäre, wo C und C' von a unabhängig sind. (Man vergl. meine Differential- und Integralrechnung §. 92. 4.) Wirklich genügt diese Form, und dann ist

$$z=-\frac{Ci}{(1+ai)^n}+\frac{C'i}{(1-ai)^n}.$$

Um C und C' zu bestimmen, beachte man, dass für $a=0$:

$$y=0,\quad z=\Gamma(n),\text{ also }0=C+C',\quad \Gamma(n)=-Ci+C'i;$$

$$C=-\frac{\Gamma(n)}{2i},\quad C'=\frac{\Gamma(n)}{2i};$$

also endlich:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\cos ax\partial x=\frac{\Gamma(n)}{2}\left[\frac{1}{(1+ai)^n}+\frac{1}{(1-ai)^n}\right]=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\varphi,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\sin ax\partial x=\frac{\Gamma(n)}{2i}\left[\frac{1}{(1-ai)^n}-\frac{1}{(1+ai)^n}\right]=\frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\varphi,$$

wenn

$$r=\sqrt{1+a^2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{r},\quad \sin\varphi=\frac{a}{r}.$$

Dabei muss übrigens $n>0$ sein, da auch ohnehin sonst $\Gamma(n)$ nicht endlich wäre. Dass man daraus sofort

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-cx}\cos ax\partial x,\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-cx}\sin ax\partial x$$

findet, ist bekannt.

XXIX.

Das mechanische Aequivalent der Wärme und seine Bedeutung in den Naturwissenschaften. Ein Vortrag gehalten bei der feierlichen Sitzung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften am 30. Mai 1856

vom

Präsidenten der Akademie
Herrn Dr. *Andreas* Freih. *v. Baumgartner.*

(Diese treffliche Rede ist entlehnt aus dem Almanach der kaiserl. Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1857.)

Es gibt in den Naturwissenschaften wie im Leben der Staaten und Völker Begebenheiten, die in ihrer Geschichte Epoche machen und besondere Abschnitte derselben begründen. Einige machen sich gleich bei ihrem ersten Erscheinen geltend, ähnlich der göttlichen Minerva, die mit Schild und Speer aus dem Haupte ihres Vaters gesprungen; andere treten wie gewöhnliche Menschenkinder in die Welt, welche die allgemeine Aufmerksamkeit erst dadurch auf sich ziehen, dass sie frühzeitig grosse Talente entwickeln und durch überwiegende geistige Kräfte in das Getriebe der Welt mächtig eingreifen. Von der letzteren Art ist die Entdeckung des mechanischen Aequivalentes der Wärme. Dieses ist zwar schon vor mehr als 30 Jahren nicht ganz unbekannt gewesen, wurde sogar einem im Jahre 1824 erschienenen, von Carnot verfassten Werke zum Grunde gelegt und als Stütze mehrerer wichtigen Folgerungen betrachtet; jedoch eine beschränkte Ansicht über die Natur der Wärme hemmte seinen weiteren Einfluss auf die Wissenschaft. Erst im Jahre 1842 hat Dr. Meyer in Heilbronn das Gesetz, das es involvirt, klar und bestimmt ausgesprochen und der Sache einen passenden Namen gegeben. Seit dieser Zeit wurde es besonders von deutschen und englischen Gelehrten sorgsam gepflegt und insbesondere von ersteren wis-

senschaftlich und gründlich behandelt, von letzteren aber experimental nachgewiesen und seine ungeheure Tragweite erörtert.

Ich will es nun versuchen, diesen Gegenstand zur Feier des heutigen Tages in fasslicher Weise und mit seinen vielfachen Beziehungen, so weit als es die Kürze der mir zugemessenen Zeit gestattet, darzustellen. Er gehört der strengen Wissenschaft an und lässt sich nur mit Widerstreben der mathematischen Form entkleiden; zugleich steht er mit anderen, nicht im gemeinen Leben wurzelnden Beziehungen in Verbindung, und ich theile bei meinem Unternehmen, ihn populär zu machen, das Loos eines Gärtners, der es unternimmt, einen schon ziemlich erwachsenen Baum zu verpflanzen und genöthigt ist, ihn sammt dem Wurzelballen auszuheben, somit nicht vermeiden kann, auch anderes mit dem Ballen verwachsenes Gesträuch zu übertragen. Dabei können einige Trockenheiten nicht vermieden werden und ich muss schon im Vorhinein diesfalls Ihre gütige Nachsicht in Anspruch nehmen. Ich will mich, um dafür einigermassen zu entschädigen, besonders der Deutlichkeit und Klarheit befleissen und verzichte gerne auf jede Eleganz des Vortrages, überzeugt von der Richtigkeit eines Ausspruches des berühmten Chemikers Humphry Davy's, dass bei derlei Erörterungen Metaphern den Kornblumen gleichen, die wohl recht schön für das Auge sind, aber oft dem Getreide schaden.

Die Naturkräfte äussern ihre Thätigkeit bekanntlich auf zweifache Weise und zwar entweder dadurch, dass sie Bewegung hervorbringen, oder dadurch, dass sie einer andern Kraft das Gleichgewicht halten. Im zweiten Falle wird ihr Streben, Bewegung hervorzubringen, durch eine andere Kraft aufgehoben. Im letzteren Zustande nennt man eine Kraft Spannkraft, im ersteren Bewegungskraft oder auch Arbeitskraft.

Die wichtigste Arbeitskraft ist die Schwerkraft, in so ferne sie den Fall der Körper zur Folge hat. Da uns das Wesen der Naturkräfte gänzlich unbekannt ist, so müssen wir uns bei ihrer Vergleichung damit begnügen, ihre Grösse nach jenen Wirkungen zu schätzen, von denen wir anzunehmen berechtigt sind, dass sie den Kräften proportional seien. Da wir nun unter allen die Wirkungen der Schwere am genauesten kennen, so vergleichen wir diese mit den Wirkungen anderer Kräfte und schliessen daraus auf das Grössenverhältniss der Kräfte selbst. In Bezug auf Arbeitskräfte wissen wir, dass ihre Wirkung, die Arbeit, so mannigfältig sie sein mag, immer als äquivalent mit dem Heben einer Last angesehen und sonach ausgedrückt werden kann durch ein Gewicht, welches auf eine bestimmte Höhe, oder durch eine Höhe, auf

welche ein bestimmtes Gewicht gehoben wird. Es findet darum die Arbeitsgrösse und dadurch mittelbar auch die Arbeitskraft in dem Producte aus dem gehobenen Gewichte in die Hubhöhe einen präcisen numerischen Ausdruck. Wird das Gewicht in Pfunden, die Hubhöhe in Fussmass ausgedrückt, so stellt das Product beider Zahlen Fusspfunde vor. Wenn man daher sagt: Die Arbeitsgrösse eines Menschen sei 80 Fusspfunde, so heisst dieses: derselbe hebe 80 Pfund einen Fuss hoch. Es wäre dasselbe, wenn gesagt würde, es werden 40 Pfund 2 Fuss hoch, oder 20 Pfund 4 Fuss hoch etc. gehoben, weil das Product jeder dieser zwei Zahlen dasselbe, nämlich $= 80$ ist. Die Arbeit, durch welche 1 Pfund 1 Fuss hoch gehoben wird, ist demnach die Einheit der Arbeit oder das Mass, mit dem man Arbeiten misst, gleichwie man mit der Klafter Längen, mit dem Pfunde Gewichte und mit der Secunde Zeiten zu messen pflegt. Die Arbeitskraft, welche die Arbeit $= 1$ verrichtet, ist darum zugleich die Einheit der Arbeitskräfte, und die im vorigen Beispiele angeführte Zahl von 80 Fusspfunden bedeutet sonach 80 Arbeitseinheiten.

Wenn eine Arbeitskraft wirksam wird, d. h. wenn sie wirklich Arbeit verrichtet und ein Gewicht hebt, so wird ein dieser Arbeit entsprechender Theil der Kraft verbraucht, er findet sich aber im gehobenen Gewichte wieder, denn dieses hat ja dann die Kraft, durch seinen Fall dieselbe Arbeit, wenn auch in entgegengesetzter Richtung, zu verrichten. Der Kraftverbrauch bei der Arbeit besteht daher nicht in einer Vernichtung der Arbeitskraft, sondern in deren Uebertragung auf die bewegte Masse.

So lange demnach die Arbeitskräfte diese Wirkungsform beibehalten, d. h. so lange sie Arbeitskräfte bleiben, wird auch ihre arithmetische Summe unverändert erhalten.

Allein die Arbeitskräfte bleiben nicht immer in dieser Wirkungsform, sondern gehen in andere Formen über. Es ist nämlich bekannt, dass mechanische Kräfte häufig Wärme hervorbringen. Radschuhe, Bohrer, Sägen erhitzen sich beim Gebrauche, ein Stück Eisen kann durch blosses Hämmern auf einem Amboss glühend gemacht werden. Man weiss, dass sich die Wilden in den amerikanischen Wäldern durch Reiben zweier Stücke Holz auf einander Feuer machen, ja es ist nicht lange her, so haben auch die europäischen Zahmen das sogenannte Feuerschlagen als eines der bequemsten Mittel angesehen, Schwamm oder Zunder anzuzünden. Die alten Gewehrschlösser mit Stein und Hahn waren nur bequemere Vorrichtungen, um diesen Act zu vollziehen. Man hat sogar in wasserreichen und holzarmen Gegenden die Bewegung als Mittel angewendet, grössere Wärmemenge hervorzubringen,

und noch in jüngster Zeit haben Beaumont und Meyer in Frankreich einen Apparat construirt, mittelst welchem durch schnelles Drehen eines hölzernen Kegels in einer von Wasser umgebenen passenden Metallhülse Wasserdampf von 2½ Atmosphären Druck mit der Kraft eines Pferdes erzeugt wird.

Bei allen diesen Vorgängen wird nun Arbeit verbraucht und dafür Wärme erzeugt. Durch Verbrauch von Wärme kann aber umgekehrt wieder Arbeit hervorgebracht werden. Dieses geschieht unter anderm bei der Dampfmaschine. Da ist es nämlich eigentlich die Wärme der glühenden Kohlen unter dem Kessel, die den Kolben der Maschine in Bewegung setzt, das Wasser aber und der Dampf sind nur die materiellen Mittel, durch welche die Wärme zum Kolben gelangt.

Bei dieser Umwandlung der Arbeit in Wärme, und umgekehrt der Wärme in Arbeit, dringt sich von selbst die Frage auf, ob dem Verbrauche eines gegebenen Arbeitsquantums die Erzeugung einer numerisch bestimmten Wärmemenge und umgekehrt entspreche, und in welchem Verhältnisse diese beiden Mengen zu einander stehen. Um diese Frage beantworten zu können, muss man Wärmemengen wie andere Grössen zu messen im Stande sein. Um dieses möglich zu machen, ist man übereingekommen, die Wärmemengen durch die Anzahl Pfunde Wasser von der Temperatur des Eispunktes (0° C.) auszudrücken, welche durch sie um 1° C. erwärmt werden. Die Einheit der Wärmemengen, der Wärmemassstab, ist sonach jenes Wärmequantum, welches 1 Pfd. Wasser von 0° auf 1° C. zu bringen vermag. Dieses vorausgesetzt, lautet die Antwort auf die vorher erwähnte Frage folgendermassen: Durch Verbrauch eines bestimmten Wärmequantums wird auch eine bestimmte Arbeitsgrösse erzeugt und es entsprechen nach den Ergebnissen zahlreicher, mit allen Vorsichten angestellter Versuche, bei denen theils Arbeit in Wärme, theils Wärme in Arbeit umgesetzt wurde und wo man es mit Wärme von dem mannigfaltigsten Ursprunge zu thun hatte, dem Verbrauche *einer* Wärmeeinheit 1367 Arbeitseinheiten und umgekehrt. Hiebei sind österreichische Masse und Gewichte zu Grunde gelegt.

In die Sprache des gemeinen Lebens übersetzt, heisst dieses: Die Wärme, welche 1 Pfund Wasser von 0° um 1° erwärmt, übt dieselbe mechanische Kraft aus, wie ein Gewicht von 1367 Pfund, das 1 Fuss hoch herabfällt.

Die Zahl 1367 drückt nun das mechanische Aequivalent der Wärme aus; man könnte ebenso die Zahl $\frac{1}{1367}$ das thermische

Aequivalent der Arbeit nennen. Hätte man den Massstab für die Arbeit 1367 Mal grösser angenommen, so würde einer Wärmeeinheit auch eine Arbeitseinheit äquivalent sein.

Die Umsetzung der Wärme in Arbeit und umgekehrt erfolgt nicht nach Laune oder Zufall, sondern nach bestimmten Regeln, welche die Bedingungen ausdrücken, unter welchen der Wechsel Statt hat. Es kann nämlich Wärme nur in so ferne in Arbeit umgesetzt werden, als sie einem Körper zugeführt wird. Dieses geschieht aber bei geleiteter Wärme nur in der Richtung vom wärmeren Körper zum kälteren und nur in so ferne als Temperatur-Differenzen bestehen. Die zugeführte Wärme zerfällt aber dabei in zwei Theile. Einer davon dient zur Erhöhung der Temperatur bei constantem Volumen, der andere aber verrichtet Arbeit, indem er z. B. eine Last vor sich hinschiebt. Wo es eine solche nicht gibt, da findet auch kein Kräftewechsel Statt. Hieraus erklärt es sich, warum eine Luftmasse erkaltet, wenn sie sich ausdehnt und dabei einen Druck überwindet, während ihre Temperatur unverändert bleibt, wenn die Ausdehnung ohne Ueberwindung eines Widerstandes erfolgt, wie dieses der Fall ist, wenn sie in einen leeren Raum überströmt.

Dieser Kräftewechsel wird viel vorstelliger, wenn man von dem nun gewonnenen Standpunkte aus in eine nähere Untersuchung über das Wesen der Wärme eingeht. Das eben erwähnte Gesetz des Kraftwechsels ist nämlich unvereinbarlich mit der Annahme eines Wärmestoffes als einer Substanz, die durch keinen Act erzeugt, nicht in eine andere umgewandelt werden kann und die dem Quantum nach unveränderlich sein muss; dasselbe deutet vielmehr darauf hin, dass die geleitete Wärme, verschieden von der gleich dem Lichte auf Aetherschwingungen beruhenden strahlenden Wärme, in einer vibrirenden Bewegung der kleinsten Körpertheile bestehe, wie dieses schon längst aus der Unerschöpflichkeit der Körperwärme, die sich bei Reibungsversuchen kundgegeben hat, und insbesondere aus dem Umstande gefolgert wurde, dass zwei Eisstücke im luftleeren Raume durch blosses Reiben zum Schmelzen gebracht werden können. Dieser Ansicht nach ist der Unterschied zwischen Arbeit und Wärme kein anderer, als zwischen Bewegung einer Masse und Bewegung von Moleculen, und die Umsetzung der Arbeit in Wärme besteht blos in einer Mittheilung der Bewegung nach den Gesetzen der Mechanik, wobei Umwandlungen der Massenbewegung in Molecularbewegung und umgekehrt eintreten.

Wir sehen ähnliche Umwandlungen der Bewegungen vor unseren Augen vor sich gehen. Die Töne einer Violine oder eines Claviers

sind bekanntlich das Resultat der schwingenden Bewegung von Darm- oder Metallsaiten; wir erzeugen aber erstere durch Streichen mit einem Bogen, letztere durch Schlagen mit einem Hammer, mithin durch Massenbewegung. Wenn die oscillirende Bewegung der Luft beim Knall einer Kanone unsere Fenstertafeln zerschlägt, so hat sie Massenbewegung hervorgebracht.

Arbeitskräfte und Wärme sind bekanntlich nicht die einzigen Kräfte, welche in der Natur eine grosse Rolle spielen; Licht, Elektricität, Magnetismus und chemische Kräfte stehen ihnen an Wichtigkeit gar nicht nach. Jedes dieser Agentien bringt eigenthümliche, sein Wesen charakterisirende Wirkungen hervor, und eben diese sind es, die den Naturforscher nöthigen, die Existenz so vieler Agentien zu supponiren; allein ausser diesen Wirkungen treten bei jeder der genannten Naturthätigkeiten auch noch andere ein, die eigentlich nicht zum Wesen dieses, sondern eines andern Agens gehören, wie z. B. Wärme und Licht bei chemischen Processen, bei elektrischen und magnetischen Vorgängen etc., elektrische Phänomene bei Wärme und Licht, chemische Zersetzungen und Zusammensetzungen bei Licht und Elektricität etc. Nach dem jetzigen Standpunkte der Naturwissenschaft dürfen wir derlei scheinbar fremdartige oder secundäre Wirkungen nicht mehr als solche ansehen, sondern müssen sie als Resultat einer nach einem bestimmten Aequivalenten-Verhältniss vor sich gehenden Umsetzung einer Naturkraft in eine andere betrachten. Wir wollen diesem Gegenstande eine kurze Betrachtung widmen:

Licht und strahlende Wärme sind von gleicher Natur, beiden liegen Aetherschwingungen zum Grunde. Lichtschwingungen bringen Wärme hervor, insoferne sie Kraft an Körpertheile übertragen. Dieses können auch solche, welche die Augenflüssigkeiten nicht zu durchdringen vermögen und darum nicht als Licht empfunden werden. Statische Elektricität kennen wir nur als Arbeitskraft, denn sie gibt sich nur durch Bewegung kund, die sie an ihren Trägern durch Anziehung und Abstossung hervorbringt. Strömende Elektricität besitzt arbeitende Kraft, erzeugt Wärme und chemische Zersetzung. Vermöge ihrer Arbeitskraft wird sie im Stromleiter fortgeführt, jedoch durch den Widerstand verbraucht, den sie in diesem Leiter findet, und dadurch in Wärme umgesetzt. Im Stromleiter tritt in dem Maasse Wärme auf, als die Elektricität daselbst Widerstand erfährt; denn es ist die dabei erzeugte Wärmemenge bei übrigens gleichen Verhältnissen dem Leitungswiderstande proportionirt. Was sie zur chemischen Zersetzung und zur Bewegung einer Maschine an Arbeitskraft benöthigt, wird aus dem Wärmevorrathe nach dem Aequivalente der Wärme entnommen.

Man denke sich drei Elektromotoren von gleicher Stärke, z. B. drei galvanische Batterien; die eine sei durch einen Leitungsdrath geschlossen, in die Kette der zweiten sei eine elektromagnetische Maschine, z. B. ein Barlow'sches Rad eingeschaltet und in die Kette der dritten ein Wasserzersetzungsapparat. Durch Aenderung der Länge des Schliessungsdrathes des ersten Elektromotors und durch Modification der Geschwindigkeit des Barlow'schen Rades mittelst eines Magnetes kann man es leicht dahin bringen, dass der Strom in allen dreien von derselben Stärke ist. Da wird nun im Schliessungsdrathe der ersteren, wo der Strom keine chemische Wirkung hervorzubringen und keine Maschine zu bewegen hat, die grösste Wärmemenge erzeugt; im zweiten, wo chemische Arbeit zu verrichten ist, ist die gewonnene Wärmemenge gerade um so viel geringer, als man wieder erhält, wenn man die durch Zersetzung des Wassers erhaltenen Gase verbrennt und sie dadurch wieder zu Wasser vereinigt; eine ähnliche Verminderung der Wärme wird man am Schliessungsdrathe des dritten Elektromotors bemerken, sie beträgt aber gerade so viel, als nach dem mechanischen Aequivalente der Wärme an bewegender Kraft für die eingeschaltete Maschine verwendet werden muss. Hier findet also Umsetzung der Elektricität in Wärme, dieser in Arbeitskraft oder in elektrolytische Kraft Statt und allenthalben herrscht das Gesetz der Aequivalente. Die strömende Elektricität in einem galvanischen Elektromotor scheint selbst auf Kosten der Wärme hervorgebracht zu sein, die bei der Oxydation des Zinkes erzeugt wird; denn die Stromstärke ist bei sonst gleichen Umständen dem Gewichte des oxydirten Zinkes proportionirt und es tritt an der Stelle, wo die Oxydation vor sich geht, nicht die Wärme auf, welche sonst diesen chemischen Process begleitet. Ob Aehnliches bei der Elektricität andern Ursprungs vor sich gehe, ist weder erwiesen noch widerlegt.

Diese Betrachtungen führen den Naturforscher auf einen Standpunkt, von dem aus ihm die Elektricität wie ein ganz anderes Wesen erscheinen muss, als dieses bisher der Fall war. Sie ist so wenig feuriger Natur als der Hammer, durch dessen Schläge ein Stück Eisen glühend wird, wiewohl sie unseren Sinnen fast immer nur in dieser Begleitung erscheint; der Blitz fährt nur darum als leuchtender Strahl vom Himmel, weil ein grosser Theil seiner Arbeitskraft durch den Leitungswiderstand der Luft in Wärme umgesetzt wird; er zündet daher nur solche Gegenstände an, die sich seinem schnellen Fortschreiten entgegensetzen, und lässt jene unbeschädigt, die ihn nicht aufzuhalten suchen. Eben darin besteht ja die Wirkung der metallenen Blitzableiter. Auch über den

innern Grund der Elektricität geben uns die vorher erörterten Gesetze wenigstens negative Aufschlüsse. Man kann nämlich nicht mehr, wie bisher, eine specifische elektrische Materie annehmen; denn eine solche ist, da ihr Quantum keiner Veränderung unterliegen kann, mit dem Princip der Umwandlung der Elektricität in Wärme und Arbeitskraft unverträglich. Mit der elektrischen Materie fällt zugleich die magnetische, da die Ansicht, die magnetischen Erscheinungen rühren von elektrischen Strömen her, mit Recht immer mehr Boden gewinnt. Somit ist das Reich der Imponderabilien in der Naturlehre seinem Ende nahe und die Zeit vorüber, wo unwägbare Stoffe als eben so viele wissenschaftliche Kobolde in jedem Zweige der Naturwissenschaft ihren unheimlichen Spuk getrieben haben.

Auch die chemischen Kräfte folgen den Gesetzen der Umsetzung der Kräfte nach bestimmten Aequivalentenverhältnissen. Es ist nämlich erwiesen, dass bei jeder chemischen Vereinigung zweier Stoffe zu einem stabilen Producte Wärme entwickelt wird und zwar in derselben Menge, die Verbindung mag schnell oder langsam, auf einmal oder successive aus ihren Bestandtheilen gebildet werden. Bei einigen solchen Bildungen, z. B. bei der Vereinigung von Sauerstoff und Wasserstoff zu Wasser, ist zugleich, wie schon erwähnt worden, experimentell nachgewiesen, dass das bei der Vereinigung der Stoffe gewonnene Wärmequantum genau dem Aequivalente der bei der chemischen Zerlegung dieser Verbindung verbrauchten Arbeitskraft entspreche. Man kann daher annehmen, dass die durch eine chemische Wirkung erzeugte Wärmemenge ein Mass für die bei dem Processe in Wirksamkeit getretene chemische Kraft ist. Unter solchen Umständen kann die Behauptung, dass durch chemische Kräfte Arbeit erzeugt werde, nicht befremden. Doch kennen wir keinen bestimmt nachgewiesenen Fall, durch welchen unwidersprechlich dargethan wäre, dass aus chemischen Kräften unmittelbar Arbeitskraft hervorgehe. In allen bisher zur genügenden Klarheit gediehenen Vorkommnissen erfolgt die Umsetzung der chemischen Kräfte in Arbeitskraft entweder mittelst der Wärme oder der Elektricität. Ein Beispiel des ersteren Vorganges liefern die Dampf- und Luftmaschinen, einen Beleg für letzteren die elektro-magnetischen Bewegungsapparate.

Der Vorgang bei der Dampfmaschine und diesem analog auch bei der Luftmaschine ist schon früher berührt worden. Jeder Gran Kohle, der unter dem Kessel der Maschine vollkommen verbrennt, liefert in Folge des chemischen Processes der Verbrennung 0·908 Wärmeeinheiten oder 1241 Fusspfund Arbeit, wenn

alle Wärme zur Erzeugung von Dampf oder zur Erhöhung der Spannkraft der Luft verwendet und vollständig in Arbeit umgesetzt wird. In dem Masse als diese Voraussetzungen nicht eintreffen, bleibt auch der Effect der Maschine hinter dieser Grösse zurück. Im Allgemeinen geschieht dieses in desto höherem Masse, je weniger die Temperatur des Condensators von der des Kessels abweicht. Der wirkliche Effect beträgt oft kaum 20 pCt. des nach der früheren Voraussetzung berechneten.

Eine andere Vorrichtung, welche auf der aus chemischen Kräften entspringenden, durch Wärme vermittelten Arbeitskraft beruht, ist das Schiessgewehr. Bei jedem Schusse soll die Wärme, welche aus der Vereinigung der Kohle mit Sauerstoff zu Kohlensäure und des Kali aus dem Salpeter mit Schwefel zu Schwefelkalium entsteht, vermindert um die Vereinigungswärme des Stickstoffes und des Kaliums mit Sauerstoff, vollständig in Arbeitskraft umgesetzt werden. Ein Gran Schiesspulver sollte sonach beim Abbrennen 0·291 Wärmeeinheiten oder 398 Fusspfund Arbeit liefern. Allein nicht alle Wärme wird in Arbeitskraft umgesetzt, wie schon die Erhitzung des Gewehrlaufes ersehen lässt, und nicht die ganze Arbeitskraft wird zum Forttreiben der Kugel verwendet, indem ein Theil davon den Knall erzeugt, der den Schuss begleitet.

Wird eine elektro-magnetische Maschine, z. B. ein Barlowsches Rad, in Bewegung gesetzt, so geht in der Regel die bewegende Kraft ursprünglich von der Oxydation des Zinkes einer galvanischen Batterie aus, und zwar in der Art, dass zuerst die Verbindungswärme des Sauerstoffes mit Zink als elektrischer Strom auftritt, der in Folge des im Stromleiter herrschenden Leitungswiderstandes wieder in Wärme und dann in Arbeitskraft umgesetzt wird. Je mehr Kraft die Maschine zu ihrer Bewegung in Anspruch nimmt, desto weniger Wärme bleibt übrig. Es ist schon früher gezeigt worden, dass dieser Abfall an Wärme gerade so gross sei, als dem mechanischen Aequivalente der verwendeten Arbeit gemäss ist. Die Wärmemenge, welche aus der Oxydation von einem Gran Zink einer Daniell'schen Batterie hervorgeht und vom elektrischen Strom in den Leitungsdrath überführt wird, beträgt, wenn keine mechanische Arbeit zu verrichten ist, 0·157 Wärmeeinheiten, und diese entspricht, ganz in Arbeit umgesetzt, einer Leistung von 214½ Fusspfund. Da auch hier nur ein Theil der Wärme zu Arbeitskraft wird, so muss in demselben Verhältniss das Ergebniss für die Maschine geringer ausfallen.

Wir wissen wohl, dass jene bewunderungswürdigen Maschinen, die wir lebende Körper nennen, aus chemischen Kräften ihre

Arbeitskraft schöpfen. Ob aber Wärme oder Elektricität die Vermittler seien, oder ob die chemischen Processe unmittelbar aus sich Arbeitskraft hervorbringen, hat bisher noch nicht in's Klare gebracht werden können. Vor der Hand wird die Vermittlung eines elektrischen Stroms für das Wahrscheinlichere gehalten. Dass bei dieser Unentschiedenheit der Sache Berechnungen über den mechanischen Effect dieser organischen Triebwerke nur auf sehr unsicherer Grundlage beruhen, ist für sich klar. Dessungeachtet aber unterliegt es keinem Zweifel, dass der thierische Organismus, abgesehen von den zahlreichen Zwecken eigener Art, die zu realisiren er bestimmt ist, schon in blosser Rücksicht auf die ökonomische Verwendung von Arbeitskraft eine Maschine von viel grösserer Vollkommenheit sei, als bis jetzt die menschliche Erfindungskraft zu liefern im Stande war.

Den chemischen Kräften ist sowohl in der Weltökonomie als im Haushalte der Menschen eine sehr bedeutende Rolle zugewiesen. Sie sind wirksam beim Keimen und Wachsen der Pflanzen, bei der Ausbildung und beim Reifen der Früchte, die Leiber der Thiere werden durch solche Kräfte fortgebildet, ihre Kraft wächst und schwindet mit diesen. Die Macht eines Staates beruht grossen Theils auf der Menge und Stärke der chemischen Kräfte, über die er zu disponiren hat, und die materielle Macht im Kriege ist die, welche die chemische Kraft des Schiesspulvers und der Nahrungsmittel für Mann und Pferd liefert.

Die Gesetze, zu deren Kenntniss man zumeist durch den Kräftenwechsel nach bestimmten Aequivalenten gelangt ist, lassen uns die Natur als einen wohlgeordneten Haushalt mit einer gegebenen Summe von unzerstörbaren Kräften erkennen, von Kräften, die in verschiedenen Formen ihre Wirksamkeit äussern und von denen eine ihre Macht von der andern borgt. Wenn beim Wechsel der Kräfte von einer etwas verloren zu gehen scheint, so können wir das Aequivalent des Abgängigen sicher in einer andern Form zu finden hoffen. Stossen zwei Körper zusammen, und scheint nach dem Stosse eine geringere Summe von Arbeitskräften vorhanden zu sein, als vor demselben; so ist ein Theil der Bewegung dazu verwendet worden, den Stoss hörbar zu machen, die Körpertheile einander bleibend näher zu bringen oder Wärme zu erzeugen. Wenn die Zugthiere an unseren Fuhrwerken, die Locomotive an den Eisenbahnzügen ungeachtet ihrer steten Wirksamkeit doch nicht eine stets wachsende Geschwindigkeit der Last hervorbringen, so findet sich das, was an fortschreitender Bewegung verloren gegangen ist, in der oft nur zitternden Bewegung der Equipage, in dem Geräusche, das der Zug verursacht,

und als Wärme an den erhitzten Axen und Zapfenlagern wieder. Die Reibung vermindert zwar die Bewegung der Massen, überträgt sie aber an ihre Molecule. Davon machen selbst tropfbare Körper keine Ausnahme, und jedes Wasserrad, jeder auf steinigem Boden dahin rieselnde Bach ist in so ferne der Sitz von Umsetzung, wenn auch nur eines kleinen Theils der bewegenden Kraft in Wärme. Der Widerstand, den die Bewegung des Blutes im thierischen Körper, besonders beim Uebergange in die häufigen Anastomosen und endlich in die höchst fein verzweigten Wundernetze, erfahren muss, beeinträchtigt wohl die Circulation, kann aber nicht ermangeln, etwas zur Erhöhung der Temperatur des Körpers beizutragen.

So lange eine Bewegung im luftleeren Raume vor sich geht, bleibt die ganze Arbeitskraft auf die bewegte Masse übertragen, der Eintritt in ein widerstehendes Mittel hat aber alsobald einen scheinbaren Verlust an Arbeitskraft zur Folge, die jedoch in der frei gewordenen Wärme den entsprechenden Ersatz findet. Ein grosser Widerstand, wie er bei sehr schnellen Bewegungen eintritt, kann selbst eine Erhitzung der bewegten Masse bis zum Glühendwerden zur Folge haben. Das Erglühen der aus dem Weltraum in die Erdatmosphäre eintretenden Meteormassen erklärt sich hieraus genügend. Der Rechnung gemäss reicht schon eine Geschwindigkeit von 1000 F. in der Secunde hin, um eine Temperaturerhöhung bis zu 1000° C., also bis zum starken Glühen, hervorzubringen. Massen, die wie die Sternschnuppen gar eine Geschwindigkeit von 18—36000 Kl. besitzen, können leicht bis zum Schmelzen erhitzt und in unsichtbare Partikelchen zerstiebt werden. Daher mag es auch kommen, dass Meteorsteinfälle oft von trockenem Meteorstaub oder gar von einem ausgedehnten Feuerschein wie von einer glühenden Wolke begleitet sind. Die grosse Häufigkeit von Sternschnuppenfällen, deren zu gewissen Zeiten nach J. Schmidt 13—15 in einer Stunde innerhalb des Gesichtskreises einer einzigen Person vorkommen, würde sogar die Behauptung nicht als widersinnig erscheinen lassen, dass die dabei entwickelte Wärme den thermischen Zustand der Atmosphäre merklich afficiren kann.

Nach diesen Betrachtungen zeigen sich uns die sogenannten Hindernisse der Bewegung, Reibung und Widerstand des Mittels, von einer andern Seite, als man sie anzusehen gewohnt ist. Sie vernichten keine Kraft, sondern setzen sie nur in einander um. Besonders werden durch ihren Einfluss Bewegungskräfte in Wärme umgewandelt. Aber gerade diese Wirkung ist für das Leben in der Natur nicht ohne grosse Bedeutung. Die Wärme kann näm-

lich nie wieder vollständig zur Arbeitskraft werden, wie dieses schon früher gezeigt worden ist. Dazu kommt noch, dass auch die chemischen Kräfte in dem Maasse, als sie Verbindungen bewerkstelligen, die Form der Wärme annehmen, die wieder nur zum Theile in Arbeitskraft umgewandelt werden kann, und somit müsste der Vorrath an Arbeitskraft immer geringer werden und der Quell des Lebens müsste nach und nach ganz versiegen, wenn nicht von anderer Seite für Abhilfe gesorgt wäre. Diese schafft die Natur selbst hauptsächlich dadurch, erstens dass uns von der Sonne fortwährend Strahlen zugesendet werden, welche bewegende Kraft und die Bedingungen des Lebens mit sich führen, und zweitens durch die dem Erdkörper und den Planeten vom Anbeginn her eingepflanzten Bewegungen. Versuche, welche schon im Jahre 1838 von Pouillet in Paris angestellt wurden, lehren, dass in der Voraussetzung einer gleichförmigen Vertheilung des Einflusses der Sonne auf die ganze Erdoberfläche in einer Minute einer Fläche von 1 Quadratcentimeter 0·4408 Wärmeeinheiten zuströmen, wonach auf 1 Wiener Quadratzoll in 1 Minute 5⅓ Wärmeeinheiten oder an Arbeitskraft 7518 Fusspfund entfallen. In einem Jahre belauft sich dieser Zufluss auf 2·871804 Wärmeeinheiten oder 3926 Millionen Einheiten von Arbeitskräften. Er wäre im Stande, eine die ganze Erde umhüllende Eisrinde von 97½ Fuss Dicke zu schmelzen. Man könnte mit Sonnenstrahlen an einem heiteren Sommertage einen Dampfkessel heizen und, wenn die der erwärmenden Einwirkung ausgesetzte Kesselfläche gross genug wäre, die Kraft mehrerer Pferdekräfte erzielen. Thomson berechnet, dass für eine Pferdekraft eine solche Fläche von 1800 Quadratfuss erforderlich wäre.

Die Sonne bewirkt nicht blos eine Anhäufung der Wärme auf der Erde, sondern vermittelt selbst die Umsetzung derselben in Arbeitskraft. Indem sie die Federkraft der Luft stärkt, erzeugt sie die Luftbewegungen, welche unsere Windmühlen treiben, die Segel der Schiffe schwellen und schwimmende Lasten in ferne Länder tragen; indem sie den Fluthen des Meeres Federkraft verleiht, bewirkt sie ihr Emporsteigen in die Regionen der Wolken, wo sie Luftströme fassen und in entfernte Gegenden der Erde treiben, damit sie daselbst als Regen herabfallen, die Quellen und Flüsse nähren und an diesen ein reiches Magazin von mechanischer Kraft eröffnen, aus welchen der Mensch entnimmt, was er zur Bewegung von Wasserrädern und zum Fortschaffen von Lasten aus höheren Gegenden in tiefer gelegene benöthigt.

Endlich führt uns die Sonne einen reichen Segen chemischer Kräfte zu, denen wir das Entstehen der für unsere Zwecke wich-

tigsten Producte verdanken. Durch den Einfluss ihrer Strahlen auf die grünen Pflanzentheile wird die Kohlensäure zersetzt, der Sauerstoff als Gas ausgeschieden und der Kohlenstoff angesammelt. Dieser Stoff ist nun selbst wieder die Quelle von Licht und Wärme, wie die Sonne, und zugleich der mächtigste Motor für menschliche Zwecke. Nach Liebig wachsen in einer der fruchtbareren Gegenden Deutschlands auf einer Bodenfläche von 2500 Quadratmeter oder nicht ganz einem halben österr. Joch in einem Jahr, wenn es Waldboden ist 2650 Pfund lufttrockenes Brennholz, wenn es Wiesengrund ist 2500 Ct. Heu und wenn es Ackerland ist 800 Pf. Roggen und 1780 Pf. Stroh. Das besagte Quantum Brennstoff enthält 1007 Pf., das Heu 1018 Pf., der Roggen und das Stroh 1044 Pf. Kohlenstoff, demnach im Durchschnitte aus allen drei Erzeugnissen 1023 Pf. oder für 1 österr. Quadratklafter in runder Zahl $1\frac{1}{2}$ Pf. Da 1 Pf. Kohle beim Verbrennen 5230 Wärmeeinheiten liefert, so entfallen für die Kraft erzeugende Wirkung des Sonnenlichtes für 1 österr. Quadratklafter des mit Vegetation bedeckten Bodens in einem Jahre 7845 Wärmeeinheiten oder eine Arbeitskraft von $10\frac{3}{4}$ Millionen Fusspfund.

Alle diese mächtigen Wirkungen sind aber nur ein höchst kleiner Theil des gesammten Kraftausflusses der Sonne, denn diese bestrahlt einen kugelförmigen Raum, der weit über die Erde hinausreicht, und in welchem der Erdkörper nur als kleines Sternchen erscheint. Die erwärmende Kraft der Sonne, die blos von einem Quadratzoll ihrer Oberfläche in 1 Minute ausgeht, beläuft sich nach Pouillet auf 1·052257 Wärmeeinheiten, ist also nur im Verhältniss von 10:27 kleiner als die Erwärmung, die einem gleichen Stück der Erdoberfläche in einem ganzen Jahre von der Sonne zu Theil wird.

Nach diesen Ergebnissen ist die Sonne nicht mehr blos die Herrin des Tages, ihr Strahl nicht blos der Herold von Millionen Sternen und ihrer tausendjährigen Geschichte; sie hat ihre hohe Bestimmung nicht schon erreicht, indem sie dem Krystall seinen Glanz, dem Diamant sein Feuer verleiht, das Grün der Blätter schafft und den bunten Schmelz der Blumen. Nebst Licht und Wärme auch Kraft auszuspenden, ist ihre grosse Aufgabe. Jede Linie, die wir von der Erde nach irgend einem Punkte der Sonne ziehen können, bezeichnet die Strasse, auf welcher Segen zu uns kommt, der auf der Erde angelangt in Stoffen eigener Art deponirt wird, um daraus entnommen werden zu können, wenn es für die grosse Welt-Oekonomie oder für menschliche Zwecke nothwendig ist. Aber wird denn die Sonne stets mit derselben Kraft wirken können und wird sie immerfort im Stande sein, zu ersetzen,

was durch den steten Wechsel der Kräfte für die Erhaltung des Lebens verloren geht oder wird durch ihren Einfluss der Zeitpunkt nur weiter hinausgerückt, wo das grosse Uhrwerk in Stillstand geräth, weil das Gewicht, durch das es im Gange erhalten wird, abgelaufen ist? Nach unserer gegenwärtigen Einsicht dürfte wohl letzteres für das Wahrscheinlichere gelten, da alle Mittel, durch welche der Sonne für ihren steten Verlust Ersatz werden soll, selbst als der Erschöpfung unterliegend angesehen werden müssen.

Eine, jedoch verhältnissmässig nur geringe Unterstützung in dem Geschäfte, der Erde Kraft zuzuführen, findet die Sonne in dem Kraftvorrathe, welchen der Erdkörper in Folge seiner Axendrehung und der Bewegung des Mondes um ihn besitzt. Diese Kraft ist reine Arbeitskraft und ihre Verrichtungen bestehen zunächst in der Unterhaltung jener Bewegung des Meeres, die unter dem Namen Ebbe und Fluth bekannt ist, aus der aber mehrfache grosse Strömungen im Weltmeere und in der Atmosphäre hervorgehen, die selbst zu menschlichen Zwecken vielfach angewendet werden. Sie erscheint klein gegen die Macht der Sonne, jedoch sehr bedeutend gegen das, was menschliche Kräfte zu leisten vermögen, klein in ersterer Beziehung, da sie nach Thomson nur ein Aequivalent bietet für eine dreistündige Bestrahlung der Erde durch die Sonne, bedeutend in der letztern, weil sie nach Bessel eine Wassermenge von 200 Kubikmeilen in $6\frac{1}{4}$ Stunden von einem Quadranten der Erde zum andern überführt, eine Masse, die einen grösseren Raum einnimmt, als 200 Millionen Bauwerke, deren jedes der grössten der egyptischen Pyramiden gleichkäme und gewiss 200 Mal grösser ist als alles, was die Kräfte der Menschen und die ihnen zu Gebote stehenden Mittel von der Sündfluth an bis jetzt beträchtlich von der Stelle gebracht haben.

Nimmt man die Kräfte, welche wir vom irdischen Standpunkte aus mit menschlichem Erkenntnissvermögen zu erforschen vermochten, als allgemein im Weltall herrschend an; so erscheint die Behauptung gerechtfertigt, dass die Auslagen zur Erhaltung der grossen Welt-Oekonomie in dem Ertrage der chemischen Kräfte der Nahrungsmittel und Brennstoffe, der Gravitation der Materie und der natürlichen Wärme die Bedeckung finden. Alle diese Kräfte sind zu einem einheitlichen Ganzen verbunden, und erscheinen nur als verschiedene Wirkungsformen einer und derselben Potenz. Was die Naturphilosophen lange gesucht aber nicht gefunden haben, hat uns das Princip des Kräftewechsels nach äquivalenten Verhältnissen aufgedeckt und uns dadurch in den Bau der Welten und in den Plan der Vorsehung einen Blick zu thun gestattet, wie man seit Newton's Zeiten keinen zu thun

vermochte. Er kann nicht verfehlen, den Naturwissenschaften in vieler Beziehung eine neue Gestalt zu geben und die k. Akademie der Wissenschaften wird nicht ermangeln, zu dieser Reform ihr Schärflein beizutragen.

XXX.

Ueber zwei besondere Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel, mit besonderer Rücksicht auf die Verdienste des italienischen Mathematikers Pietro Antonio Cataldi, wahrscheinlich des ersten Erfinders der Kettenbrüche.

Von
dem Herausgeber.

In seiner Histoire des sciences mathématiques en Italie. T. IV. p. 87. macht Herr Libri auf einen wenig bekannten italienischen Mathematiker aufmerksam, der selbst weder von Montucla, noch von Chasles in ihren bekannten Werken erwähnt wird. Dieser durch scharfsinnige Erfindungen ausgezeichnete Mann, welcher in würdigster Weise sich den vielen trefflichen italienischen Mathematikern anschliesst, welche durch die hauptsächlich von ihnen ausgegangene weitere Ausbildung der Algebra ihren Namen eine so grosse Berühmtheit auf ewige Zeiten gesichert haben, ist Pietro Antonio Cataldi, schon im Jahre 1563 Professor zu Florenz, 1572 Professor zu Perugia, und seit 1584, wahrscheinlich ohne Unterbrechung drei und vierzig Jahre

lang bis zu seinem Tode, Professor an der Universität zu Bologna. Unter verschiedenen anderen bemerkenswerthen Arbeiten dieses jedenfalls sehr ausgezeichneten Mathematikers macht Libri hauptsächlich auf zwei von demselben angegebene eigenthümliche Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel aufmerksam, über die er sich in folgender Weise ausspricht: „Son Traité de la manière expéditive de trouver la racine carrée des nombres renferme deux idées fondamentales, qui auraient dû lui assurer une place distinguée dans l'histoire des mathématiques: ce sont l'emploi des suites indéfinies pour approcher indéfiniment des racines carrées, à l'aide d'un procédé uniforme qui donne successivement tous les termes de la série, et l'emploi des fractions continues que l'on attribue communément à Brouncker. Il est vrai que les numérateurs des diverses fractions ne sont pas toujours l'unité, mais cela est sans importance: l'idée est la même, et l'on ne peut refuser à Cataldi le mérite de cette découverte, qui a joué plus tard un si grand rôle dans la théorie des nombres. Il faut même ajouter que dans l'emploi des séries indéfinies, il a eu soin de déterminer les limites des erreurs et les restes des séries. Il a reconnu, dans certains cas, qu'en prenant successivement un terme de plus dans la série, on avait toujours alternativement des résultats plus grands ou plus petits que la valeur demandée. Ces recherches sont fort intérressantes, et tous les géomètres y reconnaitront les premiers germes des plus remarquables découvertes analytiques. On reconnaît là certainement l'emploi des séries dès l'année 1613, c'est à dire avant même la naissance de Wallis, à qui on attribue ordinairement cette découverte."

Herr Libri hat Cataldi's zwei Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel in einer Note kurz angegeben, ohne alle Erläuterung der Gründe, auf denen dieselben beruhen; die erste jedoch, wie es mir scheint, nicht ganz richtig, wenigstens nicht allgemein genug, und die zweite, welche den Gebrauch der Kettenbrüche in Anspruch nimmt, nur durch ein numerisches Beispiel anschaulich gemacht. Da mir beide Methoden sehr bemerkenswerth scheinen, und dieselben einige Berücksichtigung bei dem mathematischen Unterrichte wohl verdienen dürften, so will ich mir erlauben, in dem vorliegenden Aufsatze eine vollständige theoretische Erläuterung derselben zu geben, in der Weise, wie ich selbst mir wenigstens vorstelle, dass ihr Erfinder sie gebraucht und dargestellt hat.

I.

Indem ich ein für alle Mal bemerke, dass alle im Folgenden

vorkommenden Buchstaben positive ganze Zahlen bezeichnen, sei G_1 eine beliebige Grösse, welche grösser als $\sqrt{N}$ ist, so dass also

$$G_1 > \sqrt{N}, \quad G_1^2 > N$$

ist.

Man setze:

$$\frac{G_1^2 - N}{2G_1} = \tfrac{1}{2}G_1 - \frac{N}{2G_1} = C_1,$$

$$G_1 - C_1 = \tfrac{1}{2}G_1 + \frac{N}{2G_1} = G_2;$$

so ist

$$G_2^2 = G_1^2 - 2G_1C_1 + C_1^2 = N + C_1^2.$$

Man setze ferner:

$$\frac{G_2^2 - N}{2G_2} = \tfrac{1}{2}G_2 - \frac{N}{2G_2} = C_2,$$

$$G_2 - C_2 = \tfrac{1}{2}G_2 + \frac{N}{2G_2} = G_3;$$

so ist

$$G_3^2 = G_2^2 - 2G_2C_2 + C_2^2 = N + C_2^2.$$

Auf ähnliche Art setze man weiter:

$$\frac{G_3^2 - N}{2G_3} = \tfrac{1}{2}G_3 - \frac{N}{2G_3} = C_3,$$

$$G_3 - C_3 = \tfrac{1}{2}G_3 + \frac{N}{2G_3} = G_4;$$

so ist

$$G_4^2 = G_3^2 - 2G_3C_3 + C_3^2 = N + C_3^2.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Wenn also

$$G_1 > \sqrt{N}, \quad G_1^2 > N$$

ist, so setze man:

$$\frac{G_1^2 - N}{2G_1} = C_1, \quad G_1 - C_1 = G_2; \quad \frac{G_2^2 - N}{2G_2} = C_2, \quad G_2 - C_2 = G_3;$$

$$\frac{G_3^2 - N}{2G_3} = C_3, \quad G_3 - C_3 = G_4; \quad \frac{G_4^2 - N}{2G_4} = C_4, \quad G_4 - C_4 = G_5;$$

u. s. w.;

dann ist, indem man zu den obigen Gleichungen die Gleichung

$$G_1^2 = N + C^2,$$

wo C weiter zu bestimmen ist, hinzunimmt:

$$G_1^2 = N + C^2,$$
$$G_2^2 = N + C_1^2,$$
$$G_3^2 = N + C_2^2,$$
$$G_4^2 = N + C_3^2,$$
$$G_5^2 = N + C_4^2,$$
u. s. w.

Nun ist nach dem Vorhergehenden:

$$2G_1C_1 = G_1^2 - N = C^2, \quad C_1 = \frac{C^2}{2G_1};$$
$$2G_2C_2 = G_2^2 - N = C_1^2, \quad C_2 = \frac{C_1^2}{2G_2};$$
$$2G_3C_3 = G_3^2 - N = C_2^2, \quad C_3 = \frac{C_2^2}{2G_3};$$
$$2G_4C_4 = G_4^2 - N = C_3^2, \quad C_4 = \frac{C_3^2}{2G_4};$$
u. s. w.;

also:

$$C_1 = \frac{C^2}{2G_1},$$
$$C_2 = \frac{C^4}{2^3 G_1^2 G_2},$$
$$C_3 = \frac{C^8}{2^7 G_1^4 G_2^2 G_3},$$
$$C_4 = \frac{C^{16}}{2^{15} G_1^8 G_2^4 G_3^2 G_4},$$
u. s. w.

und weil nun nach dem Obigen

$$G_1 > \sqrt{N}, \quad G_2 > \sqrt{N}, \quad G_3 > \sqrt{N}, \quad G_4 > \sqrt{N}, \ldots;$$

also

$$G_1 > \sqrt{N},$$
$$G_1^2 G_2 > N\sqrt{N},$$
$$G_1^4 G_2^2 G_3 > N^3\sqrt{N},$$
$$G_1^8 G_2^4 G_3^2 G_4 > N^7\sqrt{N},$$
$$G_1^{16} G_2^8 G_3^4 G_4^2 G_5 > N^{15}\sqrt{N},$$

u. s. w.

ist; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$C_1 < \frac{C^2}{2\sqrt{N}}, \quad \text{oder:} \quad C_1 < C.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2^1-1},$$
$$C_2 < \frac{C^4}{2^3 N\sqrt{N}}, \quad C_2 < C.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2^2-1},$$
$$C_3 < \frac{C^8}{2^7 N^3\sqrt{N}}, \quad C_3 < C.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2^3-1},$$
$$C_4 < \frac{C^{16}}{2^{15} N^7\sqrt{N}}, \quad C_4 < C.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2^4-1},$$

u. s. w. u. s. w.

wo das Gesetz deutlich vor Augen liegt. Quadrirt man, so findet man:

$$C_1^2 < C^2.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2(2^1-1)}, \quad \text{oder:} \quad C_1^2 < C^2.\left(\frac{C^2}{4N}\right)^{2^1-1},$$
$$C_2^2 < C^2.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2(2^2-1)}, \quad C_2^2 < C^2.\left(\frac{C^2}{4N}\right)^{2^2-1},$$
$$C_3^2 < C^2.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2(2^3-1)}, \quad C_3^2 < C^2.\left(\frac{C^2}{4N}\right)^{2^3-1},$$
$$C_4^2 < C^2.\left(\frac{C}{2\sqrt{N}}\right)^{2(2^4-1)}, \quad C_4^2 < C^2.\left(\frac{C^2}{4N}\right)^{2^4-1},$$

u. s. w. u. s. w.

Man denke sich jetzt a so bestimmt, dass

$$a^2 < N < (a+1)^2$$

ist.

Wenn nun $N - a^2 < a$, $N < a^2 + a$ ist, so setze man

$$N = a^2 + b;$$

dann ist offenbar

$$b < a, \quad \frac{b}{a} < 1.$$

Wenn $N - a^2 > a$, $N > a^2 + a$ ist, so setze man

$$N = (a+1)^2 - b_1;$$

dann ist

$$b_1 < a+1, \quad \frac{b_1}{a+1} < 1.$$

Wäre nämlich $b_1 \overline{\gtrless} a+1$, so wäre

$$(a+1)^2 - b_1 \overline{\lessgtr} (a+1)^2 - (a+1)$$

$$\overline{\lessgtr} a^2 + a,$$

also $N \overline{\lessgtr} a^2 + a$, da doch nach dem Obigen $N > a^2 + a$ ist.

Wenn $N - a^2 = a$, $N = a^2 + a$ ist, so kann man

$$N = a^2 + b = (a+1)^2 - b_1$$

$$= a^2 + a + (a+1) - b_1$$

setzen, wo offenbar im ersten Falle $b = a$, im zweiten Falle $b_1 = a+1$, also

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a+1} = 1$$

ist.

Wenn $N - a^2 < a$ ist, so setze man

$$N = a^2 + b, \quad G_1 = a + \frac{b}{2a};$$

dann ist

$$G_1^2 = a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = N + \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \quad C = \frac{b}{2a}, \quad C < \tfrac{1}{2}.$$

Wenn $N - a^2 > a$ ist, so setze man

$$N = (a+1)^2 - b_1, \quad G_1 = a + 1 - \frac{b_1}{2(a+1)};$$

dann ist

$$G_1^2=(a+1)^2-b_1+\left\{\frac{b_1}{2(a+1)}\right\}^2=N+\left\{\frac{b_1}{2(a+1)}\right\}^2,$$

$$C=\frac{b_1}{2(a+1)},\quad C<\tfrac{1}{2}.$$

Wenn $N-a^2=a$ ist, so setze man

$$N=a^2+b=(a+1)^2-b_1,$$

$$G_1=a+\frac{b}{2a}\quad\text{oder}\quad G_1=a+1-\frac{b_1}{2(a+1)};$$

dann ist respective

$$G_1^2=a^2+b+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=N+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,\quad C=\frac{b}{2a}=\tfrac{1}{2}$$

oder

$$G_1^2=(a+1)^2-b_1+\left\{\frac{b_1}{2(a+1)}\right\}^2=N+\left\{\frac{b_1}{2(a+1)}\right\}^2,\quad C=\frac{b_1}{2(a+1)}=\tfrac{1}{2}.$$

Hieraus sieht man, dass man die $\sqrt{N}$ übersteigende Grösse G_1 immer so bestimmen kann, dass

$$C\leqq\tfrac{1}{2},\quad C^2\leqq\tfrac{1}{4}$$

ist.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\frac{C}{2\sqrt{N}}\leqq\frac{1}{4\sqrt{N}},\quad\frac{C^2}{4N}\leqq\frac{1}{16N};$$

und folglich nach dem Obigen:

$$C_1<C.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^1-1},\qquad C_1^2<C^2.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^1-1};$$

$$C_2<C.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^2-1},\qquad C_2^2<C^2.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^2-1};$$

$$C_3<C.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^3-1},\qquad C_3^2<C^2.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^3-1};$$

$$C_4<C.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^4-1},\qquad C_4^2<C^2.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^4-1};$$

u. s. w. u. s. w.

oder:

$$C \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}, \qquad C^2 \overset{=}{<} \tfrac{1}{4};$$

$$C_1 < \tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^1-1}, \qquad C_1^2 < \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^1-1};$$

$$C_2 < \tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^2-1}, \qquad C_2^2 < \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^2-1};$$

$$C_3 < \tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^3-1}, \qquad C_3^2 < \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^3-1};$$

$$C_4 < \tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{4\sqrt{N}}\right)^{2^4-1}, \qquad C_4^2 < \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^4-1};$$

u. s. w. u. s. w.

Mit Rücksicht auf die aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$G_1^2=N+C^2,\quad G_2^2=N+C_1^2,\quad G_3^2=N+C_2^2,\quad G_4^2=N+C_3^2,....$$

sieht man hieraus, dass die mittelst der im Obigen gegebenen Formeln zu berechnenden Grössen

$$G_1,\quad G_2,\quad G_3,\quad G_4,\quad G_5,....$$

sich der $\sqrt{N}$ immer mehr und mehr nähern, je weiter man in dieser Reihe fortschreitet, und, wenn man nur weit genug in derselben fortschreitet, der $\sqrt{N}$ auch beliebig nahe gebracht werden können, wobei nach dem Obigen die in Rede stehenden Grössen zugleich immer grösser als $\sqrt{N}$ sind.

Im Allgemeinen ist nach dem Obigen:

$$G_k^2 = N + C_{k-1}^2 = N\{1 + \left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2\},$$

folglich

$$G_k = \sqrt{N}.\{1 + \left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$C_{k-1}^2 < \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^{k-1}-1},$$

also

$$\frac{C_{k-1}^2}{N} < \frac{1}{4N}\cdot\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^{k-1}-1} \text{ oder } \left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2 < \frac{1}{4N}\cdot\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^{k-1}-1}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze, dessen Anwendung hier offenbar verstattet ist, ist aber:

$$G_k = \sqrt{N}.\left\{1 + \tfrac{1}{2}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2 - \frac{1}{2.4}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right) + \frac{1.3}{2.4.6}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^8 + \ldots\ldots\right\}$$

oder

$$G_k = \sqrt{N} + \tfrac{1}{2}\sqrt{N}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2$$

$$-\sqrt{N}.\left\{\frac{1}{2.4}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^4 - \frac{1.3}{2.4.6}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^6\right\}$$

$$-\sqrt{N}.\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^{10}\right\}$$

$$-\sqrt{N}.\left\{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^{12} - \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12.14}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^{14}\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus sich mittelst einer ganz einfachen Betrachtung auf der Stelle ergiebt, dass der Fehler, welchen man begeht, wenn man

$$\sqrt{N} = G_k$$

setzt, jederzeit kleiner als

$$\tfrac{1}{8}\sqrt{N}.\left(\frac{C_{k-1}}{\sqrt{N}}\right)^2,$$

also nach dem Obigen jederzeit kleiner als

$$\frac{1}{8\sqrt{N}}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^{k-1}-1},$$

folglich auf jeden Fall immer kleiner als

$$\tfrac{1}{8}.\left(\frac{1}{16N}\right)^{2^{k-1}-1}$$

ist.

Am einfachsten berechnet man, nachdem G_1 mittelst der oben angegebenen Regeln bestimmt worden ist, die Grössen

$$G_2,\ G_3,\ G_4,\ G_5,\ G_6,\ \ldots$$

mittelst der folgenden im Obigen bewiesenen Formeln:

$$G_2 = \tfrac{1}{2}G_1 + \frac{N}{2G_1} = \tfrac{1}{2}(G_1 + \frac{N}{G_1}),$$

$$G_3 = \tfrac{1}{2}G_2 + \frac{N}{2G_2} = \tfrac{1}{2}(G_2 + \frac{N}{G_2}),$$

$$G_4 = \tfrac{1}{2}G_3 + \frac{N}{2G_3} = \tfrac{1}{2}(G_3 + \frac{N}{G_3}),$$

$$G_5 = \tfrac{1}{2}G_4 + \frac{N}{2G_4} = \tfrac{1}{2}(G_4 + \frac{N}{G_4}),$$

u. s. w.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir $N=19$ setzen. Weil in diesem Falle $a=4$ und folglich $N-a^2=19-16=3$, also $N-a^2<a$ ist, so muss man

$$N=a^2+b=16+3, \quad b=3;$$

folglich

$$G_1 = a + \frac{b}{2a} = 4 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$$

setzen. Rechnet man nun nur bis auf sieben Decimalstellen genau, und geht bloss bis G_3, so erhält man folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} G_1 &= 4{,}3750000 \\ \tfrac{1}{2}G_1 &= 2{,}1875000 \\ N:2G_1 &= 2{,}1714286 \\ \hline G_2 &= 4{,}3589286 \\ \tfrac{1}{2}G_2 &= 2{,}1794643 \\ N:2G_2 &= 2{,}1794346 \\ \hline G_3 &= 4{,}3588989 \end{aligned}$$

Wenn man $\sqrt{19}=G_3$ setzt, so ist nach dem Obigen der Fehler kleiner als

$$\tfrac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16.19}\right)^3,$$

also kleiner als

$$\frac{1}{224755712},$$

woraus sich ergiebt, dass der obige Werth von G_3 die $\sqrt{19}$ **mindestens** auf die oben berechneten sieben Decimalstellen

richtig liefert; und durch die gewöhnliche Methode der Ausziehung der Quadratwurzel erhält man auch in der That

$$\sqrt{19} = 4,3588989.$$

Wäre man bis G_4 gegangen und hätte $\sqrt{19} = G_4$ gesetzt, so wäre nach dem Obigen der Fehler jedenfalls kleiner als

$$\tfrac{1}{8}.\left(\frac{1}{16.19}\right)^{2^3-1} = \tfrac{1}{8}.\left(\frac{1}{16.19}\right)^7,$$

woraus man sieht, eine wie ungemein schnelle Näherung die von Cataldi angegebene Methode in der That gewährt, und es ist daher unser obiges Urtheil über dieselbe, dass sie die Aufnahme in den mathematischen Unterricht wohl verdiene, gewiss gerechtfertigt. Der Logarithmus der obigen Fehlergränze für $G_4 = \sqrt{19}$ ist

$$0,7167948 - 19,$$

woraus man sieht, auf eine wie grosse Anzahl von Decimalstellen schon G_4 die $\sqrt{19}$ richtig liefert, weshalb die Methode des genannten, bisher fast gar nicht bekannten italienischen Mathematikers gewiss alle Beachtung verdient, und von Neuem einen sehr erfreulichen Beweis von den grossen Fortschritten liefert, welche die Algebra in Italien schon im 16ten Jahrhunderte gemacht hatte.

II.

Ich will jetzt zuerst eine streng theoretische Begründung der gewöhnlichen Methode der Ausziehung der Quadratwurzel geben, weil in den Lehrbüchern darüber häufig nur wenig Genügendes beigebracht wird, und weil damit die Anwendung der Kettenbrüche auf die Quadratwurzel-Ausziehung in der Weise, wie ich dieselbe nachher machen werde, nahe zusammenhängt.

Wir wollen annehmen, dass man mittelst irgend einer Methode eine ganze Zahl G von solcher Beschaffenheit gefunden habe, dass, indem k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$G^2.10^{2k} \overline{\gtrless} N < (G+1)^2.10^{2k}$$

oder

$$G.10^k \overline{\gtrless} \sqrt{N} < (G+1).10^k$$

ist. Setzt man dann

$$\sqrt{N} = G.10^k,$$

so ist, weil $\sqrt{N}$ zwischen

$$G.10^k \text{ und } (G+1).10^k$$

liegt, der Fehler, welchen man begeht, offenbar kleiner als

$$(G+1).10^k - G.10^k = 10^k.$$

Unter dieser Voraussetzung, dass man nämlich G auf die angegebene Weise bestimmt hat, kommt es nun ferner darauf an, die ganze Zahl G_1 so zu bestimmen, dass

$$(G.10^k + G_1.10^{k-1})^2 \overline{\gtrless} N < \{G.10^k + (G_1+1).10^{k-1}\}^2$$

oder

$$G.10^k + G_1.10^{k-1} \overline{\gtrless} \sqrt{N} < G.10^k + (G_1+1).10^{k-1}$$

ist, indem dann, wenn man

$$\sqrt{N} = G.10^k + G_1.10^{k-1}$$

setzt, der Fehler, welchen man begeht, offenbar kleiner als

$$\{G.10^k + (G_1+1).10^{k-1}\} - (G.10^k + G_1.10^{k-1}) = 10^{k-1}$$

ist. Zuerst erhellet nun, dass immer $G_1 < 10$ ist. Denn wäre $G_1 \overline{>} 10$, so wäre

$$G.10^k + G_1.10^{k-1} \overline{>} (G+1).10^k,$$

und folglich, wegen der über die Bestimmung von G oben gemachten Voraussetzung,

$$G.10^k + G_1.10^{k-1} > \sqrt{N},$$

da doch

$$G.10^k + G_1.10^{k-1} \overline{<} \sqrt{N}$$

sein soll. Weil nun ferner aus der Bedingung

$$(G.10^k + G_1.10^{k-1})^2 \overline{<} N < \{G.10^k + (G_1+1).10^{k-1}\}^2$$

sich unmittelbar die Bedingung

$$\begin{aligned} &2GG_1.10^{2k-1} + G_1^2.10^{2k-2} \\ &\overline{<} N - G^2.10^{2k} \\ &< 2G(G_1+1).10^{2k-1} + (G_1+1)^2.10^{2k-2} \end{aligned}$$

ergiebt, so hat man zur Bestimmung von G_1 offenbar die folgende allgemeine Regel:

Man setze für G_1 die ganze Zahl unter 10, für welche zunächst

$$2GG_1.10^{2k-1}+G_1^2.10^{2k-2} \overline{\overline{<}} N-G^2.10^{2k}$$

ist.

Dass dies in der That ganz dieselbe Regel ist, welche man bei der gewöhnlichen Methode der Ausziehung der Quadratwurzel stets in Anwendung bringt, erhellet auf der Stelle. Die Fehler, welche man bei Anwendung dieser Methode nach und nach begeht, sind nach dem Obigen kleiner als

$$10^k,\quad 10^{k-1},\quad 10^{k-2},\quad 10^{k-3},\ldots.$$

und werden also immer kleiner und kleiner, können auch beliebig klein gemacht werden, da ja die Exponenten der vorstehenden Potenzen auch negativ werden und, absolut genommen, in's Unendliche wachsen können.

Eine andere, als eine zur Abkürzung der Rechnung dienende Hülfsregel, welche bei der gewöhnlichen Ausziehung der Quadratwurzel in Anwendung gebracht wird, kann auf folgende Art bewiesen werden.

Wir wollen annehmen, dass

$$N-G^2.10^{2k}=\mathfrak{G}.10^{2k-1}+a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots.$$

sei, wo $a, b, c, d, \ldots.$ sämmtlich kleiner als 10 sein sollen. Dann ist nach dem Obigen

$$2GG_1.10^{2k-1}+G_1^2.10^{2k-2}$$

$$\overline{\overline{<}}\,\mathfrak{G}.10^{2k-1}+a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots.,$$

und ich behaupte nun, dass immer

$$2GG_1 \overline{\overline{<}} \mathfrak{G},\quad \text{also}\quad G_1 \overline{\overline{<}} \frac{\mathfrak{G}}{2G}$$

ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste mindestens $2GG_1=\mathfrak{G}+1$, also

$$2GG_1.10^{2k-1}=\mathfrak{G}.10^{2k-1}+10^{2k-1},$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$10^{2k-1}+G_1^2.10^{2k-2} \overline{\overline{<}} a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots.$$

sein. Nun ist aber.

$$a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots$$

$$\overline{\overline{<}}\,9.(10^{2k-2}+10^{2k-3}+10^{2k-4}+10^{2k-5}+\ldots)$$

$$\overline{\overline{<}}\,9.(10^{2k-2}+10^{2k-3}+10^{2k-4}+\ldots+10+1)$$

$$+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)$$

$$\overline{\overline{<}}\,9.\frac{10^{2k-1}-1}{10-1}+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)$$

$$\overline{\overline{<}}\,10^{2k-1}-1+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right),$$

und folglich, weil für jedes positive ganze n

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}=\frac{\frac{1}{10}-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10^n-1}{10^n.9}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10^n.9},$$

also

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}<\frac{1}{9},$$

$$9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)<1$$

ist:

$$a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots<10^{2k-1}-1+1<10^{2k-1}.$$

Daher wäre nach dem Obigen

$$10^{2k-1}+G_1^2.10^{2k-2}<10^{2k-1},$$

also $G_1^2.10^{2k-2}<0$, was offenbar ungereimt ist. Folglich kann nicht $2GG_1>\mathfrak{G}$ sein, und es muss also

$$2GG_1\,\overline{\overline{<}}\,\mathfrak{G},\quad G_1\,\overline{\overline{<}}\,\frac{\mathfrak{G}}{2G}$$

sein, eine Hülfsregel, durch welche, wie Jeder aus den ersten Elementen weiss, die Rechnung bei der gewöhnlichen Methode der Ausziehung der Quadratwurzel abgekürzt wird.

Es kommt nun bloss noch darauf an, zu zeigen, wie man G, von welcher Grösse man bei der Rechnung ausgehen muss, so bestimmt, dass

$$G^2.10^{2k} \overline{\overline{<}} N < (G+1)^2.10^{2k}$$

ist. Zu dem Ende sei

$$N = G'.10^{2k} + a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots,$$

wo a', b', c', d', ... sämmtlich kleiner als 10 sein sollen. Dann braucht man G bloss so zu bestimmen, dass

$$G^2 \overline{\overline{<}} G' < (G+1)^2$$

ist, welches wieder eine aus den Elementen allgemein bekannte Rechnungsregel giebt, deren Richtigkeit auf folgende Art bewiesen werden kann. Wenn

$$G^2 \overline{\overline{<}} G' < (G+1)^2$$

ist, so ist

$$G^2.10^{2k} \overline{\overline{<}} G'.10^{2k} < (G+1)^2.10^{2k},$$

und folglich nach dem Obigen offenbar auch

$$G^2.10^{2k} \overline{\overline{<}} N.$$

Weil nun aber ferner

$$(G+1)^2 > G'$$

ist, so ist

$$(G+1)^2 \overline{\overline{>}} G'+1,$$

also

$$(G+1)^2.10^{2k} \overline{\overline{>}} G'.10^{2k} + 10^{2k}.$$

Ganz wie oben ist aber

$$10^{2k} > a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots,$$

also

$$\begin{aligned} G'.10^{2k} + 10^{2k} &> G'.10^{2k} + a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots \\ &> N, \end{aligned}$$

und folglich nach dem Vorstehenden

$$(G+1)^2.10^{2k} > N,$$

also

sein. Nun ist aber

$$a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots$$

$$\overset{=}{<} 9.(10^{2k-2}+10^{2k-3}+10^{2k-4}+10^{2k-5}+\ldots)$$

$$\overset{=}{<} 9.(10^{2k-2}+10^{2k-3}+10^{2k-4}+\ldots+10+1)$$

$$+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)$$

$$\overset{=}{<} 9.\frac{10^{2k-1}-1}{10-1}+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)$$

$$\overset{=}{<} 10^{2k-1}-1+9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right),$$

und folglich, weil für jedes positive ganze n

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}=\frac{\frac{1}{10}-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10^n-1}{10^n.9}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10^n.9},$$

also

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}<\frac{1}{9},$$

$$9.\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)<1$$

ist:

$$a.10^{2k-2}+b.10^{2k-3}+c.10^{2k-4}+\ldots<10^{2k-1}-1+1<10^{2k-1}.$$

Daher wäre nach dem Obigen

$$10^{2k-1}+G_1{}^2.10^{2k-2}<10^{2k-1},$$

also $G_1{}^2.10^{2k-2}<0$, was offenbar ungereimt ist. Folglich kann nicht $2GG_1>\mathfrak{G}$ sein, und es muss also

$$2GG_1 \overset{=}{<} \mathfrak{G},\quad G_1 \overset{=}{<} \frac{\mathfrak{G}}{2G}$$

sein, eine Hülfsregel, durch welche, wie Jeder aus den ersten Elementen weiss, die Rechnung bei der gewöhnlichen Methode der Ausziehung der Quadratwurzel abgekürzt wird.

Es kommt nun bloss noch darauf an, zu zeigen, wie man G, von welcher Grösse man bei der Rechnung ausgehen muss, so bestimmt, dass

$$G^2.10^{2k} \leqq N < (G+1)^2.10^{2k}$$

ist. Zu dem Ende sei

$$N = G'.10^{2k} + a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots,$$

wo a', b', c', d', ... sämmtlich kleiner als 10 sein sollen. Dann braucht man G bloss so zu bestimmen, dass

$$G^2 \leqq G' < (G+1)^2$$

ist, welches wieder eine aus den Elementen allgemein bekannte Rechnungsregel giebt, deren Richtigkeit auf folgende Art bewiesen werden kann. Wenn

$$G^2 \leqq G' < (G+1)^2$$

ist, so ist

$$G^2.10^{2k} \leqq G'.10^{2k} < (G+1)^2.10^{2k},$$

und folglich nach dem Obigen offenbar auch

$$G^2.10^{2k} \leqq N.$$

Weil nun aber ferner

$$(G+1)^2 > G'$$

ist, so ist

$$(G+1)^2 \geqq G'+1,$$

also

$$(G+1)^2.10^{2k} \geqq G'.10^{2k} + 10^{2k}.$$

Ganz wie oben ist aber

$$10^{2k} > a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots,$$

also

$$G'.10^{2k} + 10^{2k} > G'.10^{2k} + a'.10^{2k-1} + b'.10^{2k-2} + c'.10^{2k-3} + \ldots$$
$$> N,$$

und folglich nach dem Vorstehenden

$$(G+1)^2.10^{2k} > N,$$

also

$$G^2.10^{2k} \overline{\gtrless} N < (G+1)^2.10^{2k},$$

wie verlangt wurde.

Auf diese Weise sind alle Regeln, welche bei der gewöhnlichen Methode der Ausziehung der Quadratwurzel in Anwendung kommen, vollständig bewiesen.

III.

Nehmen wir nun an, dass man durch die gewöhnliche Methode der Ausziehung der Quadratwurzel für ein beliebiges k die ganze Zahl G so bestimmt habe, dass

$$\sqrt{N} = G.10^k + C$$

ist, wo C eine positive Grösse bezeichnet; so ist

$$N = G^2.10^{2k} + (2G.10^k + C)C,$$

und folglich

$$C = \frac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + C},$$

also

$$C = \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \ldots}}}}$$

und daher nach dem Obigen:

$$\sqrt{N} = G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \cfrac{N - G^2.10^{2k}}{2G.10^k + \ldots}}}}$$

Für $N = 18$ kann man, wie sogleich erhellet, $G = 4$ und $k = 0$ setzen, so dass also in diesem Falle

$$N - G^2.10^{2k} = 18 - 16 = 2, \quad 2G.10^k = 8;$$

folglich

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}}}}$$

ist, welches ganz der Kettenbruch ist, den **Libri** als von **Cataldi** angegeben anführt.

Für $N = 3478965$ giebt die gewöhnliche Ausziehung der Quadratwurzel, wenn man dieselbe bis zur dritten Ziffer der Wurzel fortsetzt, Folgendes:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{3|47|89|65} = 186 \ldots. & \\ 1 & \\ 2)\ \overline{247} & \\ 224 & \\ 36)\ \overline{2389} & \\ 2196 & \\ \overline{193} & \end{array}$$

Also kann man $G = 186$, $\mu = 1$ setzen, und es ist

$$G^2 = 34596,$$

folglich

$$N - G^2 . 10^{2\mu} = 3478965 - 3459600 = 19365,$$

$$2G . 10^{\mu} = 372 . 10 = 3720;$$

daher nach dem Obigen:

$$\sqrt{3478965} = 1860 + \cfrac{19365}{3720 + \cfrac{19365}{3720 + \cfrac{19365}{3720 + \cfrac{19365}{3790 + \ldots}}}}$$

Jedenfalls ist es in historischer Beziehung sehr bemerkenswerth, dass, wie Libri überzeugend nachgewiesen zu haben scheint, die Form der Kettenbrüche, deren Erfindung sonst allgemein dem Lord Brouncker beigelegt wird, von Cataldi schon früher als von diesem in Anwendung gebracht worden ist, und daher auch dieser jedenfalls sehr ausgezeichnete italienische Mathematiker als eigentlicher Erfinder der in Rede stehenden wichtigen analytischen Grössenform zu nennen sein dürfte. Sein Andenken zu erneuern und ihm die verdiente Beachtung zu verschaffen, war mit ein Zweck dieses Aufsatzes.

XXXI.

Note sur l'intégration des équations différentielles

I. $x^2(a-bx)d^2y-2x(2a-bx)dx\,dy+2(3a-bx)ydx^2=6a^2dx^2$,

II. $$d^2y+\frac{y}{x^2}dx^2=0,$$

III. $$d^2y+2\frac{dxdy}{x}+f^2\frac{ydx^2}{x^4}=0,$$

IV. $$x^2d^2y-2xdxdy+2ydx^2=\frac{x^2ydx^2}{f^2}.$$

Par

Monsieur *R. Lobatto*,

Professeur de mathématiques à l'Académie Royale à Delft.

M. le Professeur Wolfers à Berlin s'est déja occupé dans ce Journal *) de l'intégration de chacune des équations précédentes. Quoique la marche suivie dans ce travail ne puisse donner lieu à aucune observation, j'ai cru néanmoins qu'il ne serait peut-être pas inutile d'indiquer ici d'autres procédés pour obtenir les intégrales de ces équations, et qui m'ont paru plus simples et plus directs que ceux employés par l'habile géomètre que je viens de citer. On va voir qu'il est même possible d'y parvenir sans rechercher préalablement le facteur propre à rendre intégrable l'équation proposée. C'est ce que forme l'objet de la présente note, où je traiterai successivement ces équations de la manière suivante.

---

*) Voir Tom. XXVIII. pag. 271.

II. Intégration de l'équation

$$x^2(a-bx)d^2y-2x(2a-bx)dxdy+2(3a-bx)ydx^2=6a^2dx^2.$$

Ecrivons d'abord la proposée sous la forme

$$(a-bx)\{x^2d^2y-2xdxdy+2ydx^2\}$$
$$-2a\{xdy-ydx\}dx+2aydx^2=6a^2dx^2. \qquad (1)$$

Faisons maintenant $y=xz$, ou $z=\frac{y}{x}$; on en déduira

$$dz=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$d^2z=\frac{x^2d^2y-2xdxdy+2ydx^2}{x^3},$$

ce qui change l'équation (1) en celle-ci:

$$(a-bx)x^3d^2z-2ax^2dzdx+2axzdx^2=6a^2dx^2,$$

qu'on pourra présenter encore sous la forme

$$(x^2d^2z-2xdzdx+2zdx^2)\,ax-bx^4d^2z=6a^2dx^2. \qquad (2)$$

Or, en comparant la quantité trinôme, qui forme le facteur de ax à la valeur précédente de x^3d^2z, on remarquera de suite, qu'on pourra la remplacer par le produit $x^3d^2\left(\frac{z}{x}\right)$, de sorte que l'équation (2) se réduit actuellement à la forme simplifiée:

$$ax^4d^2\left(\frac{z}{x}\right)-bx^4d^2z=6a^2dx^2$$

ou bien, après avoir divisé par x^4, on aura

$$ad^2\left(\frac{z}{x}\right)-bd^2z=\frac{6a^2}{x^4}dx^2.$$

La différentielle dx étant supposée constante, chaque membre de l'équation précédente devient immédiatement intégrable, et l'on obtient pour intégrale première:

$$ad\left(\frac{z}{x}\right)-bdz=-\frac{2a^2}{x^3}dx+Cdx.$$

Intégrant de nouveau, il viendra

$$a\frac{z}{x}-bz=\frac{a^2}{x^2}+Cx+C',$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. Si l'on écrit maintenant pour z sa valeur $\frac{y}{x}$, on trouvera

$$\frac{y(a-bx)}{x^2}=\frac{a^2}{x^2}+Cx+C',$$

ou bien

$$y=\frac{a^2+(Cx+C')x^2}{a-bx},$$

résultat qui, après y avoir changé la constante C' en $C'-b^2$, coincide exactement avec celui obtenu par Mr. le Professeur Wolfers.

II. Intégration de l'équation

$$d^2y+y\frac{dx^2}{x^2}=0. \qquad (1)$$

En écrivant la proposée sous la forme

$$d^2y+y(d\log x)^2=0,$$

on est conduit à introduire une nouvelle variable $z=\log x$, ce qui revient à faire $x=e^z$. Changeons en même temps l'équation (1) en une autre, où dz au lieu de dx soit la différentielle supposée constante. Pour opérer ce changement de variable indépendante, il faudra, comme l'on sait, remplacer d'abord d^2y par

$$d^2y-\frac{dy\,d^2x}{dx}.$$

Or, on a $dx=e^z dz$, $d^2x=e^z dz^2$, donc l'équation (1) se changera par ces substitutions en

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+y=0.$$

Il est évident maintenant, qu'en posant $y=Ae^{az}$, on obtiendra une intégrale particulière de l'équation précédente, pourvu que le coéfficient a satisfasse à l'équation du second degré

$$a^2-a+1=0,$$

d'où l'on tire pour a les deux valeurs $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

On en conclut que si a, a' désignent ces deux racines, l'intégrale complète de la proposée pourra s'exprimer par

$$y = Ae^{az} + A'e^{a'z},$$

A et A' représentant deux constantes arbitraires.

Après avoir substitué à a et a' leurs valeurs numériques, on obtiendra successivement

$$y = e^{\frac{z}{2}}\{Ae^{\frac{z\sqrt{-3}}{2}} + A'e^{\frac{-z\sqrt{-3}}{2}}\}$$

$$= e^{\frac{z}{2}}\{A(\text{Cos}\frac{z\sqrt{3}}{2} + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{z\sqrt{3}}{2}) + A'(\text{Cos}\frac{z\sqrt{3}}{2} - \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{z\sqrt{3}}{2})\}$$

$$= e^{\frac{z}{2}}\{(A+A')\text{Cos}\frac{z\sqrt{3}}{2} + (A-A')\sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{z\sqrt{3}}{2}\}$$

équation dont le second membre pourra facilement, à l'aide d'un changement de constantes arbitraires, être réduit à la forme

$$Ce^{\frac{z}{2}}\,\text{Sin}(\alpha + \frac{z\sqrt{3}}{2}),$$

et d'où l'on tire finalement, en ayant égard à la valeur de z:

$$y = c\sqrt{x}\,\text{Sin}(\alpha + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x).$$

III. Intégration de l'équation

$$d^2y + 2\frac{dxdy}{x} + f^2y\frac{dx^2}{x^4} = 0.$$

Soit $\frac{1}{x} = z$, la proposée se changera en

$$d^2y - 2\frac{dzdy}{z} + f^2ydz^2 = 0. \qquad (1)$$

Prenons z au lieu de x pour variable indépendante, il faudra alors remplacer d^2y par $d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$. Or, puisqu'on a $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $d^2x = \frac{2dz^2}{z^3}$, la nouvelle valeur de d^2y deviendra $d^2y + 2\frac{dzdy}{z}$, ce qui réduit l'équation (1) à celle ci:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -f^2y,$$

dont l'intégrale complète a pour valeur

$$y = A\,\text{Sin}(fz + \alpha) = A\,\text{Sin}\left(\frac{f}{x} + \alpha\right),$$

A et α indiquant deux constantes arbitraires.

IV. Intégration de l'équation

$$x^2d^2y - 2xdxdy + 2ydx^2 = \frac{x^2ydx^2}{f^2}.$$

En faisant $y = xz$ ou $\frac{y}{x} = z$, on a déjà vu ci dessus (I) que le premier membre de la proposée exprime précisement la valeur du produit x^3d^2z, ce qui réduit cette équation à

$$x^3d^2z = \frac{x^2ydx^2}{f} \text{ ou bien } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{z}{f^2},$$

équation dont l'intégrale complète a pour valeur

$$z = Ae^{\frac{x}{f}} + A'e^{-\frac{x}{f}};$$

donc

$$y = Axe^{\frac{x}{f}} + A'xe^{-\frac{x}{f}}.$$

XXXII.

Lamarle's Construction des Krümmungskreises der Kegelschnitte.

Von

dem Herausgeber.

Herr Lamarle in Brüssel hat in einer kürzlich in den Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1857. No. 5. p. 33. erschienenen Abhandlung: „Théorie géométrique des rayons et centres de courbure; par M. E. Lamarle, associé de l'Académie“ eine neue geometrische Theorie des Krümmungs-

kreises der Curven geliefert, welche nach unserer Meinung jedenfalls grosse Aufmerksamkeit verdient. Die Hauptgrundlage dieser Theorie bildet eine neue Definition der Curve, welche Herr Lamarle in einem früheren Aufsatze (Bulletins de l'Académie Royale de Belgique. 1856. Tome XXIII. — IIme Partie. p. 642.) mit besonderer Deutlichkeit auf folgende Art ausdrückt:

„La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, le point glissant sur la droite, et la droite tournant autour du point;"

und es ist in der That überraschend, mit wie grosser Einfachheit, Kürze und Leichtigkeit Herr Lamarle aus dieser Definition, verbunden mit einigen ganz einfachen Sätzen der allgemeinen Bewegungslehre, eine grosse Anzahl sehr merkwürdiger Constructionen der Krümmungskreise der wichtigsten Curven ableitet, nachdem er schon in früheren Aufsätzen (Bulletins de l'Académie Royale de Belgique. 1856. Tome XXIII. — IIme Partie. p. 408. und p. 637.) dieselbe Definition zur strengen Begründung der Theorie der Parallellinien benutzt hatte. Herrn Lamarle's neue Theorie des Krümmungskreises in einer Uebersetzung hier mitzutheilen, hielt ich wegen der völligen Neuheit des Gegenstandes nicht für angemessen, indem ich es aus diesem Grunde, um ganz sicher zu sein, ganz den Sinn des Verfassers zu treffen, für zweckmässiger halte, die Abhandlung vollständig im Original in das Archiv aufzunehmen, was ich zu thun hoffe, sobald Herr Lamarle seine Einwilligung dazu ertheilt haben wird, ohne welche dies natürlich nicht geschehen kann. Auch ist es vielleicht gut, mit dieser Mittheilung noch einigen Anstand zu nehmen, da Herr Lamarle selbst (p. 94. und p. 95.) seine vorliegende Abhandlung nur für das erste und unmittelbarste Ergebniss seiner bisherigen Studien erklärt, und auch nach unserer Meinung die Sache jedenfalls noch weiterer Ausbildung nicht bloss bedarf, sondern auch fähig ist, wobei es uns zugleich scheinen will, dass sich die unmittelbare Anwendung der Principien der allgemeinen Bewegungslehre wohl ganz umgehen, und Alles sich auf blosse geometrische Betrachtungen zurückführen lassen müsste. Für jetzt haben wir unseren Zweck erreicht, wenn durch die vorstehenden Bemerkungen die Aufmerksamkeit der Leser des Archivs auf die von Herrn Lamarle entwickelte neue sinnreiche Theorie der Krümmung der Curven gelenkt wird, die jedenfalls noch zu weiteren bemerkenswerthen Ergebnissen führen wird, woran nach dem bisher schon Geleisteten nicht zu zweifeln ist.

Ausser diesem nächsten Zwecke, die allgemeine Aufmerksamkeit auf die sinnreichen Untersuchungen Herrn Lamarle's

zu lenken, werde ich in dem vorliegenden Aufsatze noch die von diesem ausgezeichneten Mathematiker gefundene Construction des Krümmungskreises der Kegelschnitte mittelst der allgemeinen Principien der analytischen Geometrie ableiten und entwickeln, um somit eins der bemerkenswerthesten der von Herrn Lamarle erhaltenen Resultate den Lesern des Archivs mitzutheilen, freilich auf ganz anderem Wege, als Herr Lamarle zu demselben gelangt ist, wobei ich zugleich einige, bisher noch nicht bekannte Ausdrücke für den Halbmesser des Krümmungskreises der Kegelschnitte entwickeln werde, die dem Wesentlichen nach auch Herrn Lamarle angehören. Einige Constructionen der Krümmungskreise anderer Curven hoffe ich diesen Mittheilungen über die Kegelschnitte noch folgen zu lassen.

Die Gleichung der Ellipse und Hyperbel ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

wenn man für die Hyperbel in dieser Gleichung $b\sqrt{-1}$ für b setzt.

Aus dieser Gleichung erhält man leicht durch Differentiation:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Sind nun x, y die Coordinaten eines beliebigen, aber bestimmten Punktes der durch die obige Gleichung charakterisirten Curven, und bezeichnen wir die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch X, Y; so ist

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x)$$

die Gleichung der Normale in dem Punkte (xy). Setzen wir wie gewöhnlich

$$e=\sqrt{a^2-b^2},$$

wo immer bei der Hyperbel $b\sqrt{-1}$ für b gesetzt werden muss; so sind

$$Y-y=\frac{y}{x\mp e}(X-x)$$

oder

$$Y=\frac{y}{x\mp e}(X\mp e)$$

die Gleichungen der beiden dem Punkte (xy) entsprechenden Vectoren.

Nun sei $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ein beliebiger Punkt der Normale, so dass also nach dem Obigen

$$\mathfrak{y}-y=\frac{a^2y}{b^2x}(\mathfrak{x}-x)$$

ist. Fällt man von diesem Punkte Perpendikel auf die beiden Vectoren, so sind die Gleichungen dieser beiden Perpendikel nach dem Vorhergehenden:

$$Y-\mathfrak{y}=-\frac{x\mp e}{y}(X-\mathfrak{x}).$$

Für die oberen und unteren Zeichen sollen die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Perpendikel mit den Vectoren, auf welche sie gefällt worden, respective u, v und u_1, v_1 sein, und die entsprechenden Vectoren selbst wollen wir im Folgenden durch r und r_1 bezeichnen. Zur Bestimmung von u, v und u_1, v_1 haben wir nach dem Obigen die Gleichungen:

$$v-y=\frac{y}{x-e}(u-x),\quad v-\mathfrak{y}=-\frac{x-e}{y}(u-\mathfrak{x})$$

und

$$v_1-y=\frac{y}{x+e}(u_1-x),\quad v_1-\mathfrak{y}=-\frac{x+e}{y}(u_1-\mathfrak{x}).$$

Legen wir durch die Punkte (uv) und (u_1v_1) eine Gerade, so ist deren Gleichung:

$$Y-v=\frac{v-v_1}{u-u_1}(X-u)\ \text{ oder }\ Y-v_1=\frac{v-v_1}{u-u_1}(X-u_1).$$

Der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Hauptaxe der Ellipse oder Hyperbel sei (u_2v_2), so hat man zur Bestimmung der Coordinaten dieses Durchschnittspunktes die Gleichungen:

$$v_2-v=\frac{v-v_1}{u-u_1}(u_2-u)\ \text{ oder }\ v_2-v_1=\frac{v-v_1}{u-u_1}(u_2-u_1)\ \text{ und }\ v_2=0,$$

woraus

$$u_2=-\frac{uv_1-vu_1}{v-v_1},\quad v_2=0$$

folgt.

Es kommt nun zunächst darauf an, die Coordinaten u, v und u_1, v_1 zu bestimmen. Aus den obigen, zur Bestimmung dieser Coordinaten gefundenen Gleichungen erhält man durch Subtraction:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{y}{x-e}(u-x)+\frac{x-e}{y}(u-\mathfrak{x}),$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{y}{x+e}(u_1-x)+\frac{x+e}{y}(u_1-\mathfrak{x});$$

also:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}u-\left\{\frac{xy}{x-e}+\frac{(x-e)\mathfrak{x}}{y}\right\},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}u_1-\left\{\frac{xy}{x+e}+\frac{(x+e)\mathfrak{x}}{y}\right\};$$

und hieraus ferner:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}(u-x)+\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}x-\left\{\frac{xy}{x-e}+\frac{(x-e)\mathfrak{x}}{y}\right\},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}(u_1-x)+\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}x-\left\{\frac{xy}{x+e}+\frac{(x+e)\mathfrak{x}}{y}\right\};$$

also:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}(u-x)+\frac{(x-e)(x-\mathfrak{x})}{y},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}(u_1-x)+\frac{(x+e)(x-\mathfrak{x})}{y};$$

folglich, weil

$$r^2=(x-e)^2+y^2,\quad r_1^2=(x+e)^2+y^2$$

ist:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{r^2}{(x-e)y}(u-x)-\frac{(x-e)(\mathfrak{x}-x)}{y},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{r_1^2}{(x+e)y}(u_1-x)-\frac{(x+e)(\mathfrak{x}-x)}{y};$$

woraus sogleich

$$u-x=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)\}(x-e)}{r^2},$$

$$u_1-x=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)\}(x+e)}{r_1^2};$$

und daher ferner nach dem Obigen

$$v-y=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)\}y}{r^2},$$

$$v_1-y=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)\}y}{r_1^2}.$$

folgt. Nun ist aber bekanntlich

$$\mathfrak{y}-y=\frac{a^2y}{b^2x}(\mathfrak{x}-x),$$

also:

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a^2y^2+b^2x(x-e)}{b^2x}(\mathfrak{x}-x),$$

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a^2y^2+b^2x(x+e)}{b^2x}(\mathfrak{x}-x);$$

folglich, wie man sogleich übersieht, weil

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

ist:

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a^2-ex}{x}(\mathfrak{x}-x),$$

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a^2+ex}{x}(\mathfrak{x}-x);$$

oder:

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a(a-\frac{ex}{a})(\mathfrak{x}-x)}{x},$$

$$y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)=\frac{a(a+\frac{ex}{a})(\mathfrak{x}-x)}{x};$$

folglich nach dem Obigen:

$$u-x=\frac{a(a-\frac{ex}{a})(x-e)(\mathfrak{x}-x)}{r^2x},$$

$$u_1-x=\frac{a(a+\frac{ex}{a})(x+e)(\mathfrak{x}-x)}{r_1{}^2x}$$

und:

$$v-y=\frac{a(a-\frac{ex}{a})y(\mathfrak{x}-x)}{r^2x},$$

$$v_1-y=\frac{a(a+\frac{ex}{a})y(\mathfrak{x}-x)}{r_1{}^2x}.$$

Nun ist:

$$r^2=(x-e)^2+y^2=x^2-2ex+e^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2ex+e^2+b^2$$

$$=\frac{e^2x^2}{a^2}-2ex+a^2$$

$$=\left(\frac{ex}{a}-a\right)^2=(a-\frac{ex}{a})^2,$$

$$r_1^2=(x+e)^2+y^2=x^2+2ex+e^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2ex+e^2+b^2$$

$$=\frac{e^2x^2}{a^2}+2ex+a^2$$

$$=\left(\frac{ex}{a}+a\right)^2=(a+\frac{ex}{a})^2.$$

Es ist aber

$$a^2-\left(\frac{ex}{a}\right)^2=\frac{a^4-e^2x^2}{a^2}=\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2}=\frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}{a^2}.$$

Bei der Ellipse ist

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

und b^2 positiv, also auch a^2-x^2 positiv, folglich offenbar

$$a^2-\left(\frac{ex}{a}\right)^2>0,$$

also, wie sogleich erhellet:

$$a\mp\frac{ex}{a}>0.$$

Bei der Hyperbel ist, wenn wir $b\sqrt{-1}$ für b setzen:

$$y^2=-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

also a^2-x^2 negativ, und da nach dem Obigen, wenn wieder $b\sqrt{-1}$ für b gesetzt wird:

$$a^2 - \left(\frac{ex}{a}\right)^2 = \frac{a^2(a^2-x^2)-b^2x^2}{a^2}$$

ist, so ist

$$a^2 - \left(\frac{ex}{a}\right)^2 < 0.$$

Ist nun x positiv, so ist

$$a - \frac{ex}{a} < 0,\quad a + \frac{ex}{a} > 0;$$

ist dagegen x negativ, so ist

$$a - \frac{ex}{a} > 0,\quad a + \frac{ex}{a} < 0.$$

Nach dem Obigen ist folglich bei der Ellipse immer

$$r = a - \frac{ex}{a},\quad r_1 = a + \frac{ex}{a}.$$

Bei der Hyperbel dagegen ist

$$r = -\left(a - \frac{ex}{a}\right),\quad r_1 = a + \frac{ex}{a}$$

oder

$$r = a - \frac{ex}{a},\quad r_1 = -\left(a + \frac{ex}{a}\right),$$

jenachdem x positiv oder negativ ist. Also ist bei der Ellipse immer

$$a - \frac{ex}{a} = r,\quad a + \frac{ex}{a} = r_1;$$

bei der Hyperbel dagegen ist

$$a - \frac{ex}{a} = \mp r,\quad a + \frac{ex}{a} = \pm r_1,$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist. Also ist nach dem Vorhergehenden bei der Ellipse:

$$u - x = \mp \frac{a(x-e)(x_1-x)}{r x_1}$$

$$u_1 - x = \frac{a(x+e)(x_1-x)}{r_1 x}$$

und

$$v-y=\frac{ay(r-x)}{rx},\quad v_1-y=\frac{ay(r-x)}{r_1x};$$

…erbel dagegen ist:

$$u-x=\mp\frac{a(x-e)(r-x)}{rx},$$

$$u_1-x=\pm\frac{a(x+e)(r-x)}{r_1x}$$

und:

$$v-y=\mp\frac{ay(r-x)}{rx},\quad v_1-y=\pm\frac{ay(r-x)}{r_1x};$$

…n man … obere … Zeichen nimmt, jenachdem x …sitiv oder …

Für die …

$$u=x+\frac{a(x-e)(r-x)}{rx},\quad u_1=x+\frac{a(x+e)(r-x)}{r_1x};$$

$$v=y+\frac{ay(r-x)}{rx},\quad v_1=y+\frac{ay(r-x)}{r_1x};$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$uv_1-vu_1=-ay(r-x)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{ay(r-x)}{x}\left\{\frac{x-e}{r}-\frac{x+e}{r_1}\right\}$$
$$-\frac{2ea^2y(r-x)^2}{rr_1x^2},$$

$$v-v_1=\frac{ay(r-x)}{x}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right);$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$u_2=\frac{uv_1-vu_1}{v-v_1},\quad v_2=0$$

ist:

$$u_2=x-\frac{\frac{x-e}{r}-\frac{x+e}{r_1}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}-\frac{2ea(r-x)}{rr_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)x},$$

oder, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet:

$$u_2 = e\left\{\frac{r_1+r}{r_1-r}+\frac{2a(\mathfrak{x}-x)}{(r_1-r)x}\right\},\quad v_2=0.$$

Ist nun der in der Normale bis jetzt beliebig angenommene Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ der Mittelpunkt des dem Punkte (xy) der Ellipse entsprechenden Krümmungskreises, so ist, wie man mittelst der aus der allgemeinen Theorie des Krümmungskreises bekannten Formeln leicht findet:

$$\mathfrak{x}-x=-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)x}{a^4b^2},\quad \mathfrak{y}-y=-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4};$$

und folglich, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet, weil

$$\varrho^2=(\mathfrak{x}-x)^2+(\mathfrak{y}-y)^2$$

ist:

$$\varrho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Nach dem Obigen ist also:

$$u_2=e\left\{\frac{r_1+r}{r_1-r}-\frac{2a}{r_1-r}\cdot\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^2}\right\},$$

folglich, weil

$$r=a-\frac{ex}{a},\quad r_1=a+\frac{ex}{a}$$

und daher

$$r_1+r=2a,\quad r_1-r=\frac{2ex}{a}$$

ist:

$$u_2=\frac{a^2}{x}\cdot\frac{a^4b^2-(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}.$$

Setzt man nun hierin

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

so erhält man:

$$u_2=\frac{(a^2-b^2)x}{a^2}=\frac{e^2x}{a^2},\quad v_2=0.$$

Die Gleichung der Normale ist nach dem Obigen:

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x);$$

und sind also u_2', v_2' die Coordinaten des Durchschnittspunkts derselben mit der Hauptaxe der Ellipse, so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$v_2'-y=\frac{a^2y}{b^2x}(u_2'-x),\quad v_2'=0;$$

woraus sich

$$u_2'=\frac{(a^2-b^2)x}{a^2}=\frac{e^2x}{a^2},\quad v_2'=0$$

ergiebt. Also ist nach dem Obigen:

$$u_2=u_2',\quad v_2=v_2',$$

und die beiden Punkte (u_2v_2) und $(u_2'v_2')$ fallen also zusammen.

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende merkwürdige Satz:

Wenn man von dem Mittelpunkte des einem gewissen Punkte der Ellipse entsprechenden Krümmungskreises auf die beiden, demselben Punkte entsprechenden Vectoren Senkrechte fällt, und durch deren Fusspunkte eine Gerade zieht; so schneiden diese Gerade, die dem in Rede stehenden Punkte entsprechende Normale und die Hauptaxe der Ellipse sich in einem und demselben Punkte.

Für die Hyperbel ist:

$$u=x\mp\frac{a(x-e)(\mathfrak{r}-x)}{rx},\quad u_1=x\pm\frac{a(x+e)(\mathfrak{r}-x)}{r_1x};$$

$$v=y\mp\frac{ay(\mathfrak{r}-x)}{rx},\quad v_1=y\pm\frac{ay(\mathfrak{r}-x)}{r_1x};$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist. Also ist:

$$uv_1-vu_1=\pm ay(\mathfrak{r}-x)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\mp\frac{ay(\mathfrak{r}-x)}{x}\left\{\frac{x-e}{r}+\frac{x+e}{r_1}\right\}$$

$$+\frac{2ea^2y(\mathfrak{r}-x)^2}{rr_1x^2},$$

$$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1=\mp\frac{ay(\mathfrak{r}-x)}{x}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right);$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$u_2 = -\frac{uv_1 - vu_1}{v - v_1}, \quad v_2 = 0$$

ist:

$$u_2 = x - \frac{\frac{x-e}{r} + \frac{x+e}{r_1}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}} \pm \frac{2a(\mathfrak{x}-x)}{rr_1\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)x},$$

oder, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet:

$$u_2 = e\left\{\frac{r_1 - r}{r_1 + r} \pm \frac{2a(\mathfrak{x}-x)}{(r_1+r)x}\right\}, \quad v_2 = 0.$$

Ist nun wieder der in der Normale bis jetzt beliebig angenommene Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ der Mittelpunkt des dem Punkte (xy) der Hyperbel entsprechenden Krümmungskreises, so ist, wie man mittelst der aus der allgemeinen Theorie des Krümmungskreises bekannten Formeln leicht findet:

$$\mathfrak{x} - x = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{a^4b^2}, \quad \mathfrak{y} - y = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4};$$

und folglich, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet, weil

$$\varrho^2 = (\mathfrak{x}-x)^2 + (\mathfrak{y}-y)^2$$

ist:

$$\varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Nach dem Obigen ist also

$$u_2 = e\left\{\frac{r_1 - r}{r_1 + r} \pm \frac{2a}{r_1 + r} \cdot \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4b^2}\right\},$$

folglich, weil, immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie oben,

$$r = \mp\left(a - \frac{ex}{a}\right), \quad r_1 = \pm\left(a + \frac{ex}{a}\right)$$

und daher

$$r_1 - r = \pm 2a, \quad r_1 + r = \pm\frac{2ex}{a}$$

ist:

$$u_2 = \frac{a^2}{x} + \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)}{a^2b^2}$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{y}{x-e}(u-x)+\frac{x-e}{y}(u-\mathfrak{x}),$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{y}{x+e}(u_1-x)+\frac{x+e}{y}(u_1-\mathfrak{x});$$

also:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}u-\left\{\frac{xy}{x-e}+\frac{(x-e)\mathfrak{x}}{y}\right\},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}u_1-\left\{\frac{xy}{x+e}+\frac{(x+e)\mathfrak{x}}{y}\right\};$$

ferner:

$$[illegible] \frac{[illegible]+y^2}{[illegible]e)y}x-\left\{\frac{xy}{x-e}+\frac{(x-e)\mathfrak{x}}{y}\right\},$$

$$[illegible] y=[illegible] (u_1-x)+\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}x-\left\{\frac{xy}{x+e}+\frac{(x+e)\mathfrak{x}}{y}\right\};$$

[illegible]:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x-e)^2+y^2}{(x-e)y}(u-x)+\frac{(x-e)(x-\mathfrak{x})}{y},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{(x+e)^2+y^2}{(x+e)y}(u_1-x)+\frac{(x+e)(x-\mathfrak{x})}{y};$$

folglich, weil

$$r^2=(x-e)^2+y^2,\quad r_1{}^2=(x+e)^2+y^2$$

ist:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{r^2}{(x-e)y}(u-x)-\frac{(x-e)(\mathfrak{x}-x)}{y},$$

$$\mathfrak{y}-y=\frac{r_1^2}{(x+e)y}(u_1-x)-\frac{(x+e)(\mathfrak{x}-x)}{y};$$

woraus sogleich

$$u-x=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)\}(x-e)}{r^2},$$

$$u_1-x=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)\}(x+e)}{r_1^2};$$

und daher ferner nach dem Obigen

$$v-y=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x-e)(\mathfrak{x}-x)\}y}{r^2},$$

$$v_1-y=\frac{\{y(\mathfrak{y}-y)+(x+e)(\mathfrak{x}-x)\}y}{r_1^2}.$$

unmittelbar zu der folgenden, äusserst merkwürdigen und einfachen, von Herrn Lamarle auf ganz anderem Wege gefundenen Construction des Krümmungsmittelpunkts bei der Ellipse und Hyperbel führt:

In Taf. VI. Fig. 1. sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse oder Hyperbel, und F, F_1 seien die beiden Brennpunkte, so dass also FF_1 die Hauptaxe ist. Bei der Ellipse halbire man den Winkel FPF_1, bei der Hyperbel den Nebenwinkel von FPF_1 durch die Linie PN, welche die Hauptaxe FF_1 in dem Punkte N schneidet. Durch den Punkt N errichte man auf PN ein Perpendikel, welches die beiden Vectoren PF und PF_1 oder deren Verlängerungen respective in M und M_1 schneidet. In M und M_1 errichte man auf die Vectoren PF und PF_1 Perpendikel, welche die gehörig verlängerte Linie PN in dem gemeinschaftlichen Punkte O schneiden. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des dem Punkte P der Ellipse oder Hyperbel entsprechenden Krümmungskreises der betreffenden Curve, und also OP der Krümmungshalbmesser.

Dass man, um den Mittelpunkt O des Krümmungskreises zu erhalten, eigentlich in N auf PN bloss das Perpendikel MN, und in M auf PF das Perpendikel MO zu errichten braucht, versteht sich von selbst; das obige Verfahren bei Ausführung der Construction bietet aber in dem genauen Zusammentreffen der beiden in M und M_1 auf die Vectoren errichteten Perpendikel in demselben Punkte O der Linie PN zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit und Genauigkeit der ausgeführten Zeichnung dar.

Dass diese Construction auch ein leichtes Mittel an die Hand giebt, den geometrischen Ort aller Krümmungsmittelpunkte mit beliebiger Genauigkeit zu zeichnen, versteht sich von selbst.

Aus den von mir im Obigen entwickelten Formeln und Gleichungen, welche zu der vorstehenden einfachen Construction des Krümmungsmittelpunkts geführt haben, lassen sich noch verschiedene bemerkenswerthe Folgerungen ziehen; um jedoch diesem Aufsatze nicht eine zu grosse Ausdehnung zu geben, will ich aus denselben nur noch einige Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser ϱ ableiten, die zum Theil auch schon von Herrn Lamarle gefunden worden sind.

Bekanntlich ist bei der Ellipse und Hyperbel:

$$\varrho^2 = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^3}{a^8b^8}.$$

Nimmt man aber im Folgenden die oberen Zeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel, so ist

$$y^2=\pm\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

also, wie man leicht findet:

$$a^4y^2+b^4x^2=\pm b^2\{a^4-(a^2\mp b^2)x^2\}=\pm b^2(a^4-e^2x^2)$$

oder

$$a^4y^2+b^4x^2=\pm a^2b^2\left(a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}\right).$$

Für die Ellipse ist nach dem Obigen:

$$a-\frac{ex}{a}=r,\quad a+\frac{ex}{a}=r_1;$$

also:

$$a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}=rr_1;$$

und für die Hyperbel ist:

$$a-\frac{ex}{a}=\mp r,\quad a+\frac{ex}{a}=\mp r_1,$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist, also allgemein:

$$a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}=-rr_1.$$

Folglich ist nach dem Obigen für die Ellipse und Hyperbel:

$$a^4y^2+b^4x^2=a^2b^2rr_1$$

und daher

$$\varrho=\sqrt{\frac{r^3r_1^3}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{(rr_1)^3}{(ab)^2}},$$

oder

$$\varrho=\frac{(rr_1)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{rr_1\sqrt{rr_1}}{ab}.$$

Bei der Ellipse ist:

$$2a=r+r_1,\quad a^2-b^2=e^2;$$

also

$$4b^2=4a^2-4e^2=(r+r_1+2e)(r+r_1-2e),$$

und folglich:

$$\varrho=\frac{4rr_1\sqrt{rr_1}}{(r+r_1)\sqrt{(r+r_1+2e)(r+r_1-2e)}}.$$

Bei der Hyperbel ist:

$$2a=\pm(r_1-r),\quad a^2+b^2=e^2,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist; also ist:

$$4b^2=4e^2-4a^2=\{2e\pm(r_1-r)\}\{2e\mp(r_1-r)\}$$
$$=(2e\mp r\pm r_1)(2e\pm r\mp r_1),$$

und folglich:

$$\varrho=\pm\frac{4rr_1\sqrt{rr_1}}{(r_1-r)\sqrt{(2e\mp r\pm r_1)(2e\pm r\mp r_1)}},$$

immer die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem x positiv oder negativ ist, wobei man sich stets zu erinnern hat, dass oben dem Brennpunkte F die positive Abscisse e beigelegt worden ist.

Bezeichnen wir den von der Normale mit den beiden Vectoren eingeschlossenen spitzen Winkel durch θ, so ist nach dem Obigen für die Ellipse:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\left\{\frac{\frac{a^2y}{b^2x}-\frac{y}{x\mp e}}{1+\frac{a^2y}{b^2x}\cdot\frac{y}{x\mp e}}\right\}^2=y^2\cdot\left\{\frac{a^2(x\mp e)-b^2x}{b^2x(x\mp e)+a^2y^2}\right\}^2$$

$$=y^2\cdot\left\{\frac{(a^2-b^2)x\mp a^2e}{b^2x^2+a^2y^2\mp b^2ex}\right\}^2=\frac{e^2y^2}{b^4}\cdot\left\{\frac{ex\mp a^2}{a^2\mp ex}\right\}^2,$$

also:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\frac{e^2y^2}{b^4},$$

und hieraus:

$$\cos\theta^2=\frac{1}{1+\operatorname{tang}\theta^2}=\frac{b^4}{b^4+e^2y^2},$$

folglich, weil

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

ist:

$$b^4+e^2y^2=b^4+\frac{b^2}{a^2}(a^2-b^2)(a^2-x^2)=b^2\left(a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}\right),$$

also:

$$\cos\theta^2 = \frac{b^2}{a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}},$$

oder, weil bei der Ellipse

$$a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2} = rr_1$$

ist:

$$\cos\theta^2 = \frac{b^2}{rr_1},\quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{rr_1}},\quad b = \cos\theta\sqrt{rr_1}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\varrho = \frac{rr_1\sqrt{rr_1}}{ab} \text{ und } 2a = r + r_1$$

ist, so ist

$$\varrho = \frac{2rr_1}{(r+r_1)\cos\theta},$$

welche Formel schon Herr Lamarle gefunden hat.

Bezeichnen wir die Normale, d. h. das zwischen dem Punkte (xy) und der Hauptaxe liegende Stück der als eine Linie von unbestimmter Länge gedachten Normale, durch N; so ist, weil nach dem Obigen $\frac{e^2x}{a^2}$, 0 die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Normale mit der Hauptaxe sind:

$$N^2 = (x - \frac{e^2x}{a^2})^2 + y^2 = x^2(1 - \frac{e^2}{a^2})^2 + y^2,$$

also, wie man leicht findet:

$$N^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4} = \frac{b^2}{a^2}rr_1$$

oder:

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{rr_1};$$

und weil nun nach dem Obigen:

$$a = \frac{rr_1}{\varrho\cos\theta},\quad b = \cos\theta\sqrt{rr_1},\quad \frac{b}{a} = \frac{\varrho\cos\theta^2}{\sqrt{rr_1}}$$

ist; so ist

$$N = \varrho\cos\theta^2.$$

Aehnliche Relationen würden sich noch mehrere finden lassen.

Für die Hyperbel ist eben so wie vorher:

$$\tang \theta^2 = \frac{e^2 y^2}{b^4}, \quad \cos\theta^2 = \frac{b^4}{b^4 + e^2 y^2};$$

und folglich, weil

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

ist:

$$b^4 + e^2 y^2 = b^4 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2)(x^2 - a^2) = -b^2\left(a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2}\right),$$

also:

$$\cos\theta^2 = -\frac{b^2}{a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2}},$$

oder, weil bei der Hyperbel, wenn man, jenachdem x positiv oder negativ ist, die oberen oder unteren Zeichen nimmt,

$$a - \frac{ex}{a} = \mp r, \quad a + \frac{ex}{a} = \pm r_1$$

und folglich immer

$$a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2} = -rr_1$$

ist:

$$\cos\theta^2 = \frac{b^2}{rr_1}, \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{rr_1}}, \quad b = \cos\theta\sqrt{rr_1}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\varrho = \frac{rr_1\sqrt{rr_1}}{ab} \text{ und } 2a = \mp(r - r_1)$$

ist, so ist

$$\varrho = \mp\frac{2rr_1}{(r - r_1)\cos\theta} = \pm\frac{2rr_1}{(r_1 - r)\cos\theta},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher.

Ganz wie vorher bei der Ellipse erhält man

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{rr_1},$$

und weil nun nach vorstehenden Formeln

$$a=\frac{rr_1}{\varrho\cos\theta},\quad b=\cos\theta\sqrt{rr_1},\quad \frac{b}{a}=\frac{\varrho\cos\theta^2}{\sqrt{rr_1}}$$

ist, so ist auch bei der Hyperbel:

$$N=\varrho\cos\theta^2.$$

Wir wollen nun zur Betrachtung der Parabel übergehen, deren Gleichung

$$y^2=px$$

ist, woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{p}{2y},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{p^2}{4y^3}$$

folgt. Also ist die Gleichung der dem Punkte (xy) der Parabel entsprechenden Normale derselben:

$$Y-y=-\frac{2y}{p}(X-x),$$

und die Gleichung des demselben Punkte entsprechenden Vectors ist:

$$Y-y=\frac{y}{x-\frac{1}{4}p}(X-x)=\frac{4y}{4x-p}(X-x).$$

Nun sei wieder $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ ein beliebiger Punkt der Normale, so dass also

$$\mathfrak{y}-y=-\frac{2y}{p}(\mathfrak{x}-x)$$

ist. Fällt man von diesem Punkte auf den Vector ein Perpendikel, so ist dessen Gleichung:

$$Y-\mathfrak{y}=-\frac{4x-p}{4y}(X-\mathfrak{x});$$

und sind also u, v die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit dem Vector, so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$v-y=\frac{4y}{4x-p}(u-x),\quad v-\mathfrak{y}=-\frac{4x-p}{4y}(u-\mathfrak{x}).$$

Die Gleichung des von dem Punkte (uv) auf die Normale gefällten Perpendikels ist:

$$Y-v=\frac{p}{2y}(X-u);$$

und sind u_2, v_2 die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit der Axe der Parabel, so ist:

$$v_2 - v = \frac{p}{2y}(u_2 - u), \quad v_2 = 0;$$

woraus

$$u_2 = \frac{pu - 2yv}{p}, \quad v_2 = 0$$

folgt.

Es kommt nun zunächst darauf an, mittelst der vorher zu diesem Zweck gefundenen Gleichungen die Coordinaten u, v zu bestimmen. Durch Subtraction der obigen Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y} - y &= \frac{4y}{4x-p}(u-x) + \frac{4x-p}{4y}(u-\mathfrak{x}) \\
&= \left(\frac{4y}{4x-p} + \frac{4x-p}{4y}\right)u - \left\{\frac{4xy}{4x-p} + \frac{(4x-p)\mathfrak{x}}{4y}\right\} \\
&= \frac{(4x-p)^2 + 16y^2}{4(4x-p)y}u - \left\{\frac{4xy}{4x-p} + \frac{(4x-p)\mathfrak{x}}{4y}\right\} \\
&= \frac{(4x-p)^2 + 16y^2}{4(4x-p)y}(u-x) - \frac{(4x-p)(\mathfrak{x}-x)}{4y}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber, wie man leicht findet, wenn man $y^2 = px$ setzt:

$$(4x-p)^2 + 16y^2 = 16(x + \tfrac{1}{4}p)^2 = 16r^2,$$

wenn r den, dem Punkte (xy) entsprechenden Vector der Parabel bezeichnet; also:

$$\mathfrak{y} - y = \frac{4r^2}{(4x-p)y}(u-x) - \frac{(4x-p)(\mathfrak{x}-x)}{4y},$$

woraus

$$u - x = \frac{(4x-p)\{(4x-p)(\mathfrak{x}-x) + 4y(\mathfrak{y}-y)\}}{16r^2}$$

folgt. Nach dem Obigen ist

$$\mathfrak{y} - y = -\frac{2y}{p}(\mathfrak{x}-x),$$

also, wie man leicht findet:

$$(4x-p)(\mathfrak{x}-x) + 4y(\mathfrak{y}-y) = -4(x + \tfrac{1}{4}p)(\mathfrak{x}-x) = -4r(\mathfrak{x}-x),$$

und folglich:

$$u-x=-\frac{(4x-p)(\mathfrak{x}-x)}{4\mathfrak{r}}=-\frac{(x-\frac{1}{4}p)(\mathfrak{x}-x)}{\mathfrak{r}},$$

$$v-y=-\frac{y(\mathfrak{x}-x)}{\mathfrak{r}};$$

oder:

$$u=x-\frac{(x-\frac{1}{4}p)(\mathfrak{x}-x)}{\mathfrak{r}},\quad v=y-\frac{y(\mathfrak{x}-x)}{\mathfrak{r}}.$$

Also ist, wie man leicht findet, wenn man $y^2=px$ setzt:

$$pu-2yv=-px+\frac{p(x+\frac{1}{4}p)(\mathfrak{x}-x)}{\mathfrak{r}}=-px+p(\mathfrak{x}-x),$$

also:

$$pu-2yv=p(\mathfrak{x}-2x),$$

und folglich nach dem Obigen:

$$u_2=\mathfrak{x}-2x,\quad v_2=0.$$

Ist nun der bis jetzt willkührlich in der Normale angenommene Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ der Mittelpunkt des dem Punkte (xy) entsprechenden Krümmungskreises der Parabel, so ist, wie man mittelst der allgemeinen Formeln der Theorie des Krümmungskreises leicht findet:

$$\mathfrak{x}=3x+\tfrac{1}{2}p,\quad \mathfrak{y}=-\frac{4xy}{p};$$

also nach dem Obigen unter dieser Voraussetzung:

$$u_2=x+\tfrac{1}{2}p,\quad v_2=0.$$

Sind nun u_2', v_2' die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Normale mit der Axe der Parabel, so hat man nach dem Obigen zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$v_2'-y=-\frac{2y}{p}(u_2'-x),\quad v_2'=0;$$

woraus sich

$$u_2'=x+\tfrac{1}{2}p,\quad v_2'=0;$$

also $u_2=u_2'$, $v_2=v_2'$ ergiebt, so dass also die beiden Punkte (u_2v_2) und $(u_2'v_2')$ mit einander zusammenfallen, und sich nun wieder der folgende Satz ergiebt:

Wenn man von dem Mittelpunkte des einem gewissen Punkte der Parabel entsprechenden Krümmungskreises auf den, demselben Punkte entsprechenden

$$\cos\theta^2 = \frac{p}{4r}, \quad a = 4r\sqrt{\frac{r}{p}}; \quad \text{also } \varrho\cos\theta^2 = p\sqrt{\frac{r}{p}} = \sqrt{pr},$$

folglich: $N = \varrho\cos\theta^2$, wie bei der Ellipse und Hyperbel.

Ich habe in dieser Abhandlung die vorhergehenden merkwürdigen Sätze und Constructionen sämmtlich auf dem Wege der Analysis entwickelt; die eigenthümliche Methode des Herrn Lamarle führt freilich viel einfacher, ja in der That auf überraschend einfache Weise, zu denselben, was mich veranlasst, nochmals auf die oben näher bezeichnete Abhandlung dieses scharfsinnigen Mathematikers aufmerksam zu machen. Freilich führt die analytische Methode — und das ist eben das, was derselben in allen Fällen einen so grossen Werth verleihet, — zugleich noch zu einer grossen Anzahl anderer merkwürdiger Relationen und Gleichungen, die zu weiteren Folgerungen Veranlassung geben können, was, wie aus dem Obigen ersichtlich ist, namentlich auch bei diesem Gegenstande der Fall ist. Jedenfalls hoffe ich noch auf denselben zurückzukommen.

XXXIII.

Untersuchung der Evoluten der Cykloiden.

(Ohne Anwendung der Differential-Rechnung.)

Von

Herrn *Rudolph Lang*,

Hörer der Technik in Brünn.

---

§. 1. Die Lage der Normallinie.

Es sei *CD* (Taf. VI. Fig. 3.) die Leitlinie, *OA* der Halbmesser des Wälzungs-, *OB* der des erzeugenden Kreises. Es lege der Mittelpunkt den unendlich kleinen Weg OO_1 zurück, so beschreibt

$$\tang\theta^2=\frac{4y^2}{p^2}=\frac{4x}{p}, \quad \tang\theta=2\sqrt{\frac{x}{p}}$$

erhält; und weil nun

$$\cos\theta^2=\frac{1}{1+\tang\theta^2}$$

ist, so ist:

$$\cos\theta^2=\frac{p}{4x+p}=\frac{p}{4(x+\frac{1}{4}p)}=\frac{p}{4r},$$

folglich:

$$\cos\theta=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{r}}.$$

Also ist

$$\sqrt{\frac{r}{p}}=\frac{1}{2\cos\theta},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\varrho=\frac{2r}{\cos\theta}=2r\sec\theta;$$

folglich

$$\varrho\cos\theta=2r,$$

was zu dem folgenden Satze führt:

In der Parabel ist die Projection des Krümmungshalbmessers auf dem Vector dem doppelten Vector gleich.

Also ist in Taf. VI. Fig. 2. immer $MF=PF$, und bei der Construction des Krümmungsmittelpunkts kann man sich daher auch auf folgende sehr einfache Weise verhalten:

Man verlängere den Vector PF über den Brennpunkt F hinaus, mache die Verlängerung FM gleich dem Vector PF und errichte in M auf den Vector ein Perpendikel MO; so ist der Durchschnittspunkt O dieses Perpendikels mit der gehörig verlängerten Normale PN der gesuchte Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Bezeichnen wir die Normale wie früher durch N, so ist nach dem Obigen:

$$N^2=\{(x+\tfrac{1}{2}p)-x\}^2+y^2=\tfrac{1}{4}p^2+y^2=p(x+\tfrac{1}{4}p),$$

also

$$N^2=pr, \quad N=\sqrt{pr}.$$

Nach dem Obigen ist nun:

wollen wir aber im Folgenden die Leitlinie immer als gerade Linie voraussetzen.

§. 2. Fortsetzung.

Es sei B (Taf. VI. Fig. 3.) derjenige Punkt der Cykloide, welcher dem Wälzungswinkel φ, und B_1 derjenige, welcher dem Wälzungswinkel $\varphi+\varepsilon$ *) entspricht; so sind BF und B_1F_1 die zu diesen Punkten gehörigen Normalen, welche sich verlängert im Punkte T schneiden.

Im Dreiecke TFF_1 ist:

$$\cos\alpha = \sin BFO = \frac{r\sin\varphi}{n},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - r^2\sin^2\varphi} = \frac{r_1 - r\cos\varphi}{n},$$

$$\cos\beta = -\sin B_1F_1O_1 = -\frac{B_1O_1.\sin(\varphi+\varepsilon)}{B_1F_1},$$

$$\sin\beta = \frac{1}{B_1F_1}\sqrt{\overline{B_1F_1}^2 - \overline{B_1O_1}^2.\sin^2(\varphi+\varepsilon)} = \frac{r_1 - r\cos(\varphi+\varepsilon)}{B_1F_1},$$

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{[r_1 - r\cos(\varphi+\varepsilon)]r\sin\varphi - (r_1 - r\cos\varphi)r\sin(\varphi+\varepsilon)}{n.B_1F_1},$$

$$FT = \sigma = r_1\varepsilon\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{nr_1}{r}.\frac{[r_1 - r\cos(\varphi+\varepsilon)]\varepsilon}{[r_1 - r\cos(\varphi+\varepsilon)]\sin\varphi - (r_1 - r\cos\varphi)\sin(\varphi+\varepsilon)},$$

$$\sigma = \frac{nr_1}{r}.\frac{[r_1 - r\cos(\varphi+\varepsilon)]\varepsilon}{r\sin\varepsilon + r_1[\sin\varphi - \sin(\varphi+\varepsilon)]}.$$

Wollen wir blos noch die Glieder mit ε^2 als Summanden beibehalten, so haben wir im Zähler zu setzen:

$$\cos(\varphi+\varepsilon) = \cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon = \cos\varphi.(1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2}) - \sin\varphi.\varepsilon$$

$$= \cos\varphi - \sin\varphi.\varepsilon - \frac{\cos\varphi}{2}\varepsilon^2,$$

und im Nenner:

$$\sin(\varphi+\varepsilon) = \sin\varphi\cos\varepsilon + \cos\varphi\sin\varepsilon = \sin\varphi.(1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2}) + \cos\varphi.(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3})$$

$$= \sin\varphi + \cos\varphi.\varepsilon - \frac{\sin\varphi}{2}\varepsilon^2 - \frac{\cos\varphi}{6}\varepsilon^3.$$

---

*) Durchgehends verstehe ich unter ε eine unendlich kleine Grösse.

Dadurch erhält man:

$$\sigma = \frac{nr_1}{r} \cdot \frac{6(r_1 - r\cos\varphi) + 6r\sin\varphi.\varepsilon + 3r\cos\varphi.\varepsilon^2}{6(r - r_1\cos\varphi) + 3r_1\sin\varphi.\varepsilon - (r - r_1\cos\varphi)\varepsilon^2}.$$

Entwickeln wir diesen Quozienten bis zu dem Gliede mit ε^2, so erhalten wir:

$$\sigma = \frac{nr_1}{r}\Big\{\frac{r_1 - r\cos\varphi}{r - r_1\cos\varphi} + \frac{2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi}{2(r - r_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.\varepsilon$$

$$+ \frac{1}{12(r - r_1\cos\varphi)^3}[r_1(3r_1^2 - 4r^2) - r(r_1^2 - 4r^2)\cos\varphi$$

$$- r_1(r_1^2 + 2r^2)\cos^2\varphi + rr_1^2\cos^3\varphi]\varepsilon^2\Big\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dabei bedeutet streng nach unserer Figur σ dasjenige (unterhalb der Abscissenaxe liegende) Stück der dem Wälzungswinkel φ entsprechenden Normallinie, welches zwischen dem Durchschnittspunkte F derselben mit der Abscissenaxe, und dem T mit einer zweiten Normallinie, welche einem Punkte B_1 entspricht, dessen Wälzungswinkel von dem des zu untersuchenden (fixen) Punktes unendlich wenig verschieden, aber grösser ist als dieser, liegt. Dabei wurde die oberhalb der Abscissenaxe liegende Normale positiv vorausgesetzt.

Bezeichnen wir BT mit v, so ist in unserer Figur $\sigma = v - n$. Da v unendlich wenig vom Krümmungshalbmesser (ϱ) des Punktes B verschieden ist (und für $\varepsilon = 0$ in ϱ selbst übergeht), so ist klar, dass der Krümmungsmittelpunkt gleichzeitig mit dem Punkte T ober- oder unterhalb der Abscissenaxe liegt.

Auf das Zeichen von $\{\ldots\}$ übt blos das erste Glied einen Einfluss aus, da die übrigen unendlich klein sind. Da dieses negativ wird für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$, welche Bedingung übrigens nur bei der verkürzten Cykloide erfüllt werden kann (wo nämlich $\frac{r}{r_1} < 1$ ist), da ferner, wie wir unter §. 1. gesehen haben, bei der verkürzten Cykloide die Normale immer positiv ist, so wird in diesem Falle σ negativ. Es liegt also bei der verkürzten Cykloide für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$ der Krümmungsmittelpunkt oberhalb der Abscissenaxe.

Bei der verschlungenen Cykloide wird $\{\ldots\}$ für $\varphi < \arccos\frac{r_1}{r}$ negativ. Da aber in diesem Falle auch n negativ ist, so bleibt

σ positiv. Somit liegt die Evolute ihrer ganzen Ausdehnung nach unterhalb der Abscissenaxe.

Für $\varepsilon = 0$ wird

$$\sigma_0 = \varrho - n = n \frac{r_1^2 - rr_1 \cos\varphi}{r^2 - rr_1 \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daraus folgt:

$$\varrho = \frac{n^3}{r^2 - rr_1 \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bei der verkürzten Cykloide wird, wie wir gesehen haben, σ_0 für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$ negativ. Da aber dabei σ_0 absolut genommen gleich ist $\varrho + n$, so folgt:

$$\sigma_0 = -(\varrho + n) = n \frac{r_1^2 - rr_1 \cos\varphi}{r^2 - rr_1 \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (3^*)$$

Daraus ergibt sich:

$$\varrho = -\frac{n^2}{r^2 - rr_1 \cos\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^*)$$

also derselbe absolute Werth für den Krümmungshalbmesser wie früher.

Ebenso ist für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$: $\sigma = -(v + n)$.

Der Gleichung (3) oder (3*) kann man auch die Form geben:

$$\sigma_0 = n \frac{\frac{r_1^2}{r} - r_1 \cos\varphi}{r - r_1 \cos\varphi},$$

mittelst welcher sich leicht der Krümmungshalbmesser für jeden beliebigen Punkt der Cykloide konstruiren lässt.

§. 3. Die Gleichungen der Evolute.

Wir betrachten die Leitlinie AX (Taf. VI. Fig. 4.) als Abscissenaxe und legen die Ordinatenaxe AY durch denjenigen Punkt der Cykloide, welcher dem Wälzungswinkel 0 entspricht. Es sei B ein Punkt der Cykloide und BM der zu demselben gehörige Krümmungshalbmesser. Bezeichnen wir mit α und β die Coordinaten des Punktes M der Evolute, so ist:

$$AP = \alpha = r_1\varphi + \sigma_0 \sin\psi \quad \text{und} \quad -MP = \beta = -\sigma_0 \cos\psi.$$

Nun ist aber:

$$\sin\psi = \frac{r\sin\varphi}{n}, \quad \text{also} \quad \cos\psi = \frac{r_1 - r\cos\varphi}{n}.$$

Substituiren wir diese Werthe, so erhalten wir:

$$\alpha = r_1\varphi + \frac{r_1^2 - rr_1\cos\varphi}{r - r_1\cos\varphi}\sin\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\beta = -\frac{r_1}{r}\cdot\frac{(r_1 - r\cos\varphi)^2}{r - r_1\cos\varphi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese beiden Gleichungen bilden die Gleichungen der Evolute. Wollte man daraus den Winkel φ eliminiren, um so eine einzige Gleichung zwischen den laufenden Coordinaten der Curve zu erhalten, so würde diese sehr komplizirt ausfallen und wäre zur weiteren Untersuchung absolut unbrauchbar.

§. 4. Ein Stück Theorie.

Es sei UV (Taf. VI. Fig. 5., 6., 7., 8.) ein Stück einer stetigen Curve, AM der Krümmungshalbmesser im Punkte A, und es sei zu untersuchen, ob die Evolute des Curvenelementes, in welchem A liegt, auf der rechten oder linken Seite der Normallinie NN_1 liegt. Es sei A_1 ein zweiter Punkt der UV, dessen Abscisse unendlich wenig von der des Punktes A verschieden, aber grösser ist als diese, und T der Durchschnittspunkt der durch diesen Punkt gezogenen Normallinie mit der NN_1. Setzen wir $AT = v$ und $AM = \varrho$, so kann man aus der Anschauung der Figuren folgendes Gesetz ableiten:

Ist $v - \varrho$ negativ, so ist die Evolute auf der rechten (Taf. VI. Fig. 5., 6.), ist $v - \varrho$ positiv, auf der linken Seite der Normallinie (Taf. VI. Fig. 7., 8.). Ist die Abscisse des Nachbarpunktes A_1 kleiner als die des Punktes A, so gelten hinsichtlich des Zeichens der Differenz $v - \varrho$ die entgegengesetzten Regeln.

Ist das Zeichen von $v - \varrho$ unabhängig vom Zeichen der Aenderung der Abscisse des Punktes, so hat die Evolute eine Spitze (Taf. VI. Fig. 9., 10.), welche von der Evolvente abgewendet oder ihr zugekehrt ist, je nachdem $v - \varrho$ negativ oder positiv ist.

Liegt die Evolute rechts von der Normallinie, so gelten ferner folgende Regeln:

Ist der Winkel α, den die Normallinie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet, kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (Taf. VI. Fig. 11., 12.),

so ist die Evolute concav oder convex gegen die Abscissenaxe, je nachdem sie ober- oder unterhalb derselben liegt. Ist hingegen der besagte Winkel grösser als $\frac{\pi}{2}$ (Taf. VI. Fig. 13., 14.), so ist die Evolute convex oder concav gegen die Abscissenaxe, je nachdem sie ober- oder unterhalb derselben liegt.

Liegt die Evolute links von der Normallinie, so gelten die entgegengesetzten Regeln.

§. 5. Die Evolute der verkürzten Cykloide.

Nach (6) ist die dem Wälzungswinkel φ entsprechende Ordinate der Evolute:

$$\beta = -\frac{r_1}{r} \cdot \frac{(r_1 - r\cos\varphi)^2}{r - r_1\cos\varphi}.$$

Wie man sieht, ist diese positiv für $\cos\varphi > \frac{r}{r_1}$, also für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$, und negativ für $\varphi > \arccos\frac{r}{r_1}$. Für $\varphi = \arccos\frac{r}{r_1}$ wird $\beta = \infty$. Da für diesen Werth des Wälzungswinkels nach (4*) auch $\varrho = \infty$ wird, also der Krümmungsmittelpunkt, in welchem die Normallinie der Evolvente die Evolute berührt, in unendlicher Entfernung liegt, so muss hier nothwendig die Normallinie eine Asymptote der Evolute bilden. Es ist dieses nämlich jener Winkel, welcher dem Wendungspunkte der Cykloide entspricht. Für diesen Punkt wird $n = \sqrt{r_1^2 - r^2}$, woraus ersichtlich ist, dass die Normallinie auf dem erzeugenden Halbmesser senkrecht steht, also Tangente ist an den erzeugenden Kreis.

Wir wollen nun die Gestalt der Evolute näher untersuchen und dabei blos die Werthe des Wälzungswinkels zwischen 0 und π in's Auge fassen.

Da unter dieser Bedingung bei der verkürzten Cykloide die Abscissen ihrer einzelnen Punkte mit dem Zu- oder Abnehmen des Wälzungswinkels gleichzeitig zu- oder abnehmen, so gilt das, was unter §. 4. vom Grösser- oder Kleinerwerden der Abscisse gesagt wurde, in unserm Falle auch unbeschränkt von dem des Wälzungswinkels.

Demnach haben wir für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$:

$$v - \varrho = (v + n) - (\varrho + n) = -\sigma + \sigma_0 = -n\frac{r_1(2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi)}{2r(r^2 - rr_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.\varepsilon,$$

Und für $\varphi > \arccos\frac{r}{r_1}$:

$$v-\varrho=(v-n)-(\varrho-n)=\sigma-\sigma_0=n\frac{r_1(2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi)}{2r(r^2-rr_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.\varepsilon.$$

Also, wenn wir diese beiden Fälle zusammenfassen:

$$v-\varrho=\begin{cases}-n\dfrac{r_1(2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi)}{2r(r^2-rr_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.\varepsilon, & \text{für } \varphi<\arccos\dfrac{r}{r_1};\\ +n\dfrac{r_1(2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi)}{2r(r^2-rr_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.\varepsilon, & \text{für } \varphi>\arccos\dfrac{r}{r_1}.\end{cases} \qquad (7)$$

Da es drei Werthe gibt, welche, statt φ substituirt, diese Ausdrücke auf 0 bringen, nämlich 0, $\arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$ und π, so kann die Evolute drei verschiedene Arten von Spitzen haben. Nun ist aber

$$\frac{r}{r_1}-\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}=\frac{r_1^2-r^2}{rr_1}>0,\ \text{somit}\ \arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}>\arccos\frac{r}{r_1}.$$

Es wird also die Spitze für $\varphi=\arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$, welche wir die Mittelspitze nennen wollen, dort, wo sie vorkommt, immer unterhalb der Abscissenaxe liegen. Ebenso die Spitze für $\varphi=\pi$, während die Spitze für $\varphi=0$ oberhalb der Abscissenaxe liegt. Demzufolge ist für $\varphi=(\arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}, \pi)$:

$$v-\varrho=(v-n)-(\varrho-n)=\sigma-\sigma_0=+\frac{nr_1}{12r(r-r_1\cos\varphi)^3}z.\varepsilon^2,$$

und für $\varphi=0$:

$$v-\varrho=(v+n)-(\varrho+n)=-\sigma+\sigma_0=-\frac{nr_1}{12r(r-r_1\cos\varphi)^3}z.\varepsilon^2.$$

Dabei bedeutet z den bei (2) in der eckigen Klammer eingeschlossenen Ausdruck. Daraus folgt:

Für $\varphi=0$ wird

$$v-\varrho=\frac{r_1}{12r(r_1-r)^2}(2r_1^3-6r^2r_1+4r^3)\varepsilon^2=\pm\frac{r_1}{6r}(r_1+2r)\varepsilon^2.$$

Für $\varphi=\arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$ wird

$$v-\varrho=\frac{r_1 r^3}{4(r_1^2-r^2)\sqrt{3(r_1^2-r^2)}}\cdot\frac{12r^2r_1^4-18r^4r_1^2+8r^6-2r_1^6}{r^2r_1}\varepsilon^2.$$

Dabei ist die Quadratwurzel $\sqrt{3(r_1^2-r^2)}$, weil sie für n steht, positiv zu nehmen, also:

$$n-\varrho=+\frac{1}{12}\sqrt{6(4r^2-r_1^2)}\,.\,\varepsilon^2.$$

Für $\varphi=\pi$ wird:

$$v-\varrho=\frac{r_1}{12r(r+r_1)^2}(2r_1^3-6r^2r_1-4r^3)\varepsilon^2=\frac{r_1}{6r}(r_1-2r)\varepsilon^2.$$

Man sieht hieraus, dass die Spitze für $\varphi=0$ für jeden Werth des Quozienten $\frac{r_1}{r}$ der Evolvente zugekehrt ist. Ebenso ist die Mittelspitze dort, wo sie existirt, der Evolvente zugekehrt. Soll sie aber wirklich existiren, so muss $\frac{r_1}{r}$ so beschaffen sein, dass $1>\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}>-1$ ist; da nämlich $+1$ und -1 die Grenzen sind, in welchen der Cosinus eines Winkels immer eingeschlossen ist.

Für $\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}=1$ erhalten wir aber $\frac{r_1}{r}=1$, und für $\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}=-1$ ist $\frac{r_1}{r}=2$. Und nur innerhalb dieser Grenzen (1 und 2) des Quozienten $\frac{r_1}{r}$ kann eine Mittelspitze vorkommen; denn ist a eine positive Grösse, und setzen wir $\frac{r_1}{r}=1-a$, so erhalten wir:

$$\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}=1+a\frac{3-a}{1-a}>1,$$

und für $\frac{r_1}{r}=2+a$ wird

$$\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}=-1-a\frac{3+a}{2+a}<-1.$$

Für $\cos\varphi=\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$ wird

$$n=\sqrt{3(r_1^2-r^2)}\quad\text{und}\quad\varrho=3\sqrt{3(r_1^2-r^2)}.$$

Es ist also für die Mittelspitze der Krümmungshalbmesser gleich der dreifachen Normale.

Was die Spitze für $\varphi = \pi$ anbelangt, so sieht man, dass dieselbe für $\frac{r_1}{r} > 2$ der Evolute zugekehrt, für $\frac{r_1}{r} < 2$ hingegen von derselben abgewendet ist, und es bleibt noch der Fall $\frac{r_1}{r} = 2$ zu untersuchen.

Setzen wir zu diesem Zwecke $r_1 = 2r$ in (6), so erhalten wir:

$$\beta = -2r \frac{(2-\cos\varphi)^2}{1-2\cos\varphi}.$$

Für $\varphi = \pi$ wird $\beta_1 = -6r$. Für $\varphi = \pi + \varepsilon$, wobei wir zu setzen haben $\cos\varphi = -\cos\varepsilon = -1 + \frac{\varepsilon^2}{1.2} - \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}$, wird

$$\beta_2 = -2r \frac{108 - 36\varepsilon^2 + 6\varepsilon^4}{36 - 12\varepsilon^2 + \varepsilon^4} = -6r - \tfrac{1}{6} r\varepsilon^4 < \beta_1.$$

Man sieht also, dass für diesen Punkt die Ordinate der Evolute ein Maximum wird. Da aber diese Ordinate negativ, die der Evolvente hingegen positiv ist, so folgt, dass die Spitze, welche die Evolute in diesem Punkte besitzt, der Evolvente zugekehrt ist. Dass aber überhaupt die Evolute hier eine Spitze haben muss, ist schon daraus klar, dass sonst, wenn ein Maximum der Ordinate Statt finden soll, die Tangente an die Evolute im betreffenden Punkte parallel zur Abscissenaxe sein müsste, während sie doch, wie wir wissen, auf derselben senkrecht steht.

Es bleibt nun noch mittelst der Formeln (7) zu untersuchen übrig, wann die Curve convex oder concav gegen die Abscissenaxe sein wird. Dabei haben wir den schon unter §. 1. erwähnten Umstand zu berücksichtigen, dass in unserm Falle die Normallinie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe immer einen stumpfen Winkel bildet.

Ist $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$, also $\cos\varphi > \frac{r}{r_1}$, so ist

$$2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi < r^2 - r_1^2,$$

also negativ, somit $v - \varrho$ positiv. Es liegt also die Evolute für $\varphi < \arccos\frac{r}{r_1}$ links von der Normallinie. Da ferner (nur) in diesem Falle die Ordinaten der Evolute positiv sind, so folgt daraus,

dass das oberhalb der Abscissenaxe liegende Stück der Evolute immer concav gegen die Abscissenaxe ist.

Ist $\arccos\frac{r}{r_1} < \varphi < \arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$, so ist $v-\varrho$ negativ. Es liegt also die Evolute rechts von der Normallinie, und da sie zugleich unterhalb der Abscissenaxe liegt, so ist sie gegen dieselbe ebenfalls concav.

Ist $\varphi > \arccos\frac{2r^2-r_1^2}{rr_1}$, so ist $v-\varrho$ positiv; somit liegt die Curve links von der Normallinie, und ist daher aus demselben Grunde wie früher gegen diese convex. — Ist $\frac{r_1}{r} > 2$, so wird, wie wir gesehen haben, der einzige Werth, den man aus der Gleichung $2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi=0$ für $\cos\varphi$ erhält, kleiner als -1. Daraus folgt, dass das Zeichen des Substitutions-Resultates, welches man erhält, wenn man in obigem Ausdrucke statt $\cos\varphi$ Werthe grösser als -1 setzt, immer dasselbe ist. Setzt man aber z. B. $\cos\varphi=0$, so geht $2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi$ in $2r^2-r_1^2$ über, welcher Ausdruck aber, da $r_1^2 > 4r^2 > 2r^2$ ist, immer negativ ist. Daraus folgt, dass auch $v-\varrho$ für jeden Werth von $\varphi > \arccos\frac{r}{r_1}$ negativ ist. Somit ist der ganze unterhalb der Abscissenaxe liegende Theil der Evolute gegen dieselbe concav. Dasselbe gilt für $\frac{r_1}{r}=2$.

§. 6. Die Evolute der verschlungenen Cykloide.

Bei dieser Untersuchung wollen wir wieder voraussetzen: $0 < \varphi < \pi$.

Für $\varphi < \arccos\frac{r_1}{r}$ ist σ absolut genommen $= n - v$. Da aber dabei n negativ ist, so ist

$$\sigma = -(v+n) \text{ und } \sigma_0 = -(\varrho+n),$$

daher:

$$v-\varrho = (v+n)-(\varrho+n) = \sigma_0 - \sigma.$$

Dabei ist aber, da hier mit dem Wachsen des Wälzungswinkels die Abscisse abnimmt, für unsere Untersuchung $-\varepsilon$ statt ε zu setzen. Es ist also:

$$v-\varrho = -\frac{nr_1}{r}\cdot\frac{2r^2-r_1^2-rr_1\cos\varphi}{2(r-r_1\cos\varphi)^2}\sin\varphi.(-\varepsilon).$$

Für $\varphi > \arccos\frac{r_1}{r}$ ist $\sigma = v - n$ und $\sigma_0 = \varrho - n$, also:

$$v - \varrho = (v - n) - (\varrho - n) = \sigma - \sigma_0 = \frac{nr_1}{r} \cdot \frac{2r^2 - r_1^2 - rr_1 \cos\varphi}{2(r - r_1\cos\varphi)^2} \sin\varphi \, . \, \varepsilon.$$

Für $\varphi < \arccos\frac{r_1}{r}$ ist n negativ.

Ferner ist, wie wir gesehen haben, der Werth, den man für $\cos\varphi$ aus der Gleichung $2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi = 0$ erhält, für $\frac{r_1}{r} < 1$ (was eben die verschlungene Cykloide charakterisirt), grösser als 1; sonach bleibt das Zeichen des Substitutions-Resultates von $2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi$, wenn man für $\cos\varphi$ Werthe > 1 substituirt, ungeändert. Setzen wir wieder $\cos\varphi = 0$, so übergeht $2r^2 - r_1^2 - rr_1\cos\varphi$ in $2r^2 - r_1^2$, welcher Ausdruck offenbar positiv ist. Demnach ist obiger Ausdruck für alle Werthe von $\cos\varphi < 1$, also für alle möglichen Werthe von φ, positiv, und daher in unserm Falle $v - \varrho$ negativ. Die Curve liegt also rechts von der Normallinie. Da diese ferner oberhalb der Abscissenaxe mit der positiven Richtung derselben einen spitzigen Winkel einschliesst und die Ordinaten der Curve negativ sind, so ist diese gegen die Abscissenaxe convex.

Für $\varphi > \arccos\frac{r_1}{r}$ ist $v - \varrho$ positiv. Die Curve liegt also links von der Normallinie. Da diese ferner mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel bildet und die Ordinaten der Curve ebenfalls negativ sind, so ist auch dieser Theil der Curve convex gegen die Abscissenaxe.

Die Figuren 1., 2. und 3. auf Taf. VII. zeigen die beiläufige Form der Evolute für verschiedene Fälle.

XXXIV.

Darstellung des unendlichen Kettenbruches

$$2x+1+\cfrac{1}{2x+3+\cfrac{1}{2x+5+\cfrac{1}{2x+7+\ldots}}}$$

in geschlossener Form.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Ich habe im 25sten Bande dieses Archivs (S. 141.) für den unendlichen Kettenbruch

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}$$

den Werth

$$\frac{\int_0^\pi e^{2\cos u}\,du}{\int_0^\pi \cos u \,.\, e^{2\cos u}\,du}$$

angegeben; im 30sten Bande des Archivs (S. 81.) finde ich für den Kettenbruch

$$x+\cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\ldots}}}$$

den Werth

$$\frac{\frac{d^x}{dr^x}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos\omega\,.\,e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]}{\frac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos\omega\,.\,e^{2\sqrt{r}\cos\omega}\,d\omega\right]},$$

(woselbst nach verrichteter Differentiation $r=1$ gesetzt werden muss), welcher sich auch, wie leicht einzusehen, so darstellen lässt:

$$\frac{\frac{d^{x-1}}{dr^{x-1}}\left[\int_0^\pi e^{2\cos u\sqrt{r}}\,du\right]}{\frac{d^x}{dr^x}\left[\int_0^\pi e^{2\cos u\sqrt{r}}\,du\right]},$$

und woselbst ebenfalls nach verrichteter Differentiation r durch 1 ersetzt werden muss.

Hier will ich mir erlauben, den Werth des folgenden Kettenbruches:

$$2x+1+\cfrac{1}{2x+3+\cfrac{1}{2x+5+\cfrac{1}{2x+7+\ldots}}}$$

zu bestimmen. Sei derselbe $\psi(x)$, so ist offenbar

$$\psi(x)=2x+1+\frac{1}{\psi(x+1)},$$

und setzt man:

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)},$$

$$\psi(x+1)=\frac{f(x+1)}{f(x+2)};$$

so erhält man die Gleichung:

$$\frac{f(x)}{f(x+1)}=2x+1+\frac{f(x+2)}{f(x+1)},$$

welche geordnet sich so stellt:

$$f(x+2)+(2x+1)f(x+1)-f(x)=0, \qquad (1)$$

und deren Auflösung uns jetzt obliegt.

Ich setze, geleitet durch die Ergebnisse meiner früheren Untersuchungen, $f(x)$ voraus in Form eines Differential-Quotienten mit variablem Differentiations-Indexe; ich setze nämlich:

$$f(x)=\left\{\frac{d^x\varphi(r)}{dr^x}\right\}_\lambda,$$

woselbst $\varphi(r)$ eine, einstweilen noch unbestimmte Function von r bedeutet, und λ eine constante Zahl ist, die nach verrichteter $x$maliger Differentiation von $\varphi(r)$ in dem so erhaltenen Resultate statt r gesetzt werden muss *).

Nun hat man:

$$f(x+1)=\left\{\frac{d^x\varphi'(r)}{dr^x}\right\}_\lambda,$$

$$f(x+2)=\left\{\frac{d^x\varphi''(r)}{dr^x}\right\}_\lambda,$$

und werden diese Werthe in die Gleichung (1) eingeführt, so erhält man:

$$\left\{\frac{d^x\varphi''(r)}{dr^x}\right\}_\lambda+(2x+1)\left\{\frac{d^x\varphi'(r)}{dr^x}\right\}_\lambda-\left\{\frac{d^x\varphi(r)}{dr^x}\right\}_\lambda=0. \quad (2)$$

Nun ist:

$$x\left\{\frac{d^x\varphi'(r)}{dr^x}\right\}_\lambda=\left\{\frac{d^x}{dr^x}\left[(r-\lambda)\varphi''(r)\right]\right\}_\lambda;$$

denn, differenzirt man das Produkt $(r-\lambda)\varphi''(r)$ $x$mal bezüglich r, nach der gewöhnlichen Regel, wie man ein Produkt differenzirt, so erhält man:

$$(r-\lambda)\frac{d^x\varphi''(r)}{dr^x}+x\frac{d^x\varphi'(r)}{dr^x},$$

was sich für $r=\lambda$ auf $\left\{x\frac{d^x\varphi'(r)}{dr^x}\right\}_\lambda$ reducirt, wenn nur $\frac{d^x\varphi''(r)}{dr^x}$ für $r=\lambda$ nicht unendlich wird.

Die Gleichung (2) lässt sich nunmehr so schreiben:

$$\left\{\frac{d^x}{dr^x}\left[\varphi''(r)+2(r-\lambda)\varphi''(r)+\varphi'(r)-\varphi(r)\right]\right\}_\lambda=0,$$

und man genügt derselben für jene Werthe von $\varphi(r)$, welche die Gleichung

---

*) Ich habe dieselbe Methode angewendet zur Integration der linearen Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängig, Variablen sind und sie in einer der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien am 4 Februar d. J. überreichten Abhandlung auseinandergesetzt.

$$(1+2r-2\lambda)\varphi''(r)+\varphi'(r)-\varphi(r)=0$$

identisch machen.

Dieselbe vereinfacht sich für

$$\lambda=\tfrac{1}{2},$$

denn man hat dann:

$$2r\varphi''(r)+\varphi'(r)-\varphi(r)=0,$$

eine Gleichung, der genügt wird für

$$\varphi(r)=C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}.$$

Es ist somit das Integral der Gleichung (1):

$$f(x)=\left\{\frac{d^x}{dr^x}[C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_1e^{-\sqrt{2r}}]\right\}_{\frac{1}{2}},$$

und zwar ganz unzweifelhaft, weil $\varphi''(r)$, $x$mal differenzirt, für $r=\frac{1}{2}$ nicht unendlich wird. Wir haben somit:

$$\psi(x)=\left\{\frac{\dfrac{d^x}{dr^x}[C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}]}{\dfrac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}[C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}]}\right\}_{\frac{1}{2}},$$

ein Ausdruck, welcher als mit einer willkührlichen Constanten $\frac{C_2}{C_1}$ versehen betrachtet werden kann. Die Bestimmung dieser Constanten ist leicht; denn es ist für $x=0$

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\ldots}}}=\left\{\frac{C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}}{\dfrac{d}{dr}[C_1e^{+\sqrt{2r}}+C_2e^{-\sqrt{2r}}]}\right\}_{\frac{1}{2}}=\frac{C_1e^{+1}+C_2e^{-1}}{C_1e^{+1}-C_2e^{-1}}.$$

Derselbe Kettenbruch ist aber (m. s. Grunert's Supplemente zu Klügel's mathematischem Wörterbuche. I. Band. Seite 555.) gleich

$$\frac{e^{+1}+e^{-1}}{e^{+1}-e^{-1}},$$

folglich ist $C_1=C_2$, und daher:

$$2x+1+\cfrac{1}{2x+3+\cfrac{1}{2x+5+\cfrac{1}{2x+7+\ldots}}}=\frac{\dfrac{d^x}{dr^x}[e^{+\sqrt{2r}}+e^{-\sqrt{2r}}]}{\dfrac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}[e^{+\sqrt{2r}}+e^{-\sqrt{2r}}]},$$

ein Ausdruck, in welchem nach verrichteter Differentiation $r=\frac{1}{2}$ gesetzt werden muss.

XXXV.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$a^m\frac{d^m z}{dt^m}=x^{2m}\frac{d^m z}{dx^m}.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Ich setze

$$z=e^{\alpha t}f(x)$$

und erhalte hierdurch

$$a^m\alpha^m e^{\alpha t}f(x)=x^{2m}e^{\alpha t}f^{(m)}(x)$$

oder

$$x^{2m}f^{(m)}(x)=(a\alpha)^m f(x).$$

Das Integral dieser Gleichung ist aber (siehe Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. 26. Band. Seite 489.):

$$f(x)=x^{m-1}\{C_1e^{-\frac{\mu a\alpha}{x}}+C_2e^{-\frac{\mu^2 a\alpha}{x}}+\ldots.+C_me^{-\frac{\mu^m a\alpha}{x}}\},$$

woselbst C_1, C_2 .... C_m willkührliche Constanten sind und μ eine primitive Wurzel der Gleichung $\mu^m=1$ ist; man hat daher:

$$z=x^{m-1}\{C_1e^{\alpha(t-\frac{\mu a}{x})}+C_2e^{\alpha(t-\frac{\mu^2 a}{x})}+\ldots.+C_me^{\alpha(t-\frac{\mu^m a}{x})}\}$$

oder, wie leicht einzusehen:

$$z=x^{m-1}\{\varphi_1(t-\frac{\mu a}{x})+\varphi_2(t-\frac{\mu^2 a}{x})+\ldots.+\varphi_m(t-\frac{\mu^m a}{x})\},$$

unter φ_1, φ_2 .... φ_m willkührliche Functionen verstanden.

XXXVI.

Leichte ganz elementare Summirung einiger Reihen und daraus abgeleiteter einfacher Beweis des binomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, zur Aufnahme in den mathematischen Schulunterricht, oder wenigstens zur Benutzung bei demselben.

(Mit Rücksicht auf Résumés analytiques par M. A. Cauchy. Turin 1833.*)

Von
dem Herausgeber.

Jedenfalls ist sehr zu wünschen, dass die ganz unwissenschaftlichen Reihen-Entwickelungen, die man in den für den Schul-Unterricht bestimmten Lehrbüchern immer leider nur zu häufig noch antrifft, namentlich aber die der strengen Wissenschaft bei ihrem jetzigen Standpunkte ganz unwürdige sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten, aus dem Schulunterrichte ganz verschwinden und aus demselben verbannt werden, und dass auch dieser Unterricht sich immer mehr und mehr der wissenschaftlichen Strenge nähere und befleissige, welche hauptsächlich Cauchy in die algebraische und in die transcendente Analysis eingeführt, und dadurch, wie durch so vieles Andere, seinen Namen unsterblich gemacht hat. Denn dass von dieser völligen Umgestaltung der Analysis der Schulunterricht sich etwas angeeignet und daraus die Früchte gezogen habe, welche er daraus gewiss zum grossen Vortheil der Schüler hätte ziehen können, lässt sich wahrlich nicht sagen, wenn man nur einen Blick in die Masse mathematischer Lehrbücher thut, mit denen namentlich jetzt der Bücher-

---

*) Nur Nr. IV. unten ist von Cauchy entlehnt. Die Reihensummirungen gehören ganz mir an. G.

markt überschwemmt wird; ja es erregt wahrhaftes Bedauern, wenn man sieht, wie ganz spurlos jene grossartige Umgestaltung der wissenschaftlichen Darstellung und Entwickelung der Analysis bei Weitem an den meisten Verfassern dieser Lehrbücher vorübergegangen ist. Die folgenden elementaren Betrachtungen haben den Zweck, ein kleines Scherflein zur Herbeiführung eines besseren Zustandes in dieser Beziehung beizutragen, und werden hoffentlich noch einige Aufsätze von gleicher Tendenz in ihrem Gefolge haben. Mögen dieselben das warme Interesse von Neuem bethätigen, welches wir von jeher an dem Gedeihen und der besseren Gestaltung des mathematischen Schulunterrichts genommen haben! denn nur diesem Interesse verdanken sie ihre Entstehung.

I.

Die für viele Untersuchungen wichtige Reihe der figurirten Zahlen, nämlich die Reihe

$$\frac{1....k}{1....k},\ \frac{2....(k+1)}{1....k},\ \frac{3....(k+2)}{1....k},\ ....,\ \frac{n....(k+n-1)}{1....k},$$

lässt sich wohl am Einfachsten auf folgende Art summiren.

Offenbar ist:

$$\frac{1....k}{1....k}=\frac{1....k}{1....k}\,\frac{k+1}{k+1}.$$

Also ist:

$$\begin{aligned}\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}&=\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{1....k}{1....k}\cdot\frac{k+1}{k+1}\\&=\frac{2....(k+1)}{1....k}\left\{1+\frac{1}{k+1}\right\}\\&=\frac{2....(k+1)}{1....k}\cdot\frac{k+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich ferner:

$$\begin{aligned}\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}&=\frac{3....(k+2)}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}\cdot\frac{k+2}{k+1}\\&=\frac{3....(k+2)}{1....k}\left\{1+\frac{2}{k+1}\right\},\\&=\frac{3....(k+2)}{1....k}\cdot\frac{k+3}{k+1}.\end{aligned}$$

Dies führt ferner zu:

$$\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}+\frac{4....(k+3)}{1....k}$$

$$=\frac{4....(k+3)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}\cdot\frac{k+3}{k+1}$$

$$=\frac{4....(k+3)}{1....k}\{1+\frac{3}{k+1}\}$$

$$=\frac{4....(k+3)}{1....k}\cdot\frac{k+4}{k+1}.$$

Also ist:

$$\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}+\frac{4....(k+3)}{1....k}+\frac{5....(k+4)}{1....k}$$

$$=\frac{5....(k+4)}{1....k}+\frac{4....(k+3)}{1....k}\cdot\frac{k+4}{k+1}$$

$$=\frac{5....(k+4)}{1....k}\{1+\frac{4}{k+1}\}$$

$$=\frac{5....(k+4)}{1....k}\cdot\frac{k+5}{k+1}.$$

Wie man ganz in derselben Weise immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und man abstrahirt aus dem Vorhergehenden auf der Stelle das folgende allgemeine Gesetz:

$$\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}+....+\frac{n....(k+n-1)}{1....k}$$

$$=\frac{n....(k+n-1)}{1....k}\cdot\frac{k+n}{k+1}$$

oder:

$$\frac{1....k}{1....k}+\frac{2....(k+1)}{1....k}+\frac{3....(k+2)}{1....k}+....+\frac{n....(k+n-1)}{1....k}$$

$$=\frac{n....(k+n)}{1....(k+1)},$$

die bekannte Summirung der figurirten Zahlen.

Für $k=1$ ist:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+....+\frac{n}{1}=\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Für $k=2$ ist:

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\frac{4.5}{1.2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Für $k=3$ ist:

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$$

u. s. w.

II.

Wenn man die Reihe

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}$$

mit $1-x$ multiplicirt, so erhält man als Product die Grösse $1-x^n$; also ist

$$1+x+x^2+x^3+\ldots x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

oder

$$1) \quad . \quad . \quad 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

wie auch aus der Lehre von den geometrischen Reihen sogleich geschlossen wird.

Aus dieser Gleichung ergeben sich nun unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^2}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

u. s. w.

$$x^{n-2}+x^{n-1}=\frac{x^{n-2}}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x^{n-1}=\frac{x^{n-1}}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

Addirt man jetzt diese Gleichungen zu einander und wendet dabei wieder die Gleichung 1) an, so erhält man:

Dies führt ferner zu:

$$\frac{1\ldots k}{1\ldots k}+\frac{2\ldots(k+1)}{1\ldots k}+\frac{3\ldots(k+2)}{1\ldots k}+\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}$$

$$=\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}+\frac{3\ldots(k+2)}{1\ldots k}\cdot\frac{k+3}{k+1}$$

$$=\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}\left(1+\frac{3}{k+1}\right)$$

$$=\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}\cdot\frac{k+4}{k+1}.$$

Also ist:

$$\frac{1\ldots k}{1\ldots k}+\frac{2\ldots(k+1)}{1\ldots k}+\frac{3\ldots(k+2)}{1\ldots k}+\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}+\frac{5\ldots(k+4)}{1\ldots k}$$

$$=\frac{5\ldots(k+4)}{1\ldots k}+\frac{4\ldots(k+3)}{1\ldots k}\cdot\frac{k+4}{k+1}$$

$$=\frac{5\ldots(k+4)}{1\ldots k}\left(1+\frac{4}{k+1}\right)$$

$$=\frac{5\ldots(k+4)}{1\ldots k}\cdot\frac{k+5}{k+1}.$$

Wie man ganz in derselben Weise immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und man abstrahirt aus dem Vorhergehenden auf der Stelle das folgende allgemeine Gesetz:

$$\frac{1\ldots k}{1\ldots k}+\frac{2\ldots(k+1)}{1\ldots k}+\frac{3\ldots(k+2)}{1\ldots k}+\ldots+\frac{n\ldots(k+n-1)}{1\ldots k}$$

$$=\frac{n\ldots(k+n-1)}{1\ldots k}\cdot\frac{k+n}{k+1}$$

oder:

$$\frac{1\ldots k}{1\ldots k}+\frac{2\ldots(k+1)}{1\ldots k}+\frac{3\ldots(k+2)}{1\ldots k}+\ldots+\frac{n\ldots(k+n-1)}{1\ldots k}$$

$$=\frac{n\ldots(k+n)}{1\ldots(k+1)},$$

die bekannte Summirung der figurirten Zahlen.

Für $k=1$ ist:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\ldots+\frac{n}{1}=\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Für $k=2$ ist:

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\frac{4.5}{1.2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Für $k=3$ ist:

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$$

u. s. w.

II.

Wenn man die Reihe

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}$$

mit $1-x$ multiplicirt, so erhält man als Product die Grösse $1-x^n$; also ist

$$1+x+x^2+x^3+\ldots x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

oder

$$1)\quad . \quad . \quad 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

wie auch aus der Lehre von den geometrischen Reihen sogleich geschlossen wird.

Aus dieser Gleichung ergeben sich nun unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^2}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

u. s. w.

$$x^{n-2}+x^{n-1}=\frac{x^{n-2}}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},$$

$$x^{n-1}=\frac{x^{n-1}}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

Addirt man jetzt diese Gleichungen zu einander und wendet dabei wieder die Gleichung 1) an, so erhält man:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}x+\frac{3}{1}x^2+\frac{4}{1}x^3+\ldots.+\frac{n}{1}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right\}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x},$$

also:

2)

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}x+\frac{3}{1}x^2+\frac{4}{1}x^3+\ldots.+\frac{n}{1}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Summe der folgenden Grössen:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}x+\frac{3}{1}x^2+\frac{4}{1}x^3+\ldots.+\frac{n}{1}x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1}x+\frac{2}{1}x^2+\frac{3}{1}x^3+\ldots.+\frac{n-1}{1}x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1}x^2+\frac{2}{1}x^3+\ldots.+\frac{n-2}{1}x^{n-1}$$

u. s. w.

$$\frac{1}{1}x^{n-2}+\frac{2}{1}x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1}x^{n-1}$$

gleich der Summe der folgenden Grössen ist, welche nach 2) offenbar die Summen der vorstehenden Reihen sind:

$$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n-2}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

u. s. w.

$$\frac{x^{n-2}}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{1}{1}\cdot\frac{x^n}{1-x},$$

Bildet man nun die beiderseitigen Summen mittelst I. und der obigen Gleichung 1), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right\}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x},$$

also:

$$3)\quad\ldots\quad\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner, dass die Summe der folgenden Grössen:

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1}$$

$$\frac{1.2}{1.2}x+\frac{2.3}{1.2}x^2+\ldots+\frac{(n-1)n}{1.2}x^{n-1}$$

$$\frac{1.2}{1.2}x^2+\ldots+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}x^{n-1}$$

u. s. w.

$$\frac{1.2}{1.2}x^{n-2}+\frac{2.3}{1.2}x^{n-1}$$

$$+\frac{1.2}{1.2}x^{n-1}$$

gleich der Summe der folgenden Grössen ist, welche nach 3) offenbar die Summen der vorstehenden Reihen sind:

$$\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{(n-1)n}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n-2}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

u. s. w.

$$\frac{x^{n-2}}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{2}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{2.3}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{1}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{1.2}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

...det man nun die beiderseitigen Summen mittelst I. und der ... Gleichung 1), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}x+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right\}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^n}{1-x},$$

d. i.:

$$\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}x+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^4}-\frac{x^n}{(1-x)^4}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

Es ist ganz unnöthig, diese Entwickelungen noch weiter fortzuführen, da das Gesetz des Fortgangs und der Bildung der betreffenden Grössen schon hier ganz klar vor Augen liegt. Ueberhaupt gelangt man dadurch offenbar zu der folgenden allgemein gültigen Gleichung, in welcher die Anzahl der Glieder der Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens n, die Anzahl der Glieder der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $k+1$ ist:

$$\frac{1\ldots(k-1)}{1\ldots(k-1)}+\frac{2\ldots k}{1\ldots(k-1)}x+\frac{3\ldots(k+1)}{1\ldots(k-1)}x^2+\ldots+\frac{n\ldots(n+k-2)}{1\ldots(k-1)}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^k}-\frac{x^n}{(1-x)^k}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-1}}$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-2}}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-3}}$$

u. s. w.

$$-\frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ldots(k-1)}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

Weil aber offenbar

$$\frac{1\ldots.(k-1)}{1\ldots.(k-1)}=1,$$

$$\frac{2\ldots.k}{1\ldots.(k-1)}=\frac{k}{1},$$

$$\frac{3\ldots.(k+1)}{1\ldots.(k-1)}=\frac{k(k+1)}{1.2},$$

$$\frac{4\ldots.(k+2)}{1\ldots.(k-1)}=\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3},$$

u. s. w.

$$\frac{n\ldots.(n+k-2)}{1\ldots.(k-1)}=\frac{k(k+1)\ldots.(k+n-2)}{1.2.3\ldots.(n-1)}$$

ist, wovon man sich am leichtesten sogleich überzeugt, wenn man Zähler und Nenner der Brüche in den einzelnen Gleichungen über's Kreuz multiplicirt, was augenscheinlich überall zu gleichen Producten führt; so kann man die obige Gleichung auch auf folgenden Ausdruck bringen:

$$1+\frac{k}{1}x+\frac{k(k+1)}{1.2}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{k(k+1)\ldots.(k+n-2)}{1.2.3\ldots.(n-1)}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^k}-\frac{x^n}{(1-x)^k}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-1}}$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-2}}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-3}}$$

u. s. w.

$$-\frac{n(n+1)\ldots.(n+k-2)}{1.2.3\ldots.(k-1)}\cdot\frac{x^n}{1-x}.$$

III.

Aus der vorhergehenden Gleichung lässt sich ein sehr genügender einfacher Beweis des binomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten ableiten, wozu wir aber erst noch die folgenden Betrachtungen vorausschicken müssen.

In der Grösse

$$\frac{n(n+1)\ldots.(n+m-1)}{1.2.3\ldots.m}x^n$$

sollen m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, welche wir aus einem solchen Gesichtspunkte betrachten wollen, dass, indem m völlig ungeändert oder constant bleibt, man n in's Unendliche wachsen lässt. Auch soll x für's Erste als positiv angenommen werden.

Zuerst erhellet auf der Stelle, dass man die obige Grösse unter der folgenden Form darstellen kann:

$$n^m x^n.\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n})}{1.2.3\ldots.m}.$$

Wächst nun n in's Unendliche, so nähert das Product

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n}),$$

welches aus einer endlichen völlig bestimmten Anzahl von Factoren besteht, weil m eine endliche völlig bestimmte positive ganze Zahl bezeichnet, sich offenbar immer mehr und mehr der Einheit, und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt, was sich noch bestimmter auch auf folgende Art übersehen lässt. Offenbar ist

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n})<(1+\frac{m-1}{n})^{m-1},$$

und kann man nun beweisen, dass die Grösse

$$(1+\frac{m-1}{n})^{m-1}$$

der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt, so wird dies natürlich um so mehr von der Grösse

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n})$$

gelten, wobei man nur nicht aus den Augen zu lassen hat, dass die Grössen

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n}) \text{ und } (1+\frac{m-1}{n})^{m-1}$$

beide stets grösser als die Einheit sind, und nach dem Vorhergehenden die erstere immer zwischen

$$1 \text{ und } (1+\frac{m-1}{n})^{m-1}$$

liegt. Um nun aber zu beweisen, dass die Grösse

$$(1+\frac{m-1}{n})^{m-1}$$

der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt, muss man zeigen, dass, wenn μ eine beliebige positive Grösse bezeichnet, die positive ganze Zahl n immer so gross angenommen werden kann, dass die Bedingung

$$(1+\frac{m-1}{n})^{m-1}-1<\mu$$

erfüllt wird. Diese Bedingung wird aber erfüllt sein, wenn die Bedingung

$$(1+\frac{m-1}{n})^{m-1}<\mu+1$$

erfüllt ist, und diese Bedingung wird ferner erfüllt sein, wenn die Bedingung

$$1+\frac{m-1}{n}<\sqrt[m-1]{\mu+1},$$

also, wenn die Bedingung

$$\frac{m-1}{n}<\sqrt[m-1]{\mu+1}-1,$$

also, wenn die Bedingung

$$\frac{n}{m-1}>\frac{1}{\sqrt[m-1]{\mu+1}-1},$$

also, wenn die Bedingung

$$n>\frac{m-1}{\sqrt[m-1]{\mu+1}-1}$$

erfüllt ist; und da der Erfüllung dieser letzteren Bedingung offenbar nichts im Wege steht, so wird sich auch die erste Bedingung immer erfüllen lassen, und daher unser Satz bewiesen sein.

Weil nun

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots.(1+\frac{m-1}{n})$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähert, so nähert

$$\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots(1+\frac{m-1}{n})}{1.2.3\ldots m}$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, offenbar bis zu jedem beliebigen Grade dem endlichen völlig bestimmten Bruche

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}.$$

In Betreff des Products $n^m x^n$ bemerken wir nun ferner Folgendes. Auf der Stelle wird man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen überzeugen:

$$(n+1)^m x^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^m x . n^m x^n,$$

$$(n+2)^m x^{n+2} = (1+\frac{1}{n+1})^m x . (n+1)^m x^{n+1},$$

$$(n+3)^m x^{n+3} = (1+\frac{1}{n+2})^m x . (n+2)^m x^{n+2},$$

$$(n+4)^m x^{n+4} = (1+\frac{1}{n+3})^m x . (n+3)^m x^{n+3},$$

u. s. w.,

also:

$$(n+1)^m x^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^m x . n^m x^n,$$

$$(n+2)^m x^{n+2} = (1+\frac{1}{n})^m (1+\frac{1}{n+1})^m x^2 . n^m x^n,$$

$$(n+3)^m x^{n+3} = (1+\frac{1}{n})^m (1+\frac{1}{n+1})^m (1+\frac{1}{n+2})^m x^3 . n^m x^n,$$

$$(n+4)^m x^{n+4} = (1+\frac{1}{n})^m (1+\frac{1}{n+1})^m (1+\frac{1}{n+2})^m (1+\frac{1}{n+3})^m x^4 . n^m x^n,$$

u. s. w.,

und folglich, wie sogleich erhellet, wenn man nur überlegt, dass die Brüche

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots$$

fortwährend abnehmen:

$$(n+1)^m x^{n+1} = \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^1 . n^m x^n,$$

$$(n+2)^m x^{n+2} < \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^2 . n^m x^n,$$

$$(n+3)^m x^{n+3} < \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^3 . n^m x^n,$$

$$(n+4)^m x^{n+4} < \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^4 . n^m x^n,$$

u. s. w.

Wenn aber $x < 1$ ist, so kann man n immer so gross annehmen, dass

$$(1+\frac{1}{n})^m x < 1$$

ist *); denn die Erfüllung dieser Bedingung erfordert nach und nach die Erfüllung der folgenden Bedingungen:

$$(1+\frac{1}{n})^m < \frac{1}{x}, \quad 1+\frac{1}{n} < \sqrt[m]{\frac{1}{x}}, \quad \frac{1}{n} < \sqrt[m]{\frac{1}{x}}-1;$$

also die Erfüllung der Bedingung

$$n > \frac{1}{\sqrt[m]{\frac{1}{x}}-1} \text{ oder } n > \frac{\sqrt[m]{x}}{1-\sqrt[m]{x}};$$

und da der Erfüllung dieser Bedingung offenbar nie etwas im Wege steht, so lässt sich auch die erste Bedingung

$$(1+\frac{1}{n})^m x < 1$$

immer erfüllen, wenn nur $x < 1$ ist. Noch einfacher lässt sich dies sogleich auf folgende Art übersehen. Die Grösse $(1+\frac{1}{n})^m$,

---

*) Wenn $x \geqq 1$ ist, ist dies natürlich nicht möglich, weil dann immer

$$(1+\frac{1}{n})^m x > 1$$

ist.

welche immer grösser als die Einheit ist, lässt sich offenbar der Einheit beliebig nahe bringen, wenn man nur n gross genug annimmt. Also lässt sich n immer so gross annehmen, dass

$$(1+\frac{1}{n})^m-1<\frac{1-x}{x} \text{ oder } (1+\frac{1}{n})^m-1<\frac{1}{x}-1$$

ist, immer nur unter der Voraussetzung, dass $x<1$ ist. Dann ist aber

$$(1+\frac{1}{n})^m<\frac{1}{x}, \text{ also } (1+\frac{1}{n})^m x<1,$$

wie verlangt wurde.

Hat man nun aber unter der Voraussetzung, dass $x<1$ ist, n so gross angenommen, dass

$$(1+\frac{1}{n})^m x<1$$

ist, so nähern sich die Potenzen

$$\{(1+\frac{1}{n})^m x\}^1, \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^2, \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^3, \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^4, \ldots;$$

also offenbar auch die Grössen

$$\{(1+\frac{1}{n})^m x\}^1 . n^m x^n, \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^2 . n^m x^n, \{(1+\frac{1}{n})^m x\}^3 . n^m x^n, \ldots;$$

folglich nach dem Obigen um so mehr die Grössen

$$(n+1)^m x^{n+1}, (n+2)^m x^{n+2}, (n+3)^m x^{n+3}, (n+4)^m x^{n+4}, \ldots$$

bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wenn man nur weit genug in diesen Reihen fortschreitet; woraus sich also ganz unzweideutig ergiebt, dass, unter der Voraussetzung $x<1$, die Grösse $n^m x^n$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt.

In Verbindung mit dem oben Bewiesenen ergiebt sich also hieraus, dass, unter der Voraussetzung $x<1$, die Grösse

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}x^n = n^m x^n . \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\ldots(1+\frac{m-1}{n})}{1.2.3\ldots m}$$

der Gränze

$$0 . \frac{1}{1.2.3\ldots m},$$

d. h. der Null, beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug annimmt.

Zwar ist bisher x als positiv angenommen worden; dass das Vorstehende aber auch gilt, wenn x negativ, und nur sein absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, fällt auf der Stelle in die Augen.

IV.

Wenden wir nun den in III. bewiesenen Satz auf die in II. gefundene Gleichung, nämlich auf die Gleichung

$$1+\frac{k}{1}x+\frac{k(k+1)}{1.2}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}x^3+\ldots+\frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^k}-\frac{x^n}{(1-x)^k}-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-1}}$$

$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-2}}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{k-3}}$$

u. s. w.

$$-\frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ldots(k-1)}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

an, indem wir in dieser Gleichung, die Grösse k ganz ungeändert lassend oder als constant voraussetzend, die Grösse n in's Unendliche wachsen lassen; so nähern nach III., wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, alle Glieder der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung, mit Ausnahme des ersten, deren Anzahl die völlig bestimmte, von n ganz unabhängige Zahl k ist, sich offenbar bis zu jedem beliebigen Grade der Null, weil nämlich nach III. die Grössen

$$x^n,\quad \frac{n}{1}x^n,\quad \frac{n(n+1)}{1.2}x^n,\quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^n,\ldots,\ \frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ldots(k-1)}x^n$$

sich unter den gemachten Voraussetzungen bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern, und die Nenner

$$(1-x)^k,\ (1-x)^{k-1},\ (1-x)^{k-2},\ (1-x)^{k-3},\ldots,\ 1-x$$

ganz bestimmte constante, d. h. von n völlig unabhängige Grös-

sen sind. Also nähert sich offenbar die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung ihrem ersten Gliede

$$\frac{1}{(1-x)^k}=(1-x)^{-k}$$

als Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche wächst, natürlich immer nur unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist. Folglich nähert unter derselben Voraussetzung auch die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung, nämlich die Grösse

$$1+\frac{k}{1}x+\frac{k(k+1)}{1.2}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}x^3+\ldots+\frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

sich der Grösse $(1-x)^{-k}$ bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche wächst, so dass also auch $(1-x)^{-k}$ mittelst der vorstehenden Reihe mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnet werden kann, wenn man in derselben nur n gross genug annimmt, oder eine hinreichende Anzahl von Gliedern dieser Reihe, vom Anfange an, wenn man sich dieselbe in's Unendliche fortgesetzt denkt, zu einander addirt oder im Allgemeinen mit einander vereinigt, was man bekanntlich in der Kürze auf folgende Art zu schreiben pflegt:

$$(1-x)^{-k}=1+\frac{k}{1}x+\frac{k(k+1)}{1.2}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}x^3+\ldots..$$

$$\{-1<x<+1\}$$

Schreibt man $-x$ für x, so stellt sich diese Gleichung unter der folgenden Form dar:

$$(1+x)^{-k}=1-\frac{k}{1}x+\frac{k(k+1)}{1.2}x^2-\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}x^3+\ldots..$$

$$\{-1<x<+1\}$$

oder unter der Form:

$$(1+x)^{-k}=1+\frac{-k}{1}x+\frac{-k(-k-1)}{1.2}x^2+\frac{-k(-k-1)(-k-2)}{1.2.3}x^3+\ldots,$$

$$\{-1<x<+1\}$$

in welcher Gleichung der binomische Lehrsatz für negative ganze Exponenten ausgesprochen ist.

V.

Die erste Idee zu diesem Beweise des binomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, der sich hoffentlich den Lesern durch seine grosse Strenge und verhältnissmässige Einfachheit empfehlen wird, habe ich den, wie es scheint, nur sehr wenig bekannten Résumés analytiques. Par M. Augustin Louis Cauchy. A Turin. 1833. 4. p. 51. entnommen, wenn ich auch die obige, ganz elementare Ausführung durchaus als mein Eigenthum in Anspruch nehmen darf, wie man bei näherer Vergleichung finden wird. Der mathematische Unterricht, welchen Cauchy vom Jahre 1832 bis zum Jahre 1838 in Prag und Görz dem Grafen von Chambord ertheilte, gab diesem grossen Mathematiker die nächste Veranlassung, seine Aufmerksamkeit auch der Verbesserung des mathematischen Elementar-Unterrichts zuzuwenden, weshalb auch Moigno in der Vorrede zu seinen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. T. I. p. XIV. von ihm sagt: „M. Cauchy a rédigé sur des bases nouvelles, et l'on sait à quelle occasion, des traités élémentaires d'Arithmétique et de Géométrie; on aime à voir un grand génie, inspiré par un noble dévouement, suspendre la poursuite de ses brillantes découvertes pour rendre à un jeune et royal exilé les importants secrets des sciences." Es ist sehr zu bedauern, dass nur sehr wenige dieser elementaren Arbeiten Cauchy's bis jetzt in die Oeffentlichkeit gelangt sind, und Herr Moigno würde seinen mannigfaltigen wissenschaftlichen Verdiensten gewiss noch ein sehr grosses neues hinzufügen, wenn er sich in deren Besitz zu setzen suchte und dieselben so bald als möglich publicirte. Je mehr wir, namentlich bei'm Anblick der jetzt in Deutschland in immer grösserer Fluth erscheinenden Lehrbücher, überzeugt sind, dass der mathematische Elementar-Unterricht noch sehr der Verbesserung bedarf, weil er bis jetzt, wie es scheint, leider ganz von den grossen Fortschritten unberührt geblieben ist, deren sich die höheren Theile der Wissenschaft in Rücksicht auf wahre Strenge und Eleganz so sehr erfreuen: desto mehr wünschen wir die baldige Publication der nach dieser Seite hin gerichteten Arbeiten des jüngst leider durch den Tod uns entrissenen grossen Mathematikers. Das Archiv wird es von jetzt an sich zu einer besonderen Aufgabe machen, Alles, was in dieser Beziehung uns zu Gesicht kommt, wenn auch öfter in veränderter, uns eigenthümlicher Darstellung, zur baldigen Kenntniss seiner Leser zu bringen.

XXXVII.

Ueber das grösste in und das kleinste um eine Ellipse beschriebene Vieleck von gegebener Seitenzahl.

Schreiben des

Herrn Professor *Simon Spitzer*

an der Handels-Akademie zu Wien

an den Herausgeber.

Ueber das grösste in und das kleinste um eine Ellipse beschriebene Vieleck von gegebener Seitenzahl hat Herr Professor Spitzer in Wien das nachstehende Schreiben an mich zu richten die Güte gehabt, welches natürlich für mich selbst von dem grössten Interesse gewesen ist, und es wegen seines sehr sinnreichen Inhalts gewiss auch für alle Leser des Archivs sein wird, weshalb ich es, Herrn Professor Spitzer verbindlichst für dasselbe dankend, sogleich unverändert in seiner ursprünglichen Fassung hier abdrucken lasse. G.

Wien, 2. März 1858.

In Ihrer interessanten Abhandlung: „Merkwürdige Construction des grössten in und des kleinsten um eine Ellipse beschriebenen Vieleckes von gegebener Seitenzahl“, Archiv Thl. XXX. Nr. X. S. 84., sind Sie zu mehreren schönen und überraschenden Resultaten gelangt. Ich habe versucht, synthetische Beweise für ihre merkwürdigen Constructionen zu liefern, und erlaube mir, Ihnen dieselben hier mitzutheilen.

Dreht man den Kreis um den Durchmesser MN (Taf. VII. Fig. 4.) über oder unter der Ebene des Papiers um den Winkel φ, und projicirt dann diesen Kreis auf die Papierebene, so ist offenbar die Projection desselben eine Ellipse, ferner sind die Projectionen der Dreiecke ABC, $AB'C$, deren Endpunkte in der

Peripherie des Kreises liegen, die Dreiecke *abc*, *ab'c*, deren Endpunkte in der Peripherie der Ellipse sind, und man hat bekanntlich

$$\Delta abc = \Delta ABC . \cos\varphi,$$
$$\Delta ab'c = \Delta AB'C . \cos\varphi;$$

woraus folgt:

$$(1) \qquad \frac{\Delta abc}{\Delta ab'c} = \frac{\Delta ABC}{\Delta AB'C}.$$

Ist nun ABC das grösste dem Kreise eingeschriebene, auf der Geraden AC liegende Dreieck, so ist stets $\Delta ABC > \Delta AB'C$, wie immer auch der Punkt B' zwischen A und B oder zwischen B und C liegt, folglich muss auch Δabc stets grösser als $\Delta ab'c$ sein, weil sonst die Gleichung (1) nicht bestehen könnte, und dies ist der von Ihnen bewiesene Satz.

Ferner ergeben sich aus diesem Satze in Verbindung mit der Lehre von den Projectionen noch andere Sätze, die meistentheils von Ihnen schon gefunden wurden.

Wird einem Kreise ein reguläres $n$eck eingeschrieben, und wird dieser Kreis um einen seiner Durchmesser um den Winkel φ gedreht und alsdann auf die Papierebene projicirt, so entsteht eine Ellipse und ein derselben eingeschriebenes $n$eck, welches unter allen der Ellipse eingeschriebenen $n$ecken ein Grösstes ist. Ist F die Fläche des regulären $n$ecks und f die Fläche des der Ellipse eingeschriebenen, so hat man

$$f = F\cos\varphi.$$

Aendert sich die Drehungsaxe (φ aber bleibe constant), so ändert sich auch die Gestalt des der Ellipse eingeschriebenen $n$ecks, aber die Fläche f bleibt ungeändert, denn sie ist stets gleich $F\cos\varphi$. Es gibt also unendlich viele der Ellipse eingeschriebene $n$ecke von grösster Fläche, die alle verschiedene Form haben, aber denselben Flächeninhalt. (Unter allen diesen gibt es vermuthlich eines von kleinstem Umfange.)

Verbindet man den Mittelpunkt der Ellipse mit den Endpunkten eines der Ellipse eingeschriebenen grössten $n$ecks, so entstehen n Dreiecke, die gleich gross sind, und auch n elliptische Sectoren von gleicher Grösse.

Betrachtet man statt „eingeschrieben" umschriebene Polygone, so ergeben sich offenbar ganz analoge Sätze.

Simon Spitzer.

XXXVIII.

Stereographische Projection.

Von
Herrn Professor Dr. *Heis*
zu Münster.

Einer der wichtigsten Sätze über stereographische Projection ist der, dass die Projectionen zweier beliebiger Kugelkreise sich unter demselben Winkel schneiden, wie diese Kreise selbst. Aus dieser Eigenschaft folgt ja, dass die Projectionen der kleinsten Theile der Kugelfläche ihrem Urbilde auf der Kugel ähnlich sind. Vergeblich wird man sich in den verschiedenen Schriften über stereographische Projectionen nach einem einfachen Beweise über diesen wichtigen Satz umsehen; man vergleiche nur u. A. den weitläufigen und schwierigen Beweis in Klügel's mathematischem Wörterbuche Band IV. S. 475—477. Ich fand mich desshalb veranlasst, einen einfachen und elementaren Beweis aufzusuchen, welcher nachstehend folgt und welcher der in Kürze erscheinenden „Stereometrie von Heis und Eschweiler" einverleibt ist.

Satz. Die stereographischen Projectionen zweier beliebigen Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel, wie diese Kreise selbst.

Beweis. A (Taf. VII. Fig. 5.) sei ein Punkt der Kugelfläche, in welchem zwei Kreise derselben (grösste oder kleine) sich schneiden; AB und AD seien die Tangenten dieser Kreise an A, beide bis zur Tafel gezogen, die dieselbe in B und D treffen. Der Winkel BAD ist also derjenige, unter welchem die durch A gehenden zwei Kugelkreise sich schneiden. Der Punkt O der Kugelfläche sei der Ort des Auges; die Verbindungslinie OC dieses Punktes mit dem Mittelpunkte C des Kreises steht also auf der durch C gehenden Tafel senkrecht. Die durch OC und CA

gelegte Ebene OCA schneide die Tafel nach CK, und diese Durchschnittslinie begegne BD in K. Zieht man KA, KO, so ist KA der Durchschnitt der Ebene $OCAK$ mit der Ebene BAD. OA treffe CK und also auch die Tafel in E. Zieht man EB, ED, so sind diese Linien die Projectionen der Tangenten AB, AD, und der Winkel BED ist die Projection des Winkels BAD. Es ist zu beweisen, dass diese Winkel gleich gross sind.

Da OC auf der Ebene BCD (der Tafel) und CA auf der durch AB und AD gelegten Ebene senkrecht stehen, so sind die Ebenen BAD und BCD beide senkrecht auf der Ebene $OCAK$. Daher ist auch ihr Durchschnitt BD senkrecht auf dieser Ebene und also BD senkrecht auf KO, KC und KA. $\angle COA = \angle CAO$, ferner $\angle COA + \angle OEC = R$ und $\angle CAO + \angle EAK = R$, da CA senkrecht auf AK, folglich ist auch $\angle OEC = \angle EAK$ oder $\angle KEA = \angle KAE$, mithin:

$$KE = KA.$$

Hieraus nun und da KE und KA beide senkrecht auf BD stehen, folgt die Congruenz der beiden Dreiecke ABD und EBD, und hieraus:

$$\angle BED = \angle BAD.$$

XXXIX.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

I.

Geometrischer Lehrsatz.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. III. Fig. 8.) die Linie AD beliebig gezogen ist, so ist immer

$$AB^2 . CD + AC^2 . BD - AD^2 . BC = BC . BD . CD.$$

Beweis.

Man fälle von A auf BC das Perpendikel AE, so ist:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \mp 2BC.CE,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BE\,^{*});$$

also

$$AB^2.CD + AC^2.BD$$

$$= AC^2.CD + AB^2.BD + BC^3 \mp 2BC.CE.CD - 2BC.BE.BD$$

$$= (AD^2 + CD^2 - 2CD.DE).CD + (AD^2 + BD^2 + 2BD.DE).BD$$

$$+ BC^3 \mp 2BC.CE.CD - 2BC.BE.BD$$

$$= AD^2.BC + BC^3 + CD^3 + BD^3$$

$$-2CD^2.DE + 2BD^2.DE \mp 2BC.CE.CD - 2BC.BE.BD$$

$$= AD^2.BC + BC^3 + CD^3 + BD^3$$

$$-2CD^2.(CD \mp CE) + 2BD^2.(BE - BD)$$

$$\mp 2BC.CE.CD - 2BC.BE.BD$$

$$= AD^2.BC + BC^3 - CD^3 = BD^3$$

$$\pm 2CD^2.CE + 2BD^2.BE$$

$$\mp 2BC.CE.CD - 2BC.BE.BD$$

$$= AD^2.BC + BC^3 - CD^3 - BD^3$$

$$\mp 2BD.CE.CD - 2CD.BE.BD$$

$$= AD^2.BC + BC^3 - CD^3 - BD^3 - 2BC.CD.BD$$

$$= AD^2.BC + (CD + BD)^3 - CD^3 - BD^3 - 2BC.CD.BD$$

$$= AD^2.BC + 3CD^2.BD + 3CD.BD^2 - 2BC.CD.BD$$

$$= AD^2.BC + 3BC.CD.BD - 2BC.CD.BD$$

$$= AD^2.BC + BC.CD.BD,$$

---

*) In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist nämlich:

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = AB^2 - BE^2,$$

$$AC^2 = AB^2 + CE^2 - BE^2$$

$$= AB^2 + (BE - BC)^2 - BE^2$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2BC.BE.$$

und folglich

$$AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.BD.CD,$$

w. z. b. w.

Frage: Wie lässt sich dieser Satz einfacher, etwa mittelst des ptolemäischen Lehrsatzes, beweisen?

II.

In seinen Résumés analytiques. A Turin. 1833. p. 10., einem manche hübsche Sachen enthaltenden, aber sehr wenig bekannt zu sein scheinenden Buche, hat Cauchy den folgenden, auf sehr einfachen Gründen beruhenden Beweis des Fermat-schen Theorems von den Primzahlen gegeben, der sich wohl zur Aufnahme in den Schulunterricht eignen dürfte.

1. Aus dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten, den man für solche Exponenten wohl immer in den Schulunterricht aufnehmen wird, folgt unmittelbar und ganz von selbst, dass für einen positiven ganzen Exponenten alle Binomial-Coefficienten positive ganze Zahlen sind.

2. Für ein positives ganzes n ist also der Binomial-Coefficient

$$(n)_k = \frac{n(n-1)\ldots.(n-k+1)}{1.2.3\ldots.k}$$

immer eine positive ganze Zahl. Wenn nun aber, wie wir von jetzt an stets annehmen wollen, n eine Primzahl und k nicht gleich n, also kleiner als n ist, so kann n nicht unter den Primfactoren der Zahlen $1, 2, 3, \ldots. k$ vorkommen, und es muss also, da $(n)_k$ eine positive ganze Zahl ist, das Product $1.2.3\ldots. k$ offenbar in $(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)$ aufgehen, oder der Binomial-Coefficient $(n)_k$ muss ein Vielfaches von n sein.

3. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$(a+1)^n = a^n + (n)_1 a^{n-1} + (n)_2 a^{n-2} + \ldots. + (n)_{n-1} a + 1.$$

Also muss, da nach 2. die Binomial-Coefficienten

$$(n)_1,\quad (n)_2,\quad (n)_3, \ldots. (n)_{n-1}$$

sämmtlich Vielfache von n sind, offenbar $(a+1)^n$, durch n dividirt, denselben Rest lassen, wie $a^n + 1$, durch n dividirt. Folglich muss offenbar auch $(a+1)^n - (a+1)$, durch n dividirt, den-

wird man so lange bei numerischen Rechnungen statt $\log \operatorname{tg} x$ und $\log \sin x$ einfach $\log x$ nehmen dürfen, als einerseits

$$\sec x^{\frac{2}{3}} : \frac{2M dx}{\sin 2x}, \quad \text{andererseits} \quad \cos x^{\frac{1}{3}} : \frac{M dx}{\operatorname{tg} x}$$

noch nicht den Werth erreicht, bis auf welchen genau man die Rechnung durchzuführen wünscht. Will man diese Bestimmung durchführen, so wird man indirect am einfachsten zum Ziele kommen, dabei aber auch die meisten Zahlenwerthe aus den vorhandenen Logarithmentafeln entnehmen können. Will man etwa bis auf 0″,01 genau rechnen, so wird für $dx = 1''$ und $M = 0{,}4342945$

bei $x = 5'$	$\frac{2}{3} \log \sec x^{\frac{2}{3}} = 0{,}0000007$	$\Delta \log \operatorname{tg} x = 14476$,
$x = 10$	„ 12	7238,
$x = 15$	„ 27	4826,

im letztern Falle also $\frac{27}{4826} = 0{,}005 \ldots$, und man wird daher von diesem Werthe von x an nicht mehr 0″,01 verbürgen können, im Fall man $\log x$ statt $\log \operatorname{tg} x$ ansetzt. Aehnlich wird

bei $x = 5'$	$\frac{1}{3} \log \cos x = -0{,}0000002$	$\Delta \log \sin x = 14476$,
$x = 10$	„ 6	7238,
$x = 15$	„ 14	4825,
$x = 20$	„ 24	3619.

Man wird daher hier bis $x = 19'$ statt $\log \sin x$ einfach $\log x$ setzen können, ohne einen Fehler von 0″,01 zu begehen. Bei der oben erwähnten Aufgabe pflegt man, wenn λ und β die Länge und Breite des Planeten, ε die Schiefe, r der Radius Vector, x, y und z die rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den Aequator sind, zur Berechnung der Formeln

$$y = r \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - r \sin \beta \sin \varepsilon,$$
$$z = r \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + r \sin \beta \cos \varepsilon$$

einen Hülfswinkel N so einzuführen, dass man $n \sin N = \sin \beta$, $n \cos N = \cos \beta \sin \lambda$ setzt, wonach $\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda}$ und $n = \frac{\sin \beta}{\sin N}$ $= \frac{\cos \beta \sin \lambda}{\cos N}$, sowie $y = nr \cos(N + \varepsilon)$ und $z = nr \sin(N + \varepsilon)$ wird. Wenn nun β längere Zeit innerhalb der oben gefundenen Grenzen bleibt, wird man einfach den Winkel N aus $N = \frac{\beta}{\sin \lambda}$ und zwar vollständig genau ableiten können, jedoch muss man hier darauf sehen, dass der zu bestimmende Winkel N nicht jene Grenze von 15′ überschreite.

XL.

Neue Darstellung der Theorie der Berührung und Krümmung der Curven.

Von

dem Herausgeber.

Die Darstellung der Theorie der Berührung und Krümmung der Curven, so wie dieselbe in den gangbaren Werken über analytische Geometrie meistens gegeben wird, lässt nach meiner Meinung sowohl rücksichtlich der Allgemeinheit der Formeln, als auch namentlich rücksichtlich der Einfachheit und Bestimmtheit der Begriffe Manches zu wünschen übrig. Besonders in letzterer Beziehung muss ich zunächst bemerken, dass es nach meiner Ueberzeugung bei dieser Theorie, wie überall in der höheren Analysis, lediglich auf die Bestimmung gewisser, bei naturgemässer Entwickelung ganz von selbst mit völliger Bestimmtheit hervortretender Gränzen ankommt, was nicht in allen Darstellungen derselben mit gehöriger Deutlichkeit hervorgehoben und mit gehöriger Consequenz festgehalten wird. Auf diese Gränzen, deren ganz bestimmte Existenz im Raume jedenfalls auch sehr merkwürdig ist, muss daher überall zurückgegangen, dieselben müssen lediglich als Definitionen benutzt, und auf deren Bestimmung muss jederzeit allein das Augenmerk gerichtet werden. Nur auf diesem Wege wird man sich den gegenwärtig in der Analysis, gegenüber den vagen und völlig antiquirten Darstellungs- und Entwickelungs-Methoden der älteren Reihen-Analysis, nur noch auf Geltung Anspruch machen dürfenden Ansichten der neueren strengen Wissenschaft zeitgemäss anschliessen. Dann muss ich ferner bemerken, dass ich es für völlig verfehlt halte, wenn man, wie gegenwärtig überall noch geschieht, die Theorie der sogenannten Curven von einfacher und von doppelter Krümmung von einander scheidet, indem man zuerst jene für sich und dann auch diese für sich betrachtet.

Vielmehr muss man nach meiner Meinung sogleich von vorn herein in völliger Allgemeinheit die sogenannten Curven von doppelter Krümmung einer genauen Untersuchung unterwerfen, und aus der dadurch gewonnenen Theorie dann die Theorie der sogenannten Curven von einfacher Krümmung als einen besonderen Fall ableiten. Namentlich ist es bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft ganz unerlässlich, bei den sogenannten Curven von doppelter Krümmung ausser der ersten Krümmung auch die sogenannte zweite Krümmung einer gleich sorgfältigen Betrachtung zu unterwerfen, was nur zu häufig noch unterlassen wird; dabei wird sich dann zeigen, dass diese zweite Krümmung bei den sogenannten einfach gekrümmten Curven verschwindet, dass die erste und zweite Krümmung in der That nur den doppelt gekrümmten Curven zukommen, und dass nur eben erst hierin die Benennungen: „Curven von einfacher und von doppelter Krümmung" ihre eigentliche wissenschaftliche Rechtfertigung finden.

Nach diesen allgemeinen Grundsätzen werde ich die Theorie der Berührung und Krümmung der Curven in der vorliegenden Abhandlung einer neuen Bearbeitung unterwerfen, und einige Betrachtungen über die Berührung der Flächen hinzufügen, so dass sich als weitere Ausführung dieser Abhandlung die in der Abhandlung Thl. XXVIII. Nr. VIII. entwickelte allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen unmittelbar anschliessen lässt, und dann mit der vorliegenden Abhandlung ein Ganzes bildet.

I.

Den geometrischen Untersuchungen, welche den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung bilden sollen, schicken wir die folgende allgemeine analytische Betrachtung voraus.

Wenn $f(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet, und die Functionen

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen x und $x+\Delta x$ stetig sind, was für gewisse bestimmte Werthe von n bei allen folgenden Untersuchungen jederzeit vorausgesetzt und stets festgehalten werden muss; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze bekanntlich, wenn ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\frac{\Delta x}{1}+f''(x)\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots$$

$$\ldots+f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{\Delta x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}+f^{(n)}(x+\varrho\Delta x)\cdot\frac{\Delta x^n}{1\ldots n},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{R}_n = f^{(n)}(x + \varrho \Delta x) \cdot \frac{\Delta x^n}{1 \ldots . n}$$

setzen, und diese Grösse, wie gewöhnlich, den der Gliederzahl n entsprechenden Rest der Taylor'schen Reihe nennen:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \frac{\Delta x}{1} + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots + f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{\Delta x^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} + \mathfrak{R}_n.$$

Der Rest $\mathfrak{R}_n$ ist in Bezug auf Δx eine Grösse der $n$ten Ordnung, und wenn nun die positive ganze Zahl $m < n$ ist, so ist

$$\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^m} = f^{(n)}(x + \varrho \Delta x) \cdot \frac{\Delta x^{n-m}}{1 \ldots . n}$$

in Bezug auf Δx eine Grösse von der, Null übersteigenden $(n-m)$ten Ordnung. Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so wird, weil ϱ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse ist, $f^{(n)}(x + \varrho \Delta x)$ sich der endlichen, völlig bestimmten Grösse $f^{(n)}(x)$ als seiner Gränze nähern, und Δx^{n-m} nähert sich, weil $n-m$ grösser als Null ist, der Null; also nähert unter den gemachten Voraussetzungen nach dem Obigen

$$\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^m} \text{ sich der Gränze } \frac{0 . f^{(n)}(x)}{1 \ldots . n},$$

folglich der Gränze Null, so dass unter den gemachten Voraussetzungen immer

$$\operatorname{Lim} \frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^m} = 0$$

ist. Ferner ist nach dem Obigen:

$$\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^n} = \frac{f^{(n)}(x + \varrho \Delta x)}{1 \ldots . n},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass, wenn Δx sich der Null nähert,

$$\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^n} \text{ sich der Gränze } \frac{f^{(n)}(x)}{1 \ldots . n}$$

nähert, oder dass unter der gemachten Voraussetzung

$$\operatorname{Lim} \frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^n} = \frac{f^{(n)}(x)}{1 \ldots . n}$$

ist.

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn $f(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet und die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen x und $x+\Delta x$ stetig sind, so ist für ein der Null sich näherndes Δx immer

$$\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^m}=0 \text{ oder } \mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{R}_n}{\Delta x^m}=\frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots.n},$$

jenachdem $m<n$ oder $m=n$ ist.

Von diesem Satze werden wir im Folgenden häufig Anwendung zu machen Gelegenheit finden.

II.

Es sei jetzt eine beliebige, durch zwei Gleichungen zwischen den veränderlichen oder laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ charakterisirte Curve im Raume gegeben *). In dieser Curve denke man sich einen beliebigen, aber bestimmten, durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punkt (x, y, z), und lasse nun x, y, z die zusammen bestehen könnenden Veränderungen Δx, Δy, Δz erleiden, so dass durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ ein zweiter Punkt $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ unserer Curve bestimmt wird. Legen wir nun durch diese beiden Punkte eine Gerade, welche wir überhaupt eine Sekante der Curve nennen wollen, so haben deren Gleichungen bekanntlich die Form

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\Theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\Omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\Pi},$$

welche Gleichungen aber, weil unsere Sekante zugleich durch den Punkt $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ geht, auch bestehen müssen, wenn man in ihnen für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ respective $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ setzt, wodurch man die Gleichungen

$$\frac{\Delta x}{\cos\Theta}=\frac{\Delta y}{\cos\Omega}=\frac{\Delta z}{\cos\Pi}$$

---

*) In der Abhandlung über die Krümmung der Flächen in Theil XXVIII. Nr. VIII. sind die laufenden Coordinaten durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnet worden. Ich habe hier die Bezeichnung dieser Coordinaten durch kleine deutsche Buchstaben vorgezogen, was an sich natürlich keinen Unterschied macht.

erhält, aus denen sich die Gleichungen

$$\cos\Theta.\Delta x = \cos\Theta.\Delta x,$$
$$\cos\Theta.\Delta y = \cos\Omega.\Delta x,$$
$$\cos\Theta.\Delta z = \cos\Pi.\Delta x$$

ergeben. Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil bekanntlich

$$\cos\Theta^2 + \cos\Omega^2 + \cos\Pi^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$\cos\Theta^2(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta x^2,$$

aus welcher sich

$$\cos\Theta = \pm\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\cos\Omega = \cos\Theta\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \cos\Pi = \cos\Theta\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

ist, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander überhaupt

$$\cos\Theta = \pm\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos\Omega = \pm\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos\Pi = \pm\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

ergiebt.

Weil überhaupt zwischen den Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und folglich auch zwischen den Coordinaten x, y, z des gegebenen Punktes der Curve zwei Gleichungen gegeben sind, so kann man immer eine dieser drei Coordinaten als unabhängig variabel, die beiden anderen als davon abhängig oder als Functionen dieser als unabhängig variabel betrachteten Coordinate ansehen. Man kann sich aber auch, was allgemeiner und der Eleganz und Symmetrie der zu entwickelnden Formeln förderlich ist, alle drei Coordinaten x, y, z als Functionen einer anderen beliebigen, als unabhängig variabel betrachteten Grösse, die wir im Allgemeinen durch φ bezeichnen wollen, und ihre Veränderungen durch die Verän-

derungen dieser als unabhängig variabel betrachteten Grösse φ sämmtlich herbeigeführt denken. Thut man das Letztere, und denkt sich also die Veränderungen Δx, Δy, Δz von x, y, z sämmtlich durch die Veränderung $\Delta\varphi$ von φ herbeigeführt, so wird man die obigen Formeln besser unter der Form

$$\cos\Theta = \pm \frac{\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}}{\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta\varphi}},$$

$$\cos\Omega = \pm \frac{\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}}{\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta\varphi}},$$

$$\cos\Pi = \pm \frac{\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}}{\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta\varphi}};$$

also, wenn auch nicht ohne alle Veränderung der vorstehenden Vorzeichen, aber doch jedenfalls immer mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen in den folgenden Formeln auf einander, unter der Form

$$\cos\Theta = \pm \frac{\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}\right)^2}},$$

$$\cos\Omega = \pm \frac{\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}\right)^2}},$$

$$\cos\Pi = \pm \frac{\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}\right)^2}}$$

darstellen.

Lässt man nun $\Delta\varphi$ sich der Null nähern, so werden

$$\cos\Theta, \quad \cos\Omega, \quad \cos\Pi$$

sich respective den Gränzen

$$\pm\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

$$\pm\frac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

$$\pm\frac{\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}$$

nähern, so dass also, wenn wir diese Gränzen von $\cos\Theta$, $\cos\Omega$, $\cos\Pi$ respective durch $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\varpi$ bezeichnen:

$$1)\ \ldots\ \begin{cases}\cos\theta=\pm\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}},\\[2ex] \cos\omega=\pm\frac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}},\\[2ex] \cos\varpi=\pm\frac{\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}\end{cases}$$

ist; und nach dem Obigen sind dann

$$2)\ \ldots\ldots\ \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\varpi},$$

also, nach vorstehenden Formeln,

$$3)\ \ldots\ldots\ \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial\varphi}},$$

die Gränzgleichungen der Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\Theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\Omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\Pi},$$

und charakterisiren daher eine der Lage nach ganz bestimmte, durch den Punkt (x, y, z) gehende Gerade, welche als die Gränze der durch diesen Punkt gehenden Sekanten der Curve zu betrachten oder aufzufassen ist, nämlich als eine der Lage nach ganz bestimmte, durch den Punkt (x, y, z) gehende Gerade, welcher die durch diesen Punkt und irgend einen anderen Punkt der Curve gezogenen Sekanten derselben sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man den letzteren Punkt dem Punkte (x, y, z) immer näher und näher rücken lässt. Diese durch den Punkt (x, y, z) gehende, durch die Gleichungen 2) oder 3) der Lage nach völlig bestimmte Gerade, welche also als die Gränze aller durch den Punkt (x, y, z) gehenden Sekanten der Curve in der oben näher angegebenen Weise aufzufassen ist, nennt man die **Berührende** der Curve in dem Punkte (x, y, z), und dieser Punkt selbst wird ihr **Berührungspunkt** genannt.

Weil bekanntlich

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\partial \varphi, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\partial \varphi, \quad \partial z = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\partial \varphi$$

ist, so kann man die Gleichungen 3) der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Berührenden der Curve auch unter der Form

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{x} - x}{\partial x} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\partial y} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\partial z}$$

schreiben, und die Formeln 1) lassen sich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander auch unter der Form

$$5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \cos\theta = \pm \dfrac{\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}}, \\ \cos\omega = \pm \dfrac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}}, \\ \cos\overline{\omega} = \pm \dfrac{\partial z}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}} \end{cases}$$

darstellen, wobei man sich nur immer x, y, z als Functionen einer gewissen anderen unabhängigen veränderlichen Grösse zu denken hat *).

Setzt man $\varphi = x$, was natürlich verstattet ist, so hat man in den obigen Formeln

*) Diese Bemerkung gilt allgemein für alle im Folgenden vorkommenden ähnlichen Fälle, wo die eigentlich immer hinzuzudenkende, als unabhängig variabel zu betrachtende Grösse φ aus den Formeln weggelassen worden ist, was hier ein für alle Mal bemerkt wird.

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}$$

zu setzen, Substitutionen, deren wirkliche Ausführung nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt, und daher hier und im Folgenden immer dem Leser überlassen bleiben mag.

III.

Jede durch den Punkt (x, y, z) gehende, auf der diesem Punkte entsprechenden Berührenden der Curve senkrecht stehende Gerade heisst eine Normale der Curve in dem Punkte (x, y, z).

Weil jede Normale durch den Punkt (x, y, z) geht, so haben ihre Gleichungen im Allgemeinen die Form

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta_1}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega_1}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}_1},$$

und weil sie auf der Berührenden in dem Punkte (x, y, z) senkrecht steht, so sind die Winkel θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ den beiden Bedingungsgleichungen

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1;$$

also nach 1) den beiden Bedingungsgleichungen

$$6)\ldots\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\theta_1+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\omega_1+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\overline{\omega}_1=0,\\[2mm]\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1;\end{cases}$$

oder den beiden Bedingungsgleichungen

$$7)\ldots\begin{cases}\partial x.\cos\theta_1+\partial y.\cos\omega_1+\partial z.\cos\overline{\omega}_1=0,\\ \cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1\end{cases}$$

unterworfen. Der eine der drei Winkel θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ bleibt immer der willkührlichen Annahme anheim gestellt, und die beiden anderen Winkel sind dann mittelst der zwei obigen Bedingungsgleichungen zu bestimmen, was in der theilweisen Unbestimmtheit der vorliegenden Aufgabe seine unmittelbare Erklärung findet.

Aus den beiden Gleichungen

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1$$

findet man mittelst leichter Rechnung mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$8)\ldots\left\{\begin{aligned}\cos\omega_1&=\frac{-\cos\theta\cos\omega\cos\theta_1\pm\cos\overline{\omega}\sqrt{1-\cos\theta^2-\cos\theta_1{}^2}}{\sin\theta^2},\\ \cos\overline{\omega}_1&=\frac{-\cos\theta\cos\overline{\omega}\cos\theta_1\mp\cos\omega\sqrt{1-\cos\theta^2-\cos\theta_1{}^2}}{\sin\theta^2};\end{aligned}\right.$$

in welche Formeln man nun leicht noch für $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ ihre aus 5) bekannten Ausdrücke einführen könnte, was wir jedoch der Kürze wegen hier unterlassen.

IV.

Die in dem Punkte (x, y, z) auf der diesem Punkte entsprechenden Berührenden der Curve senkrecht stehende Ebene heisst die Normal-Ebene der Curve in dem Punkte (x, y, z), und wird der Lage nach durch zwei durch den Punkt (x, y, z) gelegte Normalen der Curve bestimmt.

Sind nun

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta_1}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega_1}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}_1},$$

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta_2}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega_2}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}_2}$$

die Gleichungen zweier durch den Punkt (x, y, z) gelegter Normalen, und ist

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der demselben Punkte entsprechenden Normal-Ebene der Curve, so hat man, weil in dieser Ebene die beiden in Rede stehenden Normalen liegen müssen, offenbar die beiden Gleichungen:

$$A\cos\theta_1+B\cos\omega_1+C\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$A\cos\theta_2+B\cos\omega_2+C\cos\overline{\omega}_2=0;$$

aus denen sich, wenn G einen gewissen beliebigen Factor bezeichnet, die drei folgenden Gleichungen ergeben *):

*) Wenn man zwischen x, y, z zwei Gleichungen von der Form $ax+by+cz=0$, $a_1x+b_1y+c_1z=0$ hat; so kann man, wenn G einen gewissen beliebigen Factor bezeichnet, immer setzen:

$$x=G(bc_1-cb_1),\quad y=G(ca_1-ac_1),\quad z=G(ab_1-ba_1).$$

$$A = G(\cos\omega_1 \cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_1 \cos\omega_2),$$
$$B = G(\cos\overline{\omega}_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\overline{\omega}_2),$$
$$C = G(\cos\theta_1 \cos\omega_2 - \cos\omega_1 \cos\theta_2).$$

Nun ist aber nach 4.

$$\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 = 0,$$
$$\cos\theta\cos\theta_2 + \cos\omega\cos\omega_2 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_2 = 0;$$

also, wenn wieder G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\theta = G'(\cos\omega_1 \cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_1 \cos\omega_2),$$
$$\cos\omega = G'(\cos\overline{\omega}_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\overline{\omega}_2),$$
$$\cos\overline{\omega} = G'(\cos\theta_1 \cos\omega_2 - \cos\omega_1 \cos\theta_2);$$

wo zur weiteren Bestimmung des Factors G' die Gleichung

$$\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1$$

dienen würde.

Weil nun nach dem Obigen der Factor G offenbar eine ganz willkührliche Grösse ist, so kann auch $G = G'$, also nach dem Obigen

$$A = G'(\cos\omega_1 \cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_1 \cos\omega_2),$$
$$B = G'(\cos\overline{\omega}_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\overline{\omega}_2),$$
$$C = G'(\cos\theta_1 \cos\omega_2 - \cos\omega_1 \cos\theta_2)$$

gesetzt werden, welches, mit den oben stehenden Ausdrücken von

$$\cos\theta,\quad \cos\omega,\quad \cos\overline{\omega}$$

verglichen, unmittelbar zu den folgenden Gleichungen führt:

$$A = \cos\theta,\quad B = \cos\omega,\quad C = \cos\overline{\omega};$$

so dass also die gesuchte Gleichung der Normal-Ebene der Curve in dem Punkte (x, y, z) nach dem Obigen

$$9) \ldots (\mathfrak{x}-x)\cos\theta + (\mathfrak{y}-y)\cos\omega + (\mathfrak{z}-z)\cos\overline{\omega} = 0,$$

also nach 1) oder 5):

$$10) \ldots \frac{\partial x}{\partial\varphi}(\mathfrak{x}-x) + \frac{\partial y}{\partial\varphi}(\mathfrak{y}-y) + \frac{\partial z}{\partial\varphi}(\mathfrak{z}-z) = 0$$

oder

$$11) \quad \partial x.(\mathfrak{x}-x)+\partial y.(\mathfrak{y}-y)+\partial z.(\mathfrak{z}-z)=0$$

ist.

V.

Wenn die Gleichungen der Curve unter der Form

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0,\quad F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

gegeben sind, so dass folglich auch

$$f(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z)=0$$

ist, wo also die Curve eigentlich als der Durchschnitt zweier Flächen betrachtet wird, so setze man der Kürze wegen

$$u=f(x,y,z),\quad U=F(x,y,z).$$

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0;$$

wo alle Differentialquotienten von u und U natürlich partielle Differentialquotienten sind; und wenn nun G'' wieder einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}=G''\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}=G''\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=G''\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Also sind nach 3) die Gleichungen der Berührenden der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y, z) unter der gemachten Voraussetzung:

$$13) \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}},$$

und zur Bestimmung von θ, ω, ϖ hat man nach 1), wenn der Kürze wegen

14)

$$p^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$$

oder

15)

$$p^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \;{}^{*)}$$

gesetzt wird, die folgenden Formeln, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

16) . . .
$$\left\{\begin{aligned}\cos\theta&=\pm\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}}{p},\\ \cos\omega&=\pm\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}}{p},\\ \cos\bar{\omega}&=\pm\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}{p}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichung der Normal-Ebene in dem Punkte (x, y, z) ist nach 10) unter der gemachten Voraussetzung:

17) . . .
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)(\mathfrak{x}-x)\\ +&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)(\mathfrak{y}-y)\\ +&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)(\mathfrak{z}-z)\end{aligned}\right\}=0.$$

VI.

Wenn die gegebene Curve ganz in einer Ebene liegt, deren Gleichung

---

*) Es ist nämlich immer

$$(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2.$$

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}+D=0$$

ist, so kann man im Vorhergehenden offenbar

$$U=Ax+By+Cz+D,$$

folglich

$$\frac{\partial U}{\partial x}=A,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=B,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=C$$

setzen. Also sind nach 13) die Gleichungen der Berührenden in dem Punkte (x, y, z) in diesem Falle:

$$18)\ \ldots\ \frac{\mathfrak{x}-x}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Weil natürlich

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ist, so lässt sich die Gleichung der Ebene, in welcher die Curve liegt, auch unter der Form

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

darstellen; und weil nun offenbar

$$A(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})+B(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})+C(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})=0$$

ist, so erhellet leicht, dass die Berührende jederzeit ganz in der Ebene liegt, in welcher die Curve liegt.

Die Gleichung der Normal-Ebene in dem Punkte (x, y, z) ist nach 17):

$$19)\ \ldots\ \left.\begin{array}{l}(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{x}-x)\\[2ex] +(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{y}-y)\\[2ex] +(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0.$$

Dass diese Ebene auf der Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, senkrecht steht, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst.

Die in der Ebene, in welcher die Curve liegt, liegende Normale der Curve in dem Punkte (x, y, z) ist offenbar die Durch-

schnittslinie dieser Ebene mit der Normal-Ebene in dem Punkte (x, y, z), und wird also durch die beiden Gleichungen

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{x}-x)\\ +(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{y}-y)\\ +(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0$$

charakterisirt. Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn G''' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\mathfrak{x}-x=G'''\{B(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})-C(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})\},$$

$$\mathfrak{y}-y=G'''\{C(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})-A(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})\},$$

$$\mathfrak{z}-z=G'''\{A(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})-B(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})\};$$

oder:

$$\mathfrak{x}-x=G'''\{A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}\},$$

$$\mathfrak{y}-y=G'''\{B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}\},$$

$$\mathfrak{z}-z=G'''\{C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\};$$

folglich sind die Gleichungen der in Rede stehenden Normale:

$$20)\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}-A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-y}{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}-B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z}{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}-C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})}$$

Nimmt man die Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, als Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ an, so ist ihre Gleichung $\mathfrak{z}=0$, und man hat also im Obigen $A=0$, $B=0$, $C=1$, $D=0$ zu setzen. Daher erhält man in diesem Falle nach 18) und 20) als Gleichungen der Berührenden und der Normale für den Punkt (x, y) in der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ offenbar respective die Gleichungen

$$-\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial x}} \text{ und } \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

oder

21)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)=0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{x}-x)-\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{y}-y)=0,$$

wo natürlich u nur eine Function von x und y ist, da allgemein $\mathfrak{z}=0$ ist. Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung in diesem Falle:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=0,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial x}{\partial y};$$

folglich sind nach dem Obigen die Gleichungen der Berührenden und der Normale respective:

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+(\mathfrak{y}-y)=0 \text{ und } -\frac{\partial x}{\partial y}(\mathfrak{x}-x)-(\mathfrak{y}-y)=0$$

oder:

$$22) \ldots \mathfrak{y}-y=\frac{\partial y}{\partial x}(\mathfrak{x}-x) \text{ und } \mathfrak{y}-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(\mathfrak{x}-x),$$

wie hinreichend bekannt ist.

VII.

Zu den bis jetzt betrachteten zwei, durch die Coordinaten x, y, z und $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ bestimmten Punkten unserer Curve wollen wir jetzt einen dritten Punkt derselben hinzufügen, welcher durch die Coordinaten $x-\Delta x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ *) bestimmt

*) Eine Verallgemeinerung der hier absichtlich zuerst in der folgenden Weise angestellten Betrachtung s. m. unten in der Anmerkung.

sein mag, wo also, Dy und Dz die Veränderungen der Coordinaten y und z bezeichnen, die durch die Veränderung $-\Delta x$ von x herbeigeführt werden, so wie Δy und Δz die durch die Veränderung $+\Delta x$ von x herbeigeführten Veränderungen von y und z bezeichnen. Durch diese drei Punkte wollen wir, eben so wie wir vorher durch die beiden Punkte (x, y, z) und $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ eine Gerade legten und dieselbe einer weiteren Betrachtung unterwarfen, jetzt eine Ebene legen, deren Gleichung, da diese Ebene durch den Punkt (x, y, z) geht, im Allgemeinen die Form

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

haben wird. Da die in Rede stehende Ebene aber auch durch die beiden anderen Punkte gehen soll, so muss diese Gleichung auch noch bestehen, wenn man für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ respective $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und $x-\Delta x$, $y+Dy$, $z+Dz$ setzt, wodurch man offenbar die beiden folgenden Gleichungen erhält:

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0,$$
$$A\Delta x-BDy-CDz=0;$$

aus denen sich ferner die drei folgenden Gleichungen:

$$A\Delta x(\Delta z+Dz)+B(\Delta yDz-\Delta zDy)=0,$$
$$B(\Delta y+Dy)+C(\Delta z+Dz)=0,$$
$$C(\Delta yDz-\Delta zDy)-A\Delta x(\Delta y+Dy)=0;$$

oder, wenn wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit Δx^2, Δx, Δx^2 dividiren, auch die drei folgenden Gleichungen:

$$A\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{Dz}{\Delta x}\right)+B\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{Dz}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{Dy}{\Delta x}\right)=0,$$

$$B\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{Dy}{\Delta x}\right)+C\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{Dz}{\Delta x}\right)=0,$$

$$C\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{Dz}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{Dy}{\Delta x}\right)-A\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{Dy}{\Delta x}\right)=0$$

ergeben, aus denen unmittelbar ersichtlich ist, dass es verstattet ist,

$$A=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{Dz}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{Dy}{\Delta x},$$

$$B=-\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{Dz}{\Delta x}\right),$$

$$C=\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{Dy}{\Delta x}$$

zu setzen.

Nehmen wir nun x als die unabhängige veränderliche Grösse an und betrachten y, z als Functionen von x, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \mathrm{R}_2, \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2$$

und

$$\mathrm{D}y = -\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \mathrm{R}_2', \quad \mathrm{D}z = -\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2';$$

wobei man, was man auch im Folgenden nie übersehen darf, zu beachten hat, dass im letzteren Falle $-\Delta x$ die Veränderung ist, welche x erlitten hat. Folglich ist

$$\frac{\Delta y}{x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\mathrm{D}y}{\Delta x} = -\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2'}{\Delta x}, \quad \frac{\mathrm{D}z}{\Delta x} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{\Delta x},$$

also nach dem Obigen:

$$A = -\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\mathfrak{R}_2'}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathrm{R}_2'}{\Delta x}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}\right),$$

woraus man nach leichter Rechnung findet:

$$A = \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x} - \frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x}\right) - \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x} - \frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}\right)$$

$$-\left(\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x}\cdot\frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x} - \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}\right).$$

Ferner ist:

$$B = -\left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x} - \frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x}\right), \quad C = \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x} - \frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}.$$

Weil nun nach dem in I. bewiesenen Satze, wenn Δx sich der Null nähert, auch die Grössen

$$\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x}, \quad \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}, \quad \frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}, \quad \frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x}$$

sich sämmtlich der Null nähern, so nähern unter derselben Voraussetzung auch die Grössen A, B, C sich sämmtlich der Null, und wir werden also auf diese Weise zu keiner durch den Punkt

(x, y, z) gehenden, der Lage nach völlig bestimmten Gränz-Ebene geführt, welcher die durch die vorher betrachteten drei Punkte gelegte Ebene sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, wenn man also die beiden durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und $x-\Delta x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ bestimmten Punkte dem Punkte (x, y, z) immer näher und näher rücken lässt. Ganz anders aber verhält sich die Sache, wenn man, was offenbar verstattet ist,

$$A = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}z}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}y}{\Delta x}\right),$$

$$B = -\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\mathrm{D}z}{\Delta x}\right),$$

$$C = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\mathrm{D}y}{\Delta x}\right)$$

setzt; denn dann wird nach dem Obigen offenbar

$$A = \frac{\partial y}{\partial x}\left\{\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{(-\Delta x)^2}\right\} - \frac{\partial z}{\partial x}\left\{\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x^2} + \frac{\mathrm{R}_2'}{(-\Delta x)^2}\right\}$$
$$-\left(\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x^2}\cdot\frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x} - \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2}\cdot\frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x}\right)$$

und

$$B = -\left\{\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{(-\Delta x)^2}\right\},\quad C = \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x^2} + \frac{\mathrm{R}_2'}{(-\Delta x)^2};$$

und nach dem in 1. bewiesenen Satze nähern sich nun, wenn Δx sich der Null nähert, die Grössen

$$\frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x^2},\quad \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2},\quad \frac{\mathrm{R}_2'}{(-\Delta x)^2},\quad \frac{\mathfrak{R}_2'}{(-\Delta x)^2}$$

respective den Gränzen

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

die Grössen

$$\frac{\mathrm{R}_2'}{-\Delta x},\quad \frac{\mathfrak{R}_2'}{-\Delta x}$$

aber beide der Null; folglich nähern nach dem Obigen die Grössen

$$A,\ B,\ C$$

sich offenbar respective den Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

und die durch die drei oben betrachteten Punkte gelegte Ebene nähert sich also, wenn man Δx sich der Null nähern, wenn man also die durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und $x-\Delta x$, $y+Dy$, $z+Dz$ bestimmten Punkte dem Punkte (x, y, z) immer näher und näher rücken lässt, einer durch den Punkt (x, y, z) gehenden, der Lage nach völlig bestimmten Gränz-Ebene, welche durch die Gleichung

23)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(\mathfrak{x}-x)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\mathfrak{z}-z)=0$$

vollständig charakterisirt, und die **Osculations-Ebene** der Curve in dem Punkte (x, y, z) genannt wird.

Betrachtet man x, y, z sämmtlich als von der veränderlichen Grösse φ abhängig, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \text{also}\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}:\frac{\partial x}{\partial \varphi};$$

und ferner ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2,$$

also:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3}.$$

Ganz eben so ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \varphi}:\frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3}.$$

Hieraus erhält man nun leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^3};$$

und nach 23) ist also offenbar die Gleichung der Osculations-Ebene:

$$24)\quad\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)(\mathfrak{x}-x)\\ +\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)(\mathfrak{y}-y)\\ +\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0,$$

oder auch:

$$25)\quad\left.\begin{array}{l}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)(\mathfrak{x}-x)\\ +(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)(\mathfrak{y}-y)\\ +(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0,$$

wenn man sich nur immer x, y, z sämmtlich als von einer veränderlichen Grösse abhängend denkt.

Anmerkung. Ich habe im Vorhergehenden drei durch die Coordinaten

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z;\quad x,\ y,\ z;\quad x-\Delta x,\ y+\mathrm{D}y,\ z+\mathrm{D}z$$

bestimmte Punkte betrachtet, und bin der Meinung, dass dadurch bei Untersuchungen dieser Art der erforderlichen Allgemeinheit kein Eintrag gethan wird; man würde aber allerdings der Betrachtung noch eine grössere Allgemeinheit haben verleihen können, wenn man überhaupt drei durch die Coordinaten

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z;\quad x,\ y,\ z;\quad x+\alpha\Delta x,\ y+\mathrm{D}y,\ z+\mathrm{D}z$$

bestimmte Punkte betrachtet hätte, wo α einen constanten Factor

bezeichnet, dem man übrigens jeden beliebigen Werth beilegen kann, und Dy und Dz die durch die Veränderung $\alpha\Delta x$ von x herbeigeführten Veränderungen von y und z sind. Unter dieser Voraussetzung würde man auf folgende Art zu schliessen haben.

Da die zu bestimmende Ebene durch den Punkt (x, y, z) gehen soll, so hat ihre Gleichung im Allgemeinen die Form:

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0;$$

weil die Ebene aber auch noch durch die beiden durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und $x+\alpha\Delta x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ bestimmten Punkte gehen soll, so muss

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0,$$
$$\alpha A\Delta x+B\mathrm{D}y+C\mathrm{D}z=0$$

sein. Aus diesen beiden letzteren Gleichungen ergeben sich die drei folgenden Gleichungen:

$$A\Delta x(\alpha\Delta z-\mathrm{D}z)-B(\Delta y\mathrm{D}z-\Delta z\mathrm{D}y)=0,$$
$$B(\alpha\Delta y-\mathrm{D}y)+C(\alpha\Delta z-\mathrm{D}z)=0,$$
$$C(\Delta y\mathrm{D}z-\Delta z\mathrm{D}y)+A\Delta x(\alpha\Delta y-\mathrm{D}y)=0;$$

oder, wenn wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit $\alpha\Delta x^2$, $\alpha\Delta x$, $\alpha\Delta x^2$ dividiren, auch die drei folgenden Gleichungen:

$$A\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)-B\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)=0,$$
$$B\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)+C\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)=0,$$
$$C\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)+A\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)=0;$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass es verstattet ist,

$$A=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x},$$
$$B=\frac{\Delta z}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x},$$
$$C=-\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)$$

zu setzen.

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähert auch $\alpha\Delta x$ sich der Null, und da durch die Veränderung Δx von x die Veränderungen Δy und Δz von y und z, durch die Veränderung $\alpha\Delta x$ von x die Veränderungen $\mathrm{D}y$ und $\mathrm{D}z$ von y und z herbeigeführt werden, so nähern sich nach den Begriffen der Differentialrechnung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta z}{\Delta x},\ \frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x},\ \frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}$$

respective den Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x};$$

also nähern nach dem Obigen A, B, C sich sämmtlich der Null, und wir werden also auf diese Weise zu keiner durch den Punkt (x, y, z) gehenden, der Lage nach völlig bestimmten Gränz-Ebene geführt.

Ganz anders verhält sich aber die Sache, wenn wir, was offenbar auch verstattet ist,

$$A = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right),$$

$$B = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x} - \frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right),$$

$$C = -\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)$$

setzen. Denn nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \mathrm{R}_2,\quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2$$

und

$$\mathrm{D}y = \alpha\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \mathrm{R}_2',\quad \mathrm{D}z = \alpha\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2',$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2}{\Delta x},\quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{R}_2'}{\alpha\Delta x},\quad \frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x}.$$

Folglich ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{Dz}{\alpha\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{Dy}{\alpha\Delta x}=-\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}-\frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x}\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{R_2}{\Delta x}-\frac{R_2'}{\alpha\Delta x}\right)$$

$$+\left(\frac{R_2}{\Delta x}\cdot\frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x}-\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}\cdot\frac{R_2'}{\alpha\Delta x}\right),$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}-\frac{Dz}{\alpha\Delta x}=\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}-\frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{Dy}{\alpha\Delta x}=\frac{R_2}{\Delta x}-\frac{R_2'}{\alpha\Delta x};$$

also nach dem Obigen:

$$A=-\frac{\partial y}{\partial x}\left\{\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2}-\alpha\frac{\mathfrak{R}_2'}{(\alpha\Delta x)^2}\right\}+\frac{\partial z}{\partial x}\left\{\frac{R_2}{\Delta x^2}-\alpha\frac{R_2'}{(\alpha\Delta x)^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{R_2}{\Delta x^2}\cdot\frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x}-\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2}\cdot\frac{R_2'}{\alpha\Delta x}\right),$$

$$B=\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2}-\alpha\frac{\mathfrak{R}_2'}{(\alpha\Delta x)^2},$$

$$C=-\left\{\frac{R_2}{\Delta x^2}-\alpha\frac{R_2'}{(\alpha\Delta x)^2}\right\}.$$

Nähert sich nun Δx und folglich auch $\alpha\Delta x$ der Null, so nähern nach dem in I. bewiesenen Satze

$$\frac{R_2}{\Delta x^2},\quad\frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2},\quad\frac{R_2'}{(\alpha\Delta x)^2},\quad\frac{\mathfrak{R}_2'}{(\alpha\Delta x)^2}$$

sich respective den Gränzen

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{R_2'}{\alpha\Delta x},\quad\frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x}$$

nähern sich beide der Null; also nähern nach dem Obigen die Grössen

$$A,\ B,\ C$$

sich offenbar respective den Gränzen

$$-\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right),\quad\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad-\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\alpha-1)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right),\quad -\tfrac{1}{2}(\alpha-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

woraus sich, weil α jede beliebige Grösse sein kann, ergiebt, dass für die Osculations-Ebene

$$A=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$B=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$C=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gesetzt werden kann, so dass also

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(\mathfrak{x}-x)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der Osculations-Ebene ist, was ganz mit der in 23) gefundenen Gleichung dieser Ebene übereinstimmt.

VIII.

Die Durchschnittslinie der Normal-Ebene mit der Osculations-Ebene nennt man die **Haupt-Normale**, deren Gleichungen also nach 11) und 25)

$$\partial x.(\mathfrak{x}-x)+\partial y.(\mathfrak{y}-y)+\partial z.(\mathfrak{z}-z)=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)(\mathfrak{x}-x)\\ +(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)(\mathfrak{y}-y)\\ +(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0$$

sind.

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht:

$$\left.\begin{array}{l}\{\partial x(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)-\partial z(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\}(\mathfrak{x}-x)\\ -\{\partial z(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)-\partial y(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\}(\mathfrak{y}-y)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\partial y(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)-\partial x(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\}(\mathfrak{y}-y)\\ -\{\partial x(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)-\partial z(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\}(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\partial z(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)-\partial y(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\}(\mathfrak{z}-z)\\ -\{\partial y(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)-\partial x(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\}(\mathfrak{x}-x)\end{array}\right\}=0.$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 y-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial y\}(\mathfrak{x}-x)\\ -\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 x-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial x\}(\mathfrak{y}-y)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 z-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial z\}(\mathfrak{y}-y)\\ -\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 y-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial y\}(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 x-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial x\}(\mathfrak{z}-z)\\ -\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 z-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial z\}(\mathfrak{x}-x)\end{array}\right\}=0;$$

und die Gleichungen der Haupt-Normale sind folglich:

$$26)\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 x-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial x}$$

$$=\frac{y-\mathfrak{y}}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 y-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial y}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 z-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial z}.$$

Sind

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\lambda}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\mu}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\nu}$$

die Gleichungen der in dem Punkte (x, y, z) auf der Osculations-Ebene senkrecht stehenden Geraden, so hat man nach 25) und den allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie die folgenden Gleichungen:

$$(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\mu-(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\cos\lambda=0,$$

$$(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\cos\nu-(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\cos\mu=0,$$

$$(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\cos\lambda-(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\nu=0;$$

und es ist also:

$$(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\lambda=(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\lambda,$$

$$(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\mu=(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\cos\lambda,$$

$$(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\cos\nu=(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\cos\lambda;$$

folglich, wenn man quadrirt und addirt:

$$\cos\lambda=\pm\frac{\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y}{\sqrt{(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)^2+(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)^2+(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)^2}},$$

also nach dem Obigen überhaupt mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

27)

$$\cos\lambda = \pm \frac{\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y}{\sqrt{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2}},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z}{\sqrt{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2}},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\sqrt{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2}}$$

oder:

28)

$$\cos\lambda = \pm \frac{\partial y\partial^2 z - \partial z\partial y^2}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2}},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2}},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial y^2 + \partial z\partial^2 z)^2}}.$$

Also sind die Gleichungen der in dem Punkte (x, y, z) auf der Osculations-Ebene senkrecht stehenden Geraden:

$$29) \ldots \frac{\mathfrak{x} - x}{\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}.$$

Die Gleichungen der Berührenden der Curve in dem Punkte (x, y, z) sind nach 4) bekanntlich:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{\partial x} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\partial y} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\partial z}.$$

Soll diese Berührende in der Osculations-Ebene liegen, so müssen für jedes $\mathfrak{x}$ die Coordinaten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Berührenden der Gleichung 25) der Osculations-Ebene genügen, welches offenbar der Fall sein wird, wenn für jedes $\mathfrak{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \partial x(\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)(\mathfrak{x} - x) \\ + \partial y(\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)(\mathfrak{x} - x) \\ + \partial z(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)(\mathfrak{x} - x) \end{array}\right\} = 0,$$

d. h. wenn identisch

$$\partial x(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)+\partial y(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)+\partial z(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)=0$$

ist; und da dies nun offenbar wirklich der Fall ist, so ergiebt sich, dass die Berührende der Curve in dem Punkte (x, y, z) immer in ihrer demselben Punkte entsprechenden Osculations-Ebene liegt.

Folglich wird die Osculations-Ebene jederzeit durch die Berührende und die Haupt-Normale, deren Gleichungen in 26) gegeben worden sind, bestimmt.

IX.

Wir wollen nun durch die drei in VII. betrachteten, durch die Coordinaten

$$x-\Delta x,\ y+\mathrm{D}y,\ z+\mathrm{D}z;\quad x,\ y,\ z;\quad x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z\ ^{*)}$$

bestimmten Punkte einen Kreis legen, und den Halbmesser dieses Kreises durch R, die Coordinaten seines Mittelpunkts durch X, Y, Z bezeichnen; die Gleichung der Ebene, in welcher dieser Kreis liegt, sei

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Dann haben wir offenbar die Gleichung

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

und ausserdem die Gleichungen:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2,$$

$$(X-x-\Delta x)^2+(Y-y-\Delta y)^2+(Z-z-\Delta z)^2=R^2,$$

$$(X-x+\Delta x)^2+(Y-y-\mathrm{D}y)^2+(Z-z-\mathrm{D}z)^2=R^2.$$

Nun aber wollen wir unser Augenmerk nicht auf die Bestimmung des in Rede stehenden Kreises im Allgemeinen, sondern vielmehr lediglich auf die Bestimmung desjenigen Gränzkreises richten, welchem der vorhergehende Kreis sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, wenn man nämlich die beiden durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und $x-\Delta x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ bestimmten Punkte dem Punkte (x, y, z) immer näher und näher rücken lässt. Diesen

---

*) Auch hier wie in VII. wenden wir zuerst die folgende Betrachtungsweise an, werden dieselbe aber unten in der Anmerkung verallgemeinern.

Kreis, insofern es, worüber eben die folgenden Untersuchungen uns vollständigen Aufschluss geben sollen und werden, einen solchen Gränzkreis wirklich giebt, nennt man den **Krümmungskreis** der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y, z); sein Halbmesser wird der diesem Punkte entsprechende **Krümmungs-Halbmesser** genannt, und sein Mittelpunkt heisst häufig der **Krümmungs-Mittelpunkt**. Auf diesen Krümmungskreis sollen sich von jetzt an der durch R bezeichnete Halbmesser und die durch X, Y, Z bezeichneten Mittelpunkts-Coordinaten beziehen.

Aus dem vorhergehenden allgemeinen Begriffe des Krümmungskreises und dem aus VII. bekannten allgemeinen Begriffe der Osculations-Ebene ergiebt sich auf der Stelle, dass die obige Gleichung

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

nothwendig die Gleichung der Osculations-Ebene in dem Punkte (x, y, z) sein, und dass man also für A, B, C die Coefficienten von $\mathfrak{x}-x$, $\mathfrak{y}-y$, $\mathfrak{z}-z$ in der Gleichung der Osculations-Ebene setzen muss, so dass also A, B, C bekannt sind und eine weitere Bestimmung dieser Coefficienten nicht nöthig ist.

Um aber ferner zu einer Bestimmung von R und X, Y, Z für den Krümmungskreis zu gelangen, subtrahire man je zwei der drei obigen, zwischen diesen Grössen Statt findenden allgemeinen Gleichungen von einander, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x+2(Y-y)\Delta y+2(Z-z)\Delta z\\ -(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x-2(Y-y)\mathrm{D}y-2(Z-z)\mathrm{D}z\\ +(\Delta x^2+\mathrm{D}y^2+\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}4(X-x)\Delta x+2(Y-y)(\Delta y-\mathrm{D}y)+2(Z-z)(\Delta z-\mathrm{D}z)\\ -(\Delta y^2-\mathrm{D}y^2)-(\Delta z^2-\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0;$$

also:

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)+2(Y-y)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+2(Z-z)\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\\ -\left\{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)+2(Y-y)\dfrac{\mathrm{D}y}{-\Delta x}+2(Z-z)\dfrac{\mathrm{D}z}{-\Delta x}\\ +\left\{1+\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{-\Delta x}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{-\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}4(X-x)+2(Y-y)\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+\dfrac{\mathrm{D}y}{-\Delta x}\right)+2(Z-z)\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}+\dfrac{\mathrm{D}z}{-\Delta x}\right)\\ -\left\{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{-\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x-\left\{\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{-\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähern sich $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\dfrac{\mathrm{D}y}{-\Delta x}$ beide der Gränze $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, und eben so nähern sich $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ und $\dfrac{\mathrm{D}z}{-\Delta x}$ beide der Gränze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; also nähern alle drei obigen Gleichungen, wenn X, Y, Z nun die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises bezeichnen, sich offenbar der Gränzgleichung

$$X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

und wir haben folglich zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunkts des Krümmungskreises die zwei folgenden Gleichungen:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$X-x+\frac{\partial y}{\partial x}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial x}(Z-z)=0;$$

wo A, B, C ihre aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben.

Da aber diese zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises noch nicht hinreichen, so müssen wir noch eine dritte Gleichung zwischen diesen drei Coordinaten zu finden suchen, wozu wir auf folgende Art gelangen. Durch Subtraction der beiden aus dem Obigen bekannten allgemeinen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x+2(Y-y)\Delta y+2(Z-z)\Delta z\\ -(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x-2(Y-y)\mathrm{D}y-2(Z-z)\mathrm{D}z\\ +(\Delta x^2+\mathrm{D}y^2+\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0$$

von einander erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}2(Y-y)(\varDelta y+\mathrm{D}y)+2(Z-z)(\varDelta z+\mathrm{D}z)\\ -(2\varDelta x^2+\varDelta y^2+\mathrm{D}y^2+\varDelta z^2+\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}(Y-y)\dfrac{\varDelta y+\mathrm{D}y}{\varDelta x^2}+(Z-z)\dfrac{\varDelta z+\mathrm{D}z}{\varDelta x^2}\\ -\left\{1+\tfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2+\tfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{-\varDelta x}\right)^2+\tfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2+\tfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{-\varDelta x}\right)^2\right\}\end{array}\right\}=0.$$

Nach VII. ist aber bekanntlich

$$\varDelta y=\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x+\mathrm{R}_2,\quad \varDelta z=\frac{\partial z}{\partial x}\varDelta x+\mathfrak{R}_2$$

und

$$\mathrm{D}y=-\frac{\partial y}{\partial x}\varDelta x+\mathrm{R}_2',\quad \mathrm{D}z=-\frac{\partial z}{\partial x}\varDelta x+\mathfrak{R}_2';$$

also:

$$\varDelta y+\mathrm{D}y=\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_2',\quad \varDelta z+\mathrm{D}z=\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_2';$$

und folglich:

$$\frac{\varDelta y+\mathrm{D}y}{\varDelta x^2}=\frac{\mathrm{R}_2}{\varDelta x^2}+\frac{\mathrm{R}_2'}{(-\varDelta x)^2},$$

$$\frac{\varDelta z+\mathrm{D}z}{\varDelta x^2}=\frac{\mathfrak{R}_2}{\varDelta x^2}+\frac{\mathfrak{R}_2'}{(-\varDelta x)^2}.$$

Nähert sich nun $\varDelta x$ der Null, so ist:

$$\mathrm{Lim}\frac{\varDelta y+\mathrm{D}y}{\varDelta x^2}=\mathrm{Lim}\frac{\mathrm{R}_2}{\varDelta x^2}+\mathrm{Lim}\frac{\mathrm{R}_2'}{(-\varDelta x)^2},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\varDelta z+\mathrm{D}z}{\varDelta x^2}=\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{R}_2}{\varDelta x^2}+\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{R}_2'}{(-\varDelta x)^2};$$

also nach dem in I. bewiesenen Satze:

$$\mathrm{Lim}\frac{\varDelta y+\mathrm{D}y}{\varDelta x^2}=\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\varDelta z+\mathrm{D}z}{\varDelta x^2}=\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

und weil sich nun

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x},\quad \frac{\mathrm{D}y}{-\varDelta x},\quad \frac{\varDelta z}{\varDelta x},\quad \frac{\mathrm{D}z}{-\varDelta x}$$

respective den Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

nähern, so ist, wenn X, Y, Z nun wieder die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises bezeichnen, die Gränzgleichung der obigen Gleichung offenbar:

$$(Y-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(Z-z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}=0,$$

und wir haben daher jetzt zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunkts des Krümmungskreises die drei folgenden, zu dieser Bestimmung vollständig hinreichenden Gleichungen:

$$30)\quad \begin{cases} A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \\ X-x+\dfrac{\partial y}{\partial x}(Y-y)+\dfrac{\partial z}{\partial x}(Z-z)=0, \\ 1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(Y-y)-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Z-z)=0; \end{cases}$$

wo A, B, C immer ihre aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben.

Hat man aber die Coordinaten X, Y, Z mittelst dieser drei Gleichungen bestimmt, so erhält man den Halbmesser R des Krümmungskreises mittelst der folgenden, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formel:

$$31)\quad \ldots\quad R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2},$$

so dass also jetzt alle zur vollständigen Bestimmung des Krümmungskreises erforderlichen Elemente als bekannt betrachtet werden können.

Anmerkung. Auf ähnliche Art wie bei der Osculations-Ebene in VII. könnte man auch diese Betrachtungen noch etwas verallgemeinern. Man betrachte nämlich wie dort die drei durch die Coordinaten

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z;\quad x,\ y,\ z;\quad x+\alpha\Delta x,\ y+\mathrm{D}y,\ z+\mathrm{D}z$$

bestimmten Punkte; dann hat man mit Beibehaltung aller im Obigen gebrauchten Zeichen die folgenden Gleichungen:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

und

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2,$$

$$(X-x-\Delta x)^2+(Y-y-\Delta y)^2+(Z-z-\Delta z)^2=R^2,$$

$$(X-x-\alpha\Delta x)^2+(Y-y-\mathrm{D}y)^2+(Z-z-\mathrm{D}z)^2=R^2.$$

Subtrahirt man je zwei der drei letzten Gleichungen von einander, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\,\Delta x+2(Y-y)\,\Delta y+2(Z-z)\,\Delta z\\-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2\alpha(X-x)\,\Delta x+2(Y-y)\,\mathrm{D}y+2(Z-z)\,\mathrm{D}z\\-(\alpha^2\Delta x^2+\mathrm{D}y^2+\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(1-\alpha)(X-x)\,\Delta x+2(Y-y)(\Delta y-\mathrm{D}y)+2(Z-z)(\Delta z-\mathrm{D}z)\\-(1-\alpha^2)\,\Delta x^2-(\Delta y^2-\mathrm{D}y^2)-(\Delta z^2-\mathrm{D}z^2)\end{array}\right\}=0;$$

also, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe durch Δx, $\alpha\Delta x$, Δx dividirt:

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)+2(Y-y)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+2(Z-z)\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\\-\left\{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)+2(Y-y)\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}+2(Z-z)\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\\-\alpha\left\{1+\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)^2\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(1-\alpha)(X-x)+2(Y-y)\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-\alpha\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)+2(Z-z)\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}-\alpha\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)\\-\left\{(1-\alpha^2)+\left[\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2-\alpha^2\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)^2\right]+\left[\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2-\alpha^2\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)^2\right]\right\}\Delta x\end{array}\right\}=0.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähert auch $\alpha\Delta x$ sich der Null, und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad\frac{\Delta z}{\Delta x},\quad\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x},\quad\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}$$

nähern sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x},\quad\frac{\partial z}{\partial x},\quad\frac{\partial y}{\partial x},\quad\frac{\partial z}{\partial x};$$

also nähern die drei obigen Gleichungen sich offenbar respective den Gränzgleichungen:

$$2\{X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}\}=0,$$

$$2\{X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}\}=0,$$

$$2(1-\alpha)\{X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}\}=0;$$

folglich alle drei der gemeinschaftlichen Gränzgleichung

$$X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

so dass wir also jetzt zur Bestimmung von X, Y, Z die zwei folgenden Gleichungen haben:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$X-x+\frac{\partial y}{\partial x}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial x}(Z-z)=0.$$

Um die zur Bestimmung dieser drei unbekannten Grössen noch erforderliche dritte Gleichung zu erhalten, subtrahire man die beiden aus dem Obigen unmittelbar sich ergebenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x+2(Y-y)\Delta y+2(Z-z)\Delta z\\ -(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}2(X-x)\Delta x+2(Y-y)\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha}+2(Z-z)\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha}\\ -(\alpha\Delta x^2+\dfrac{\mathrm{D}y^2}{\alpha}+\dfrac{\mathrm{D}z^2}{\alpha})\end{array}\right\}=0$$

von einander, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}2(Y-y)(\Delta y-\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha})+2(Z-z)(\Delta z-\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha})\\ -\left\{(1-\alpha)\Delta x^2+(\Delta y^2-\dfrac{\mathrm{D}y^2}{\alpha})+(\Delta z^2-\dfrac{\mathrm{D}z^2}{\alpha})\right\}\end{array}\right\}=0,$$

also, wenn man durch Δx^2 dividirt, die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}2(Y-y)\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x^2}-\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x^2}\right)+2(Z-z)\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x^2}-\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x^2}\right)\\ -\left\{1-\alpha+\left[\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2-\alpha\left(\dfrac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)^2\right]+\left[\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2-\alpha\left(\dfrac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)^2\right]\right\}\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + R_2, \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2$$

und

$$Dy = \alpha\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + R_2', \quad Dz = \alpha\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \mathfrak{R}_2';$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{R_2}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x}$$

und

$$\frac{Dy}{\alpha\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{R_2'}{\alpha\Delta x}, \quad \frac{Dz}{\alpha\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x};$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{Dy}{\alpha\Delta x} = \frac{R_2}{\Delta x} - \frac{R_2'}{\alpha\Delta x},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} - \frac{Dz}{\alpha\Delta x} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x} - \frac{\mathfrak{R}_2'}{\alpha\Delta x};$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x^2} - \frac{Dy}{\alpha\Delta x^2} = \frac{R_2}{\Delta x^2} - \alpha\frac{R_2'}{(\alpha\Delta x)^2},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x^2} - \frac{Dz}{\alpha\Delta x^2} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2} - \alpha\frac{\mathfrak{R}_2'}{(\alpha\Delta x)^2}.$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähern nach dem in I. bewiesenen Satze

$$\frac{R_2}{\Delta x^2}, \quad \frac{\mathfrak{R}_2}{\Delta x^2}, \quad \frac{R_2'}{(\alpha\Delta x)^2}, \quad \frac{\mathfrak{R}_2'}{(\alpha\Delta x)^2}$$

sich respective den Gränzen

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad \frac{Dy}{\alpha\Delta x}, \quad \frac{Dz}{\alpha\Delta x}$$

nähern sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Also nähern die Grössen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x^2}-\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x^2},\quad \frac{\Delta z}{\Delta x^2}-\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x^2}$$

sich respective den Gränzen

$$\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad \tfrac{1}{2}(1-\alpha)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

und die Grössen

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2-\alpha\left(\frac{\mathrm{D}y}{\alpha\Delta x}\right)^2,\quad \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2-\alpha\left(\frac{\mathrm{D}z}{\alpha\Delta x}\right)^2$$

nähern sich respective den Gränzen

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\quad (1-\alpha)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2.$$

Folglich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, die obige Gleichung sich offenbar der Gränz-Gleichung

$$(1-\alpha)\left\{(Y-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(Z-z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\right\}=0,$$

also der Gränz-Gleichung

$$(Y-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(Z-z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}=0$$

oder

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Z-z)=0.$$

Daher haben wir jetzt zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z die drei Gleichungen

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$X-x+\frac{\partial y}{\partial x}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial x}(Z-z)=0,$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Z-z)=0;$$

und dann zur Bestimmung des Halbmessers R die Formel

$$R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2},$$

was mit den oben in 30) und 31) gefundenen Resultaten genau übereinstimmt.

Diese Methode, den Krümmungskreis einer beliebigen Curve zu bestimmen, scheint mir durch die ganz strengen Gränzen-Betrachtungen, auf denen sie beruhet, sich vorzüglich zu empfehlen, und mehr als alle sonst bekannten Methoden der eigentlichen Natur der Sache zu entsprechen.

X.

Betrachten wir x, y, z sämmtlich als Functionen einer veränderlichen Grösse φ, so ist nach den schon in VII. gegebenen Entwickelungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}:\frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \varphi}:\frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3}.$$

Wegen der ersteren Ausdrücke nimmt zunächst die zweite der Gleichungen 30) unmittelbar die folgende Form an:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial \varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial \varphi}(Z-z)=0\,.$$

Ferner ist

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Z-z)$$

$$=\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}(Z-z)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2}-\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial \varphi}(Z-z)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2}\cdot\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}},$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial \varphi}(Z-z)=-\frac{\partial x}{\partial \varphi}(X-x)$$

ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Z-z)=\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}(X-x)+\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}(Z-z)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2},$$

so dass die dritte der Gleichungen 30) die folgende Form annimmt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}(X-x)-\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}(Z-z)=0,$$

und man also zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z die drei folgenden Gleichungen hat:

32)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial \varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial \varphi}(Z-z)=0.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}(X-x)-\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}(Z-z)=0;$$

wo nach 24):

$$33)\quad\left\{\begin{aligned}A&=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2},\\B&=\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2},\\C&=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\right.$$

Kürzer kann man auch setzen:

$$34)\quad \begin{cases} A=\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y, \\ B=\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z, \\ C=\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x \end{cases}$$

und

35)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$\partial x.(X-x)+\partial y.(Y-y)+\partial z.(Z-z)=0,$$

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2-\partial^2 x.(X-x)-\partial^2 y.(Y-y)-\partial^2 z.(Z-z)=0;$$

so wie

$$36)\quad R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2},$$

wie wir von jetzt an thun wollen.

XI.

Wir wollen jetzt zur Auflösung der drei Gleichungen 35) und zur vollständigen Entwickelung des Halbmessers des Krümmungskreises übergehen.

Aus den zwei ersten der Gleichungen 35) ergiebt sich, wenn G_1 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$X-x=G_1(B\partial z-C\partial y),$$

$$Y-y=G_1(C\partial x-A\partial z),$$

$$Z-z=G_1(A\partial y-B\partial x);$$

und folglich, wenn man diese Ausdrücke in die dritte der Gleichungen 35) einführt:

$$G_1=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{(B\partial z-C\partial y)\partial^2 x+(C\partial x-A\partial z)\partial^2 y+(A\partial y-B\partial x)\partial^2 z}.$$

Wegen der Gleichungen 34) ist aber, wie man leicht findet:

$$B\partial z-C\partial y$$

$$=(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2 x-(\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z)\partial x,$$

$$C\partial x - A\partial z$$
$$= (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial y,$$
$$A\partial y - B\partial x$$
$$= (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 z - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial z;$$

folglich:

$$(B\partial z - C\partial y)\partial^2 x + (C\partial x - A\partial z)\partial^2 y + (A\partial y - B\partial x)\partial^2 z$$
$$= (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2$$
$$= (\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2,$$

und daher offenbar:

37)

$$X - x$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 x - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial x\}}{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2},$$

$$Y - y$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial y\}}{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2},$$

$$Z - z$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 z - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial z\}}{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)^2}$$

oder

38)

$$X - x$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 x - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial x\}}{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2},$$

$$Y - y$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial y\}}{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2},$$

$$Z - z$$
$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 z - (\partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y + \partial z\partial^2 z)\partial z\}}{(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x)^2 + (\partial y\partial^2 z - \partial z\partial^2 y)^2 + (\partial z\partial^2 x - \partial x\partial^2 z)^2}.$$

Die Summe der Quadrate der zweiten Factoren in den Zählern dieser Brüche ist, wie man auf der Stelle übersieht:

$$(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)$$
$$\times\{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2)-(\partial x\partial^2x+\partial y\partial^2y+\partial z\partial^2z)^2\}$$

oder

$$(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\{(\partial x\partial^2y-\partial y\partial^2x)^2+(\partial y\partial^2z-\partial z\partial^2y)^2+(\partial z\partial^2x-\partial x\partial^2z)^2\};$$

also ist:

$$39)\ \ldots\ R^2=\frac{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)^3}{(\partial x\partial^2y-\partial y\partial^2x)^2+(\partial y\partial^2z-\partial z\partial^2y)^2+(\partial z\partial^2x-\partial x\partial^2z)^2}$$

und folglich:

$$40)\ldots R=\frac{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\partial x\partial^2y-\partial y\partial^2x)^2+(\partial y\partial^2z-\partial z\partial^2y)^2+(\partial z\partial^2x-\partial x\partial^2z)^2}}$$

oder auch

41)

$$R=\frac{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2)-(\partial x\partial^2x+\partial y\partial^2y+\partial z\partial^2z)^2}}.$$

Weil nach 37) oder 38)

$$\frac{X-x}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2x-(\partial x\partial^2x+\partial y\partial^2y+\partial z\partial^2z)\partial x}$$

$$=\frac{Y-y}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2y-(\partial x\partial^2x+\partial y\partial^2y+\partial z\partial^2z)\partial y}$$

$$=\frac{Z-z}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\partial^2z-(\partial x\partial^2x+\partial y\partial^2y+\partial z\partial^2z)\partial z}$$

ist, indem der gemeinschaftliche Werth dieser drei Brüche offenbar

$$=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{(\partial x\partial^2y-\partial y\partial^2x)^2+(\partial y\partial^2z-\partial z\partial^2y)^2+(\partial z\partial^2x-\partial x\partial^2z)^2}$$

oder

$$\left(\frac{R}{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}\right)^2$$

ist, so ergiebt sich unmittelbar aus 26) das merkwürdige Resultat, dass der Mittelpunkt des Krümmungskreises immer in der Haupt-Normale liegt.

XII.

Wir wollen uns jetzt eine ganz in einer Ebene, deren Gleichung

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}+D=0$$

sein mag, liegende Curve, und in dieser Curve einen gewissen, durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkt denken, welcher natürlich auch in der in Rede stehenden Ebene liegt, so dass also die Gleichung dieser Ebene auch unter der Form

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

dargestellt werden kann.

Die Gleichungen einer Normale unserer Curve in dem Punkte (x, y, z) seien

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta_1}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega_1}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}_1},$$

so ist nach 6):

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\theta_1+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\omega_1+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\overline{\omega}_1,$$

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1.$$

Soll nun aber diese Normale in der Ebene der Curve liegen, so muss

$$A\cos\theta_1+B\cos\omega_1+C\cos\overline{\omega}_1=0$$

sein, und man kann also wegen dieser und der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn G_1' einen beliebigen Factor bezeichnet,

$$\cos\theta_1=G_1'\left(B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right),$$

$$\cos\omega_1=G_1'\left(C\frac{\partial z}{\partial\varphi}-A\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),$$

$$\cos\overline{\omega}_1=G_1'\left(A\frac{\partial y}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)$$

setzen, so dass also die Gleichungen unserer Normale offenbar die folgenden sind:

$$42) \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{B\frac{\partial z}{\partial \varphi}-C\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{C\frac{\partial x}{\partial \varphi}-A\frac{\partial z}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{A\frac{\partial y}{\partial \varphi}-B\frac{\partial x}{\partial \varphi}}.$$

Für einen andern beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1) der Curve, dessen Coordinaten

$$x_1=x+\Delta x,\ y_1=y+\Delta y,\ z_1=z+\Delta z$$

sein mögen, sind also die Gleichungen der in der Ebene der Curve liegenden Normale offenbar:

$$\frac{\mathfrak{x}-x_1}{B\frac{\partial z}{\partial \varphi}-C\frac{\partial y}{\partial \varphi}+(B\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}-C\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi})}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-y_1}{C\frac{\partial x}{\partial \varphi}-A\frac{\partial z}{\partial \varphi}+(C\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}-A\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi})}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z_1}{A\frac{\partial y}{\partial \varphi}-B\frac{\partial x}{\partial \varphi}+(A\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}-B\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi})}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$U=B\frac{\partial z}{\partial \varphi}-C\frac{\partial y}{\partial \varphi},\quad \Delta U=B\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}-C\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$V=C\frac{\partial x}{\partial \varphi}-A\frac{\partial z}{\partial \varphi},\quad \Delta V=C\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}-A\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

$$W=A\frac{\partial y}{\partial \varphi}-B\frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \Delta W=A\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}-B\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi};$$

$$U_1=U+\Delta U,\ V_1=V+\Delta V,\ W_1=W+\Delta W$$

und bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden in derselben Ebene liegenden Normalen durch X, Y, Z; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{X}-x}{U}=\frac{\mathrm{Y}-y}{V}=\frac{\mathrm{Z}-z}{W},$$

$$\frac{\mathrm{X}-x_1}{U_1}=\frac{\mathrm{Y}-y_1}{V_1}=\frac{\mathrm{Z}-z_1}{W_1}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, mit Rücksicht darauf, dass

$$x_1 - x = \Delta x,\ y_1 - y = \Delta y$$

ist:

$$\frac{\mathrm{X}-x}{U} = \frac{\mathrm{Y}-y}{V} = \frac{\mathrm{Z}-z}{W} = \frac{V_1\Delta x - U_1\Delta y}{UV_1 - VU_1}$$

oder, wie man leicht findet:

$$\frac{\mathrm{X}-x}{U} = \frac{\mathrm{Y}-y}{V} = \frac{\mathrm{Z}-z}{W} = \frac{V\Delta x - U\Delta y + (\Delta V\Delta x - \Delta U\Delta y)}{U\Delta V - V\Delta U},$$

oder auch:

$$\frac{\mathrm{X}-x}{U} = \frac{\mathrm{Y}-y}{V} = \frac{\mathrm{Z}-z}{W}$$

$$= \frac{V\frac{\Delta x}{\Delta\varphi} - U\frac{\Delta y}{\Delta\varphi} + \left(\frac{\Delta V}{\Delta\varphi}\Delta x - \frac{\Delta U}{\Delta\varphi}\Delta y\right)}{U\frac{\Delta V}{\Delta\varphi} - V\frac{\Delta U}{\Delta\varphi}}.$$

Lassen wir nun $\Delta\varphi$ sich der Null nähern, und bezeichnen die Gränzen, denen X, Y, Z sich nähern, durch X, Y, Z; so ist offenbar

$$\frac{X-x}{U} = \frac{Y-y}{V} = \frac{Z-z}{W} = \frac{V\frac{\partial x}{\partial\varphi} - U\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{U\frac{\partial V}{\partial\varphi} - V\frac{\partial U}{\partial\varphi}};$$

und bezeichnen wir die Entfernung des Punktes (X, Y, Z) von dem Punkte (x, y, z) durch R, so dass also

$$R^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$$

ist, so ist

$$R^2 = \frac{(U^2+V^2+W^2)\left(V\frac{\partial x}{\partial\varphi} - U\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2}{\left(U\frac{\partial V}{\partial\varphi} - V\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)^2}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von U, V, W ergiebt sich durch Differentiation sogleich:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = B\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - C\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = C\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} - A\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = A\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - B\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2};$$

und es ist also, wie man leicht findet:

$$V\frac{\partial x}{\partial \varphi} - U\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$= C\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right\} - \left(A\frac{\partial x}{\partial \varphi} + B\frac{\partial y}{\partial \varphi} + C\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

und

$$U\frac{\partial V}{\partial \varphi} - V\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$= C\left\{\begin{array}{l} A\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right) \\ + B\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right) \\ + C\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right) \end{array}\right\}.$$

Weil aber auch der Punkt (x_1, y_1, z_1) in der Ebene der Curve liegt, so ist

$$A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z) = 0$$

oder

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0,$$

oder auch

$$A\frac{\Delta x}{\Delta \varphi} + B\frac{\Delta y}{\Delta \varphi} + C\frac{\Delta z}{\Delta \varphi} = 0,$$

und folglich, wenn man sich $\Delta\varphi$ der Null nähern lässt und zur Gränz-Gleichung übergeht:

$$A\frac{\partial x}{\partial \varphi} + B\frac{\partial y}{\partial \varphi} + C\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

also nach dem Obigen:

$$V\frac{\partial x}{\partial\varphi}-U\frac{\partial y}{\partial\varphi}=C\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}.$$

Folglich ist:

43)
$$\frac{X-x}{B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi}}=\frac{Y-y}{C\frac{\partial x}{\partial\varphi}-A\frac{\partial z}{\partial\varphi}}=\frac{Z-z}{A\frac{\partial y}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi}}$$
$$=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{A\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)+C\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)}$$

und

44)
$$R^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^2\left\{\left(A\frac{\partial y}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(C\frac{\partial x}{\partial\varphi}-A\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}}{\left\{A\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)+C\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\right\}^2}$$

Leicht findet man mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$U\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+V\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+W\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$
$$=A\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)+C\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right),$$

so dass man also auch setzen kann:

45)

$$X-x=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{U\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+V\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+W\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}U,$$

$$Y-y=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{U\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+V\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+W\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}V,$$

$$Z-z=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{U\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+V\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+W\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}W$$

und

46)

$$R^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}(U^2+V^2+W^2)}{\left(U\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+V\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+W\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2}.$$

Auf der Stelle ergiebt sich nun aus dem Obigen, dass

$$U\frac{\partial x}{\partial\varphi}+V\frac{\partial y}{\partial\varphi}+W\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

ist; also ist nach 45) offenbar auch:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial\varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial\varphi}(Z-z)=0,$$

und ferner ist nach 45) offenbar auch:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}(X-x)+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}(Z-z)=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Nimmt man nun hierzu noch die offenbar gültige Gleichung

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

so sieht man, dass zwischen den drei Coordinaten X, Y, Z die folgenden Gleichungen Statt finden:

47)
$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial\varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial\varphi}(Z-z)=0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}(X-x)-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}(Z-z)=0.$$

Weil nach dem Obigen
$$A\frac{\partial x}{\partial\varphi}+B\frac{\partial y}{\partial\varphi}+C\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$
und folglich auch
$$A\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=0$$
ist, so ist
$$A\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)-B\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)=0,$$
$$B\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)-C\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)=0,$$
$$C\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)-A\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)=0;$$
woraus sich ergiebt, dass man
$$48)\quad\ldots\quad\begin{cases}A=\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2},\\[2ex]B=\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},\\[2ex]C=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\end{cases}$$
setzen kann.

Weil nun die Gleichungen 47) und 48) respective mit den Gleichungen 32) und 33) genau übereinstimmen, so sieht man, dass bei ganz in einer Ebene liegenden Curven der Mittelpunkt des Krümmungskreises auch aus dem folgenden Gesichtspunkte, der bei Curven dieser Art sich oft vortheilhaft in Anwendung bringen lässt, aufgefasst werden kann:

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises in einem gewissen Punkte einer ganz in einer Ebene liegenden Curve ist die Gränze,

welcher sich der Durchschnittspunkt der in diesem Punkte in der Ebene der Curve errichteten Normale derselben mit der in einem anderen beliebigen Punkte der Curve in deren Ebene errichteten Normale immer mehr und mehr nähert, wenn man diesen letzteren Punkt dem ersteren immer näher und näher rücken lässt.

XIII.

Die Gleichungen der Berührenden der Curve in dem Punkte (x, y, z) sind nach 3) bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}},$$

und wenn θ, ω, ϖ für diese Berührende ihre gewöhnliche Bedeutung haben und G einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$\cos\theta=G\frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \cos\omega=G\frac{\partial y}{\partial \varphi},\quad \cos\varpi=G\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Sind nun

$$\cos\theta+\Delta\cos\theta,\quad \cos\omega+\Delta\cos\omega,\quad \cos\varpi+\Delta\cos\varpi$$

die Cosinus der Winkel, welche eine andere Berührende in einem zweiten Punkte der Curve mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, und bezeichnet w den Winkel beider Berührenden; so ist bekanntlich

$$\cos w$$
$$=\cos\theta(\cos\theta+\Delta\cos\theta)+\cos\omega(\cos\omega+\Delta\cos\omega)+\cos\varpi(\cos\varpi+\Delta\cos\varpi),$$

also, weil

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\varpi^2=1$$

ist,

$$\cos w=1+\cos\theta\Delta\cos\theta+\cos\omega\Delta\cos\omega+\cos\varpi\Delta\cos\varpi$$

Es ist aber auch

$$1=(\cos\theta+\Delta\cos\theta)^2+(\cos\omega+\Delta\cos\omega)^2+(\cos\varpi+\Delta\cos\varpi)^2$$
$$=1+2\cos\theta\Delta\cos\theta+2\cos\omega\Delta\cos\omega+2\cos\varpi\Delta\cos\varpi$$
$$+(\Delta\cos\theta)^2+(\Delta\cos\omega)^2+(\Delta\cos\varpi)^2,$$

also

$$\cos\theta\Delta\cos\theta+\cos\omega\Delta\cos\omega+\cos\varpi\Delta\cos\varpi$$
$$=-\tfrac{1}{2}\{(\Delta\cos\theta)^2+(\Delta\cos\omega)^2+(\Delta\cos\varpi)^2\}$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\cos w = 1 - \tfrac{1}{2}\{(\Delta\cos\theta)^2 + (\Delta\cos\omega)^2 + (\Delta\cos\overline{\omega})^2\},$$

also, wie hieraus sogleich folgt:

$$4\sin\tfrac{1}{2}w^2 = (\Delta\cos\theta)^2 + (\Delta\cos\omega)^2 + (\Delta\cos\overline{\omega})^2,$$

und daher:

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}w}{\frac{1}{2}w}\cdot\frac{w}{\Delta\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\cos\theta}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\omega}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\overline{\omega}}{\Delta\varphi}\right)^2.$$

Lässt man nun $\Delta\varphi$ sich der Null nähern, so nähert natürlich auch w sich der Null; und wenn man dann in vorstehender Gleichung zu den Gränzen übergeht, so erhält man die Gleichung:

$$\text{Lim}.\left(\frac{w}{\Delta\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial\cos\theta}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos\omega}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Aus den Gleichungen

$$\cos\theta = G\frac{\partial x}{\partial\varphi},\quad \cos\omega = G\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad \cos\overline{\omega} = G\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial\varphi} = G\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial G}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\varphi} = G\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial G}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\varphi} = G\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial G}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi};$$

nach dem Obigen ist aber offenbar:

$$G^2 = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^{-1},$$

also:

$$G\frac{\partial G}{\partial\varphi}$$

$$= -\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^{-2}\cdot\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right\},$$

folglich:

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{G\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^2},$$

und daher nach dem Obigen, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial\varphi}=G\frac{\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\varphi}=G\frac{\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\varphi}=G\frac{\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2};$$

woraus sich, wenn man diese Grössen quadrirt und addirt, nach dem Obigen leicht

$$\text{Lim.}\left(\frac{w}{\Delta\varphi}\right)^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\right)^2\right\}-\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}\right\}^2}{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^2}$$

oder

$$\text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta\varphi}\right)^2$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2}{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^2},$$

und folglich, wenn, wie gewöhnlich, R den Krümmungshalbmesser der Curve in dem Punkte (x, y, z) bezeichnet, nach 39):

$$49)\quad \ldots\; \text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta\varphi}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{R^2}$$

ergiebt.

Bezeichnet s einen bei dem Punkte (x, y, z) sich endigenden Bogen der Curve, so ist bekanntlich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$50)\quad \ldots\ldots\; \text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta\varphi}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}{R^2}$$

oder

$$\text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta\varphi}\right)^2=\frac{\text{Lim}.\left(\frac{\varDelta s}{\varDelta\varphi}\right)^2}{R^2},$$

woraus man leicht

$$\text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta\varphi}:\frac{\varDelta s}{\varDelta\varphi}\right)^2=\frac{1}{R^2}$$

oder

$$51)\quad \ldots\ldots\; \text{Lim}.\left(\frac{w}{\varDelta s}\right)^2=\frac{1}{R^2},$$

und folglich

$$52)\quad \ldots\; \text{Lim}\frac{w}{\varDelta s}=\pm\frac{1}{R}$$

schliesst, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\varDelta s$ positiv oder negativ ist.

XIV.

Die Gleichungen der in dem Punkte (x, y, z) auf der Osculations-Ebene senkrecht stehenden Geraden sind nach 29):

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}},$$

und wenn wieder θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ für diese Normale ihre bekannte Bedeutung haben und G_1 einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$\cos\theta_1=G_1\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$\cos\omega_1=G_1\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$\cos\overline{\omega}_1=G_1\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right).$$

Ist w_1 der von zwei Osculations-Ebenen, also der von den Normalen auf diesen Osculations-Ebenen eingeschlossene Winkel, so ist

$$\cos w_1=\cos\theta_1(\cos\theta_1+\varDelta\cos\theta_1)+\cos\omega_1(\cos\omega_1+\varDelta\cos\omega_1)$$
$$+\cos\overline{\omega}_1(\cos\overline{\omega}_1+\varDelta\cos\overline{\omega}_1),$$

woraus man ganz wie in XIII. die Gleichung

$$\operatorname{Lim}\cdot\left(\frac{w_1}{\varDelta\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial\cos\theta_1}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\omega_1}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\overline{\omega}_1}{\partial\varphi}\right)^2$$

erhält.

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{\partial\cos\theta_1}{\partial\varphi}=G_1\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial \varphi^3}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial \varphi^3}\right)+\frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$\frac{\partial\cos\omega_1}{\partial\varphi}=G_1\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial \varphi^3}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial \varphi^3}\right)+\frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$\frac{\partial\cos\overline{\omega}_1}{\partial\varphi}=G_1\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial \varphi^3}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial \varphi^3}\right)+\frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right)$$

und

$$G_1{}^2 = \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2 \right\}^{-1},$$

also:

$$G_1\frac{\partial G_1}{\partial\varphi} = - \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2 \right\}^{-2}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right) \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right) \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right) \end{array} \right\},$$

woraus sich, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{array}{rl} P = & \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right) \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right) \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right) \end{array}$$

setzen, die Gleichung

$$\frac{\partial G_1}{\partial\varphi} = - G_1{}^3 P$$

ergiebt. Also ist nach dem Obigen, wenn wir der Kürze wegen noch

$$Q^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right)^2$$

setzen, offenbar:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2 &= G_1{}^2 Q^2 + 2G_1 P \frac{\partial G_1}{\partial\varphi} + \frac{\left(\frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\right)^2}{G_1{}^2} \\ &= G_1{}^2 Q^2 - 2G_1{}^4 P^2 + G_1{}^4 P^2, \end{aligned}$$

folglich:

$$\mathrm{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2 = G_1{}^2(Q^2 - G_1{}^2P^2).$$

Der Zähler von $Q^2 - G_1{}^2P^2$ ist

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2 +\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2\right\}\\
&\times\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right)^2 +\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right)^2\right\}\\
&-\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right)\\
+&\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right)\\
+&\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right)\end{aligned}\right\}^2\\
=&\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right)\\
-&\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right)\end{aligned}\right\}^2\\
+&\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right)\\
-&\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\right)\end{aligned}\right\}^2\\
+&\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\right)\\
-&\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\right)\end{aligned}\right\}^2 \;{}^{*)}
\end{aligned}$$

und allgemein:

---

*) S. V. Note auf S. 373.

$$\{(b_1c_2-c_1b_2)(c_1a_3-a_1c_3)-(c_1a_2-a_1c_2)(b_1c_3-c_1b_3)\}^2$$
$$+\{(c_1a_2-a_1c_2)(a_1b_3-b_1a_3)-(a_1b_2-b_1a_2)(c_1a_3-a_1c_3)\}^2$$
$$+\{(a_1b_2-b_1a_2)(b_1c_3-c_1b_3)-(b_1c_2-c_1b_2)(a_1b_3-b_1a_3)\}^2$$
$$=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\{a_3(b_1c_2-c_1b_2)+b_3(c_1a_2-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)\}^2,$$

also der obige Zähler:

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ \qquad+\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\end{array}\right\}^2,$$

und der Nenner von $Q^2-G_1{}^2P^2$ ist:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2;$$

also ist:

53) . . . . $\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\\ \times\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ \qquad+\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\end{array}\right\}^2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2\\ \qquad+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2\end{array}\right\}^2}.$$

Bekanntlich ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2,$$

also

$$\frac{\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2:\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}\right)^2:\text{Lim.}\left(\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\right)^2=\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta\varphi}:\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\right)^2=\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta s}\right)^2,$$

und folglich:

54) . . . . $\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta s}\right)^2$

$$=\left\{\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^3 y}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^3 z}{\partial\varphi^3}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2}\right\}^2$$

oder auch

55) . . . . $\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta s}\right)^2$

$$=\left\{\frac{\partial^3 x(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)+\partial^3 y(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)+\partial^3 z(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)}{(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)^2+(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)^2+(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)^2}\right\}^2$$

oder

56) . . . . $\text{Lim.}\left(\frac{w_1}{\Delta s}\right)^2$

$$=\left\{\frac{\partial x(\partial^2 y\partial^3 z-\partial^2 z\partial^3 y)+\partial y(\partial^2 z\partial^3 x-\partial^2 x\partial^3 z)+\partial z(\partial^2 x\partial^3 y-\partial^2 y\partial^3 x)}{(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)^2+(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)^2+(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)^2}\right\}^2,$$

also:

57) . . . . $\text{Lim}\,\frac{w_1}{\Delta s}$

$$=\pm\frac{\partial x(\partial^2 y\partial^3 z-\partial^2 z\partial^3 y)+\partial y(\partial^2 z\partial^3 x-\partial^2 x\partial^3 z)+\partial z(\partial^2 x\partial^3 y-\partial^2 y\partial^3 x)}{(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)^2+(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)^2+(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)^2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem Δs positiv oder negativ ist.

Die absoluten Werthe der Grössen

$$\text{Lim}\,\frac{w}{\Delta s}\ \text{und}\ \text{Lim}\,\frac{w_1}{\Delta s}$$

nennt man respective die erste Krümmung und die zweite Krümmung der Curve in dem Punkte (x, y, z). Liegt die Curve ganz in einer Ebene, so kann man diese Ebene selbst als Ebene der xy annehmen, wo dann $\partial z=\partial^2 z=\partial^3 z=0$ ist, und nach 57) folglich die zweite Krümmung verschwindet. Daher kommen nur

den nicht ganz in einer Ebene liegenden Curven zwei Krümmungen zu, die erste und die zweite, und dieselben werden daher mit Recht **Curven von doppelter Krümmung** genannt. Den ganz in einer Ebene liegenden Curven kommt nur die erste Krümmung zu, weshalb dieselben mit Recht **Curven von einfacher Krümmung** heissen.

XV.

Wir wollen jetzt wieder annehmen, dass unsere Curve durch zwei Gleichungen von der Form

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0, \quad F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0$$

charakterisirt sei, so dass also auch

$$f(x, y, z)=0, \quad F(x, y, z)=0$$

ist, und setzen der Kürze wegen wie schon früher auch jetzt

$$u=f(x, y, z), \quad U=F(x, y, z).$$

Dann ist bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0;$$

woraus man, wenn der Kürze wegen

$$\sigma= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

$$\Sigma= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

gesetzt wird, nach den Regeln der Differentialrechnung ferner die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=-\sigma,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=-\Sigma$$

erhält. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$$
$$=\Sigma\frac{\partial u}{\partial z}-\sigma\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$
$$=\Sigma\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}$$
$$=\Sigma\frac{\partial u}{\partial y}-\sigma\frac{\partial U}{\partial y};$$

also, weil bekanntlich nach 12), wenn wir für das dortige G'' der Kürze wegen jetzt $-G$ schreiben:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

ist, auch:

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}=G(\Sigma\frac{\partial u}{\partial z}-\sigma\frac{\partial U}{\partial z}),$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=G(\Sigma\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma\frac{\partial U}{\partial x}),$$
$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=G(\Sigma\frac{\partial u}{\partial y}-\sigma\frac{\partial U}{\partial y})$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=G(\sigma\frac{\partial U}{\partial z}-\Sigma\frac{\partial u}{\partial z}),$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}=G(\sigma\frac{\partial U}{\partial x}-\Sigma\frac{\partial u}{\partial x}),$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=G(\sigma\frac{\partial U}{\partial y}-\Sigma\frac{\partial u}{\partial y}).$$

Setzen wir nun im Folgenden der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
v= & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \\
& +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \\
& +\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\
& +2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\
& +2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\
& +2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V= & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \\
& +\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \\
& +\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\
& +2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\
& +2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\
& +2\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right);
\end{aligned}$$

so ist offenbar

$$\sigma=G^2 v,\quad \Sigma=G^2 V$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=G^3\left(v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}=G^3\left(v\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=G^3\left(v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Setzen wir nun noch der Kürze wegen:

$$s^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$S^2=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2,$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z};$$

so ist nach dem Obigen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=G^2\left\{\begin{array}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\\ +\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\end{array}\right\}$$

$$=G^2(s^2S^2-Q^2)$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2$$

$$=G^6\{(v\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x})^2+(v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y})^2+(v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z})^2\}$$

$$=G^6(v^2S^2+V^2s^2-2vVQ).$$

Ferner ist:

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$=G^4\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)(v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y})\\ -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)(v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z})\end{array}\right\}$$

$$=G^4\left\{\begin{array}{l}v\left[\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right)\right]\\ +V\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)-\frac{\partial U}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=G^4\{v(Q\frac{\partial U}{\partial x}-S^2\frac{\partial u}{\partial x})+V(Q\frac{\partial u}{\partial x}-s^2\frac{\partial U}{\partial x})\},$$

und also auf diese Weise überhaupt:

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

$$=G^4\{v(Q\frac{\partial U}{\partial x}-S^2\frac{\partial u}{\partial x})+V(Q\frac{\partial u}{\partial x}-s^2\frac{\partial U}{\partial x})\},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$

$$=G^4\{v(Q\frac{\partial U}{\partial y}-S^2\frac{\partial u}{\partial y})+V(Q\frac{\partial u}{\partial y}-s^2\frac{\partial U}{\partial y})\},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$=G^4\{v(Q\frac{\partial U}{\partial z}-S^2\frac{\partial u}{\partial z})+V(Q\frac{\partial u}{\partial z}-s^2\frac{\partial U}{\partial z})\}.$$

Mittelst der hier entwickelten Formeln erhält man nun nach 24) für die Gleichung der Osculations-Ebene den folgenden Ausdruck:

$$58)\quad\ldots\quad\left.\begin{array}{l}(v\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{x}-x)\\+(v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{y}-y)\\+(v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0;$$

und für die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises und dessen Halbmesser erhält man nach 38) und 40) die folgenden merkwürdigen Ausdrücke:

59)

$$X-x=\frac{(s^2S^2-Q^2)\{v(Q\frac{\partial U}{\partial x}-S^2\frac{\partial u}{\partial x})+V(Q\frac{\partial u}{\partial x}-s^2\frac{\partial U}{\partial x})\}}{v^2S^2+V^2s^2-2vVQ},$$

$$Y-y=\frac{(s^2S^2-Q^2)\{v(Q\frac{\partial U}{\partial y}-S^2\frac{\partial u}{\partial y})+V(Q\frac{\partial u}{\partial y}-s^2\frac{\partial U}{\partial y})\}}{v^2S^2+V^2s^2-2vVQ},$$

$$Z-z=\frac{(s^2S^2-Q^2)\{v(Q\frac{\partial U}{\partial z}-S^2\frac{\partial u}{\partial z})+V(Q\frac{\partial u}{\partial z}-s^2\frac{\partial U}{\partial z})\}}{v^2S^2+V^2s^2-2vVQ}$$

und

$$60) \quad . \; . \; . \; . \quad R=\frac{(s^2S^2-Q^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{v^2S^2+V^2s^2-2vVQ}},$$

die in dieser Allgemeinheit wohl noch nicht gegeben worden sind.

XVI.

Wir wollen uns nun eine durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

charakterisirte Fläche und auf derselben einen durch die Coordinaten x, y, z gegebenen Punkt denken, wo also auch

$$f(x,y,z)=0$$

ist, und, wenn $f(x,y,z)$ im Allgemeinen als eine Function von x, y, z betrachtet wird,

$$u=f(x,y,z)$$

gesetzt werden soll.

Unter der die Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührenden Ebene verstehen wir nun die durch diesen Punkt gehende Ebene, in welcher die berührenden Geraden aller durch den Punkt (x, y, z) in oder auf der Fläche gezogenen Curven liegen.

Zu der Bestimmung dieser Ebene gelangen wir auf folgende Weise.

Die Gleichungen jeder durch den Punkt (x, y, z) auf der Fläche gezogenen Curve haben im Allgemeinen die Form

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},z)=0,\quad F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0;$$

wo also auch

$$F(x,y,z)=0$$

ist, und, wenn $F(x,y,z)$ überhaupt als eine Function von x, y, z betrachtet wird,

$$U=F(x,y,z)$$

gesetzt werden soll.

Nach 13) sind

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}$$

die Gleichungen der Berührenden der durch die Gleichungen

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0, \quad F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0$$

charakterisirten Curve in dem Punkte (x, y, z). Die Gleichung einer beliebigen durch diesen Punkt gelegten Ebene sei

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Soll nun in dieser Ebene die vorhergehende Berührende liegen, so muss

$$\left.\begin{array}{l} A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ +B\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right) \\ +C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right) \end{array}\right\}=0$$

oder

$$(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial U}{\partial x}+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial U}{\partial y}+(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

sein. Diese Gleichung muss aber, wenn

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der die gegebene Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührenden Ebene sein soll, weil in dieser Ebene die Berührenden **aller** durch den Punkt (x, y, z) auf der Fläche gezogenen Curven liegen müssen, für jedes U erfüllt sein, welches nur der Fall sein kann, wenn

$$B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

$$A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

ist, woraus sich, wenn G_1 einen beliebigen Factor bezeichnet,

$$A=G_1\frac{\partial u}{\partial x},\quad B=G_1\frac{\partial u}{\partial y},\quad C=G_1\frac{\partial u}{\partial z}$$

und folglich nach dem Obigen als Gleichung der die Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührenden Ebene die Gleichung

$$61) \quad \ldots \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0$$

ergiebt.

Sind nun

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}}$$

die Gleichungen der in dem Punkte (x, y, z) auf der berührenden Ebene senkrecht stehenden Geraden, welche man die **Normale** der gegebenen krummen Fläche in dem Punkte (x, y, z) nennt, und

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta_1}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega_1}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}_1},$$

die Gleichungen einer beliebigen durch den Punkt (x, y, z) in der berührenden Ebene gezogenen Geraden; so muss

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=0$$

sein. Weil aber die vorstehende Gerade in der berührenden Ebene liegen soll, so muss nach 61)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega_1+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}_1=0$$

sein, und aus den beiden Gleichungen

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega_1+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}_1=0$$

folgt nun:

$$(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})\cos\omega_1=(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})\cos\theta_1,$$

$$(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})\cos\overline{\omega}_1=(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})\cos\theta_1;$$

woraus sich, wenn man quadrirt und addirt, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1,$$

die Gleichung

$$(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})^2\sin\theta_1{}^2$$

$$=\{(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})^2\}\cos\theta_1{}^2$$

oder

$$(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y} - \cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})^2 \tang\theta_1{}^2$$

$$= (\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})^2$$

ergiebt, welche Gleichung, weil die Normale auf allen durch den Punkt (x, y, z) in der berührenden Ebene gezogenen Geraden senkrecht stehen muss, für jeden Werth von $\tang\theta_1$ gelten muss, was nur dann der Fall sein kann, wenn

$$\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y} - \cos\omega\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0;$$

also wenn

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} - \cos\omega\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ist, woraus sich, wenn G_2 einen gewissen Factor bezeichnet,

$$\cos\theta = G_2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\omega = G_2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos\overline{\omega} = G_2\frac{\partial u}{\partial z}$$

ergiebt. Folglich sind nach dem Obigen

$$62) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

die Gleichungen der Normale der krummen Fläche in dem Punkte (x, y, z).

XVII.

Auf der durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

charakterisirten Fläche denken wir uns wieder durch den in derselben liegenden Punkt (x, y, z), wo also

$$f(x, y, z) = 0$$

ist, eine beliebige durch die Gleichungen

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0, \quad F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

charakterisirte Curve gezogen, so dass also auch

$$F(x, y, z) = 0$$

ist, und setzen der Kürze wegen wieder

$$u = f(x, y, z), \quad U = F(x, y, z).$$

Die Gleichungen der Berührenden der Curve in dem Punkte (x, y, z) sind nach 13):

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}.$$

Die Gleichungen der Normale der Fläche in dem Punkte (x, y, z) sind nach 62):

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Die Gleichung der durch diese beiden Geraden gelegten Ebene sei

$$A'(\mathfrak{x}-x) + B'(\mathfrak{y}-y) + C'(\mathfrak{z}-z) = 0,$$

so dass also

$$A'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)+B'\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)+C'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$
$$= 0,$$

$$A'\frac{\partial u}{\partial x} + B'\frac{\partial u}{\partial y} + C'\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ist, und folglich

$$A' = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$B' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$C' = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

oder

$$A'=\frac{\partial U}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

$$B'=\frac{\partial U}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

$$C'=\frac{\partial U}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

gesetzt werden kann. Nach den in XV. gebrauchten Bezeichnungen ist also

$$A'=s^2\frac{\partial U}{\partial x}-Q\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$B'=s^2\frac{\partial U}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$C'=s^2\frac{\partial U}{\partial z}-Q\frac{\partial u}{\partial z}$$

und folglich die Gleichung der in Rede stehenden Ebene:

63)

$$(s^2\frac{\partial U}{\partial x}-Q\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{x}-x)+(s^2\frac{\partial U}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{y}-y)+(s^2\frac{\partial U}{\partial z}-Q\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Die Gleichung der Osculations-Ebene ist nach 58):

$$(v\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{x}-x)+(v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{y}-y)+(v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{z}-z)=0,$$

wo wir der Kürze wegen

$$A''=v\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$B''=v\frac{\partial U}{\partial y}-V\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$C''=v\frac{\partial U}{\partial z}-V\frac{\partial u}{\partial z}$$

setzen wollen.

Mittelst leichter Rechnung findet man

$$A'^2+B'^2+C'^2=s^4S^2+s^2Q^2-2s^2Q^2=s^2(s^2S^2-Q^2)$$

und

$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = v^2 S^2 + V^2 s^2 - 2v VQ.$$

Ferner ist

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = (s^2 \frac{\partial U}{\partial x} - Q\frac{\partial u}{\partial x})(v\frac{\partial U}{\partial x} - V\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$+ (s^2 \frac{\partial U}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial y})(v\frac{\partial U}{\partial y} - V\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$+ (s^2 \frac{\partial U}{\partial z} - Q\frac{\partial u}{\partial z})(v\frac{\partial U}{\partial z} - V\frac{\partial u}{\partial z})$$

$$= vs^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\}$$

$$+ VQ \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\}$$

$$- vQ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$- Vs^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= vs^2 S^2 + Vs^2 Q - vQ^2 - Vs^2 Q,$$

also

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = v(s^2 S^2 - Q^2).$$

Bezeichnet nun J den von der durch die Berührende und die Normale gelegten Ebene mit der Osculations-Ebene eingeschlossenen Winkel, so ist

$$\cos J^2 = \frac{(A'A'' + B'B'' + C'C'')^2}{(A'^2 + B'^2 + C'^2)(A''^2 + B''^2 + C''^2)},$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$64) \quad . \; . \; . \quad \cos J^2 = \frac{v^2 (s^2 S^2 - Q^2)}{s^2 (v^2 S^2 + V^2 s^2 - 2v VQ)},$$

und folglich, weil nach 60)

$$R^2 = \frac{(s^2 S^2 - Q^2)^3}{v^2 S^2 + V^2 s^2 - 2v VQ}$$

ist:

$$65) \quad . \; . \; . \; . \quad \cos J^2 = \left\{ \frac{vR}{s(s^2 S^2 - Q^2)} \right\}^2,$$

welchen Ausdruck ich für sehr merkwürdig halte.

Leicht findet man auch:

$$66) \quad \ldots \quad \sin J^2 = \frac{(s^2 V - vQ)^2}{s^2(v^2 S^2 + V^2 s^2 - 2vVQ)},$$

und folglich:

$$67) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tang} J^2 = \frac{(s^2 V - vQ)^2}{v^2(sS^2 - Q^2)}.$$

Weil rational

$$68) \quad \ldots\ldots \quad \cos J = \pm \frac{vR}{s(s^2 S^2 - Q^2)}$$

ist, so ist dieser Ausdruck jedenfalls der merkwürdigste.

Durch den Punkt (x, y, z) wollen wir uns nun einen ebenen Schnitt unserer durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

charakterisirten Fläche gelegt denken, dessen Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} + \mathfrak{D} = 0$$

sein mag, so dass also auch

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D} = 0$$

ist, und im Allgemeinen

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}$$

gesetzt werden soll. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} = \mathfrak{A}, \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} = \mathfrak{B}, \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = \mathfrak{C}$$

und die sämmtlichen zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{U}$ verschwinden also. Bezeichnen wir nun den Krümmungshalbmesser des ebenen Schnitts in dem Punkte (x, y, z) durch $\mathfrak{R}$, und setzen der Kürze wegen

$$S^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2,$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial z}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}= & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial z}-\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial y})^2\\ & +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial x}-\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial z})^2\\ & +\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial x})^2\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial z}-\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial y})(\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial x}-\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial z})\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial x}-\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial z})(\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial x})\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(\mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial x})(\mathfrak{B}\frac{\partial u}{\partial z}-\mathfrak{C}\frac{\partial u}{\partial y});\end{aligned}$$

so ist nach 60), weil im vorliegenden Falle wegen der verschwindenden zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{U}$, welches hier an die Stelle von U in XV. tritt, die dort durch V bezeichnete Grösse offenbar selbst verschwindet:

69) . . . . . . $\mathfrak{R}^2=\frac{(s^2\mathfrak{S}^2-\mathfrak{Q}^2)^3}{\mathfrak{v}^2\mathfrak{S}^2}.$

Lassen wir jetzt den durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}+\mathfrak{B}\mathfrak{y}+\mathfrak{C}\mathfrak{z}+\mathfrak{D}=0$$

oder

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}-x)+\mathfrak{B}(\mathfrak{y}-y)+\mathfrak{C}(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirten ebenen Schnitt mit der vorher durch die Berührende der durch die Gleichungen

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0,\quad F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

charakterisirten Curve in dem Punkte (x, y, z) und die demselben Punkte entsprechende Normale unserer durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

charakterisirten Fläche gelegten Ebene zusammenfallen, so müssen wir nach dem Obigen

$$\mathfrak{A}=A',\quad \mathfrak{B}=B',\quad \mathfrak{C}=C'$$

setzen, wo nach dem Obigen bekanntlich:

$$A'=s^2\frac{\partial U}{\partial x}-Q\frac{\partial u}{\partial x},\quad B'=s^2\frac{\partial U}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial y},\quad C'=s^2\frac{\partial U}{\partial z}-Q\frac{\partial u}{\partial z}$$

XLI.

Ueber drei geometrische Aufgaben und über eine Eigenschaft der Ellipse.

Von
Herrn Otto Böklen
zu Sulz a. N. in Würtemberg.

I. Ueber drei geometrische Aufgaben.

(Taf. VIII. Fig. 1. und Fig. 2.)

Nachstehende Aufgaben stehen in naher Verbindung mit einander: 1. Die Trisektion des Winkels. 2. Es ist ein rechter Winkel gegeben und ein Punkt; durch letztern eine Gerade zu ziehen, so dass das von den Schenkeln des Winkels abgeschnittene Stück derselben eine bestimmte Länge habe. 3. Von einem Punkte Normalen auf eine Ellipse zu fällen.

Ich beginne damit, den Zusammenhang zwischen den Aufgaben 2. und 3. nachzuweisen. Es sei (Taf. VIII. Fig. 1.) $OA=a$ die grosse, $OB=b$ die kleine Halbaxe einer Ellipse. Auf dem Quadranten AB liege ein Punkt M, dessen Abscisse $=x$ ist; man ziehe die Normale von M, welche OA in L und die Verlängerung von BO in N trifft, setze

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=k^2,$$

so ist

$$OL=k^2x,\quad ON=k^2\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Man nehme nun auf OA den Punkt l an, so dass

$$Ol=\frac{a}{b}.OL=k^2\frac{a}{b}x,$$

so ist $Nl = \frac{a^2 - b^2}{b}$ von konstanter Länge. Wenn also bei 2. α der gegebene Punkt ist, durch welchen eine Linie von der Länge λ gezogen werden soll, so bestimme man auf den Schenkeln des rechten Winkels die Längen $OA = a$ und $OB = b$ so, dass die Grössen a und b der Gleichung $\lambda = \frac{a^2 - b^2}{b}$ genügen, fälle von α auf die Verlängerung von BO das Perpendikel $\alpha\beta$ und bestimme darauf den Punkt γ durch die Proportion $\alpha\beta : \gamma\beta = a : b$, fälle von γ auf die Ellipse AB eine Normale, welche OA in L und die Verlängerung von BO in N trifft, ziehe $N\alpha$, welche verlängert OA in l begegnet, so ist Nl die gesuchte Linie.

Die Aufgabe 1. ist ein spezieller Fall von der Aufgabe 2., wie aus folgender, an einem andern Orte schon veröffentlichten, aber wohl sehr wenig bekannten Darstellung erhellen wird. Man beschreibe von der Spitze H (Taf. VIII. Fig. 2.) des zu theilenden Winkels GHE aus mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}\lambda$ einen Kreis, welcher die Schenkel des Winkels in E und G trifft, verlängere EH bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in K, ziehe den Durchmesser $l'N'$, welcher den Winkel GHK halbirt, und durch K eine Sehne KO', welche $l'N'$ in α' schneidet, dass $\alpha'O' = O'H = \frac{1}{2}\lambda$, so ist $GHO' = \frac{1}{3}GHE$, wie sich sehr leicht beweisen lässt: denn $O'\alpha'H = O'H\alpha' = K + GHl'$, also $GHO' = K = \frac{1}{2}O'HE$. Die Aufgabe ist nun darauf reduzirt, durch K eine Sehne KO' zu ziehen, welche $l'N'$ in α' schneidet, so dass $\alpha'O'$ eine bestimmte Länge habe, hier gleich dem Halbmesser des Kreises. Zu diesem Zwecke ziehe man zwei Linien, welche sich in einem Punkte O rechtwinklig kreuzen und die Gerade $O\alpha$, welche mit jenen Linien Winkel bildet gleich $KO'l'$ und $KO'N'$, mache $O\alpha = \frac{1}{2}\lambda$, ziehe durch α eine Gerade, welche jene Linien in l und N trifft, so dass $lN = \lambda$; trage auf den Durchmesser $l'N'$ die Grösse $l'\alpha' = l\alpha$ an, ziehe die Sehne KO', welche durch α' geht, und endlich den Halbmesser $O'H$, so ist $GHO' = \frac{1}{3}GHE$.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun, dass die Aufgaben 2. und 3., welche, algebraisch behandelt, wie bekannt, auf Gleichungen vom vierten Grade führen, und dass die Aufgabe 1., die sich durch eine Gleichung vom dritten Grade ausdrücken lässt, welche aber der irreducible Fall ist, übereinstimmt mit der Aufgabe 2., wenn die Entfernung des Punkts, durch welchen eine Gerade von der Länge λ gelegt werden soll, von der Spitze O des rechten Winkels $= \frac{1}{2}\lambda$ ist. Auch hier hat die Aufgabe vier Auflösungen, wovon jedoch Eine leicht zu finden ist, wenn man nämlich von dem gegebenen Punkte aus mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}\lambda$ einen Kreis beschreibt.

Wenn endlich dieser Punkt auf der Halbirungslinie des rechten Winkels liegt, so erhält man das Problem des **Pappus**, welches elementar aufgelöst wird.

In Band 48. von **Crelle's Journal** hat **Joachimsthal** eine Auflösung der Aufgabe 3. mitgetheilt, welche im Folgenden zu Grunde gelegt ist, um die Trisektion des Winkels mittelst einer Ellipse und eines Kreises auszuführen. Es sei, wie oben, GHE der zu theilende Winkel; man beschreibe mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}\lambda$ von H aus einen Kreis, $GH = EH = \frac{1}{2}\lambda$, verlängere EH nach K und ziehe den Durchmesser $l'N'$, welcher GHK halbirt. Nun konstruire man eine Ellipse, deren grosse Halbaxe $OA = \frac{2}{3}\lambda$, während die kleine $= \frac{1}{3}\lambda$ ist, ziehe durch O eine Linie, welche mit der kleinen Axe der Ellipse einen Winkel bildet $= \frac{1}{2}KHN'$, und nehme auf derselben den Punkt α an, $O\alpha = \frac{1}{2}\lambda$; ziehe $\alpha\beta$ senkrecht auf die kleine Axe oder ihre Verlängerung, halbire $\alpha\beta$ in γ. Von γ aus sind nun Normalen auf die Ellipse zu fällen. Eine dieser Normalen kann nach dem Obigen sogleich gezogen werden, sie schneide die Ellipse in n.

Man ziehe von A eine Linie senkrecht auf γn, welche der Ellipse in m begegnet. Ferner werde von A aus eine Linie gezogen, welche senkrecht auf γO steht und die Ellipse in p trifft; man ziehe die Tangente in p, welche den Kreis, dessen Durchmesser die grosse Axe ist, in q und s trifft, endlich werde noch durch die Punkte q, s, m ein Kreis gezogen, welcher der Ellipse in den drei weiteren Punkten m', m'', m''' begegnet, so sind die drei Linien, welche durch γ rechtwinklig gegen Am', Am'' und Am''' sich ziehen lassen, die drei übrigen Normalen der Ellipse. Man hat nun nur noch die Punkte, wo sie die kleine Axe treffen, mit α zu verbinden, und erhält vier Linien, welche durch α gehen und von welchen die Axen Stücke abschneiden $= \lambda$; es sei lN eines dieser Stücke; man mache $l'\alpha' = l\alpha$, ziehe $K\alpha'$, welche Linie verlängert den Kreis in O' trifft, so ist $GHO' = \frac{1}{3}GHE$. Zwei von den andern Auflösungen führen auf die Trisektion der Winkel GHl' und EHl'.

II. Ueber eine Eigenschaft der Ellipse.

(Taf. VIII. Fig. 3. und Fig. 4.)

Es seien (Taf. VIII. Fig. 3.) $OA = a$ die grosse und $OB = b$ die kleine Halbaxe einer Ellipse; auf OA liegt der Brennpunkt F. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt M auf dem Quadranten AB die Tangente, welche die Verlängerung von OA in P, von OB in Q trifft,

und bezeichne die Linie PQ, welche die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks OPQ ist, mit $h(M)$, die Summe der beiden Linien OQ und FQ mit $s(M)$. Für einen andern Punkt N des Quadranten erhält man durch eine ähnliche Construktion die Grössen $h(N)$ und $s(N)$. Diess vorausgesetzt, lässt sich die fragliche Eigenschaft der Ellipse in folgendem Satze aussprechen:

Man bestimme (Taf. VIII. Fig. 4.) auf AB den Punkt D, für welchen $h(D)$ ein Minimum ist, so ist die Differenz der Bögen $BD - DA = a - b$. Man nehme ferner die Punkte D_1 auf BD und D_2 auf DA an, so dass $h(D_1) = h(D_2) = s(D)$, dann ist die Differenz von je zweien der Bögen BD_1, D_1D, DD_2, D_2A eine algebraische Grösse. Ebenso lässt sich der Quadrant AB in acht Bögen theilen, von welchen je zwei um eine algebraische Grösse differiren, indem auf BD_1 und D_2A die Punkte D_3 und D_4, auf D_1D und DD_2 die Punkte D_5 und D_6 so bestimmt werden, dass $h(D_3) = h(D_4) = s(D_2)$ und $h(D_5) = h(D_6) = s(D_1)$ ist. Wenn man diese Construktion auf den Kreisquadranten anwendet, wo F mit O zusammenfällt, so ergibt sich die Eintheilung desselben in zwei, vier, acht u. s. w. gleiche Theile.

Es sei x die Abscisse eines Punktes M auf dem elliptischen Quadranten, $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$; so ist

$$(1) \qquad h(M) = \frac{a^2}{x}\sqrt{\frac{a^2 - k^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

$$(2) \qquad s(M) = a\sqrt{\frac{a^2 - k^2x^2}{a^2 - x^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wenn drei Punkte M'', M', M auf dem Quadranten liegen, deren Abscissen $x'' > x' > x$ sind, und welche die Eigenschaft haben, dass

$$BM + BM' = BM'' + \frac{k^2 . x . x' . x''}{a^2}$$

oder

$$(3) \qquad BM - M'M'' = \frac{k^2 . x . x' . x''}{a^2},$$

so finden folgende Bedingungsgleichungen statt, welche die Additionsformeln für elliptische Integrale sind:

$$(4) \qquad \sqrt{a^2 - x^2}.\sqrt{a^2 - x'^2} - \frac{x . x'}{a}\sqrt{a^2 - k^2x''^2} = a\sqrt{a^2 - x''^2},$$

$$(5)\qquad \sqrt{a^2-x^2}.\sqrt{a^2-x''^2}-\frac{x.x''}{a}\sqrt{a^2-k^2x'^2}=a\sqrt{a^2-x'^2},$$

$$(6)\qquad \sqrt{a^2-x'^2}.\sqrt{a^2-x''^2}-\frac{x'.x''}{a}\sqrt{a^2-k^2x^2}=a\sqrt{a^2-x^2}.$$

Man lasse erstens M'' mit A zusammenfallen, so führt die Formel (4), wenn man darin $x''=a$ setzt, auf die Gleichungen

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{x'}{\sqrt{a^2-x'^2}}=\frac{a}{b}$$

oder

$$(7)\qquad x=a\sqrt{\frac{a-x'^2}{a^2-k^2x'^2}},\quad x'=a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-k^2x^2}}.$$

Durch Vergleichung mit (1) ergibt sich $h(M)=h(M')$. Zwei solche Punkte, wie M und M', von deren Eigenschaften unten die Rede sein wird, theilen den Quadranten AB in drei Theile, wovon die beiden äussern um eine algebraische Grösse differiren. Aus (3) und (7) erhält man nämlich

$$(8)\qquad BM-M'A=k^2x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-k^2x^2}}=k^2x'\sqrt{\frac{a^2-x'^2}{a^2-k^2x'^2}}.$$

Zweitens soll M' mit M zusammenfallen und die Abscisse des dritten Punkts M'' zur Unterscheidung ξ heissen, so ergibt sich aus der Formel (4), wenn man darin $x'=x$ und $x''=\xi$ setzt,

$$(9)\qquad x^2=a^2\,\frac{a-\sqrt{a^2-\xi^2}}{a+\sqrt{a^2-k^2\xi^2}}$$

und aus (3)

$$(10)\qquad BM-MM''=k^2\xi\,\frac{a-\sqrt{a^2-\xi^2}}{a+\sqrt{a^2-k^2\xi^2}}.$$

Die Gleichungen (7) und (9) zwischen den drei Abscissen $x'>\xi>x$ beziehen sich auf das System der drei Punkte M', M'', M, welche so liegen, dass nach (8) und (10) je zwei der drei Bögen BM, $M'A$, MM'' um algebraische Grössen differiren.

Man bestimme noch einen vierten Punkt M''', dessen Abscisse ξ' ist, so dass $h(M''')=h(M'')$, oder nach Formel (7):

$$\xi'=a\sqrt{\frac{a^2-\xi^2}{a^2-k^2\xi^2}},$$

eliminire aus dieser Gleichung und aus (9) ξ, setze den so erhaltenen Werth von x in (1), so erhält man:

$$(11)\quad h(M) = h(M') = a\sqrt{\frac{a^2 - k^2\xi'^2}{a^2 - \xi'^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - \xi'^2}} = s(M''').$$

Durch geeignete Versetzung der vier Punkte M, M', M'', M''', wobei zu bemerken ist, dass durch die Lage eines derselben, z. B. von M'', diejenige der drei andern bestimmt ist, erhält man die angegebene Eintheilung des elliptischen Quadranten.

Man setze das Differenzial des Ausdrucks $h(M) = \frac{a^2}{x}\sqrt{\frac{a^2 - k^2x^2}{a^2 - x^2}}$ gleich 0, so erhält man $x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$ für die Abscisse des Punktes D, der durch die Eigenschaft charakterisirt ist $h(D) =$ Min. Der gleiche Werth für x ergibt sich aus (7), wenn $x = x'$ gesetzt wird. Durch Vergleichung mit (8) erhält man $BD - DA = a - b$. Wenn wir zunächst M'' mit D zusammenfallen lassen, so fällt auch M''' auf D; die Punkte M und M' fallen auf D_1 und D_2, welche nach (11) sich durch die Gleichung $h(D_1) = h(D_2) = s(D)$ konstruiren lassen. Setzen wir ferner in (9) und (10) $\xi = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$, so erhalten wir:

$$BD_2 - D_2A = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}),$$

und aus (8):

$$BD_2 - D_1A = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a+b};$$

durch Verbindung mit $BD - DA = a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$:

$$D_2D - DD_1 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}).$$

Um die Eintheilung des Quadranten in acht Theile auszuführen, von welchen je zwei um algebraische Grössen differiren, versetzt man M'' und M''' auf D_1 und D_2, so fallen M und M' auf D_3 und D_4, und man hat, wie oben, $h(D_3) = h(D_4) = s(D_2)$; nachher wird umgekehrt M'' und M''' auf D_2 und D_1 versetzt, wo dann M und M' auf D_5 und D_6 fallen, und es ist

$$h(D_5) = h(D_6) = s(D_1).$$

Somit wäre der Quadrant in acht Bögen getheilt; die Theilpunkte sind der Reihe nach $A, D_4, D_2, D_6, D, D_5, D_1, D_3, B$; durch die Formeln (8) und (10) können die Unterschiede zwischen je zweien dieser acht Bögen angegeben werden.

Das Vorstehende wird genügen, um zu zeigen, wie man zur Eintheilung des elliptischen Quadranten in sechszehn, zweiunddreissig u. s. w. Theile fortschreiten kann. Bei der Theilung in sechszehn Theile kommt M'' der Reihe nach auf D_3, D_4, D_5, D_6, die Punkte M, M' fallendann auf die Bögen BD_3 und D_4A, D_5D und DD_6, D_3D_1 und D_2D_4, D_1D_5 und D_6D_2.

Die hier angegebene Theilung lässt sich mit einigen Modifikationen auf die Quadranten verkürzter oder verlängerter Cycloiden, Epicycloiden und Hypocycloiden ausdehnen.

Zwei Punkte auf der Ellipse, wie M und M' (Taf. VIII. Fig. 3.), für welche die Gleichung $h(M)=h(M')$ gilt, haben folgende, leicht zu beweisende Eigenschaften: Ihre Normalen sind gleichweit vom Mittelpunkt O entfernt, diese Entfernung ist gleich $BM-M'A$. Die Produkte ihrer Krümmungshalbmesser, der Abstände ihrer Tangenten vom Mittelpunkte, der halben konjugirten Durchmesser von OM und OM' sind je gleich ab. Wenn die Tangente von M die verlängerten Axen in P und Q schneidet, OS senkrecht auf PQ steht und P', Q', S' dieselbe Bedeutung für M' haben, so ist

$$QM=S'P',\quad MP=Q'S',\quad QS=M'P,\quad SP=Q'M';$$

$$QM.Q'M'=SP.S'P'=a^2;$$

$$MP.M'P'=QS.Q'S'=b^2.$$

Zieht man durch M Parallelen mit den Axen, so wird dadurch $P'Q'$ in drei Stücke getheilt, wovon die zwei äussern beziehlich den Halbaxen gleich sind. Das Produkt der Abschnitte der Normalen von M und M' zwischen der Curve und der grossen Axe ist $=\frac{b^3}{a}$, und zwischen der Curve und der kleinen Axe oder ihrer Verlängerung $=\frac{a^3}{b}$. Aus dem hier Angeführten lassen sich die Eigenschaften des Punktes D, in welchem zwei Punkte, wie M und M', vereinigt sind, leicht ableiten.

Endlich folgt noch die Auflösung der Aufgabe, einen Punkt M auf der Ellipse zu finden, wenn die Länge von PQ, welche oben $h(M)$ genannt wurde, gegeben ist. Man beschreibe über dieser Länge als Durchmesser einen Kreis und lege von einem Endpunkte desselben zwei Sehnen in den Kreis gleich $a+b$ und $a-b$, so ist die Entfernung der andern Endpunkte dieser Sehnen gleich dem konjugirten Durchmesser von M, wodurch also dieser Punkt bestimmt ist. Die Construktion gibt zwei Auflösungen.

XLII.

Einfache Herleitung des Gauss'schen Ausdrucks für $\Gamma(\mu)$.

Von

Herrn Dr. Zehfuss,

Lehrer der Mathematik und höheren Mechanik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt.

Bekanntlich ist

$$lx = \lim \frac{x^\delta - 1}{\delta} \text{ oder } l\frac{1}{x} = \lim \frac{1 - x^\delta}{\delta},$$

wofür man auch, wenn $n = 1:\delta$ gesetzt wird, setzen kann:

$$lx = \lim . n(1 - x^{\frac{1}{n}}).$$

Setzt man nun

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} \partial x,$$

so ergibt sich

$$\Gamma(\mu) = \lim . n^{\mu-1} \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{n}})^{\mu-1} \partial x,$$

d. h. wenn $x = t^n$ gesetzt wird:

$$\Gamma(\mu) = \lim . n^\mu \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{n-1} \partial t.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel, welche, so oft n eine ganze positive Zahl ist, geschlossene Resultate liefert, ist aber

$$\int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{n-1} \partial t = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1.2 \ldots . (n-1)}{(\mu+1) \ldots . (\mu+n-1)},$$

woraus direct folgt:

$$\Gamma(\mu) = \lim . \frac{n^\mu}{\mu} \cdot \frac{1.2 \ldots . (n-1)}{(\mu+1) \ldots . (\mu+n-1)} = \lim . \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2}{\mu+1} \ldots . \frac{n}{\mu+n-1} . n^{\mu-1}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1^{1-\mu} 2^\mu}{\mu+1} \cdot \frac{2^{1-\mu} 3^\mu}{\mu+2} \ldots .$$

XLIII.

Von der Auflösbarkeit der ganzen rationalen Funktionen $n$ten Grades in Faktoren.

Von
Herrn Dr. *Am Ende*
zu Langensalza.

Bekanntlich lassen sich von den unentwickelten Funktionen nur die homogenen ganzen rationalen Funktionen zweier Veränderlichen in allen Fällen in lineäre Faktoren, also in Faktoren von der Form $ax+by+c$, auflösen.

Es wird sich in folgender Untersuchung darum handeln, die Bedingungen festzustellen, unter welchen eine ganze rationale Funktion von mehreren Veränderlichen sich in Faktoren auflösen lässt.

Da die Funktionen mit zwei Veränderlichen die einfachsten sind, und dieselbe Methode, welche hier zur Feststellung obiger Bedingungen angewendet wird, auch auf die Funktionen mit drei und mehreren Veränderlichen anwendbar ist, so untersuchen wir zuerst die ganzen rationalen Funktionen mit zwei Veränderlichen.

§. 1.

Die allgemeine Form dieser Funktionen ist:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad F(x,y) = \; & A_0x^n + A_1x^{n-1}y + A_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + A_ny^n \\
& + B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2}y + B_2x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + B_{n-1}y^{n-1} \\
& + C_0x^{n-2} + C_1x^{n-3}y + C_2x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + C_{n-2}y^{n-2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + N_0x + N_1y \\
& + Q = 0.
\end{aligned}
$$

Substituirt man in diese Gleichung für x und y die allgemeinen Formeln für die Coordinatenverwandlung in der Ebene, nämlich:

$$x = x' \cos u - y' \sin u + \alpha,$$
$$y = x' \sin u + y' \cos u + \beta;$$

so ist ersichtlich, dass, wenn Gleichung (1) zuvörderst einen linearen Faktor, also einen Faktor von der Form $ax + by + c$ hat, dieser bei passender Bestimmung des Winkels u und der Grössen α und β als einfacher eingliedriger Faktor in der Form x' resp. y' heraustreten wird, und dass im entgegengesetzten Falle, wo also die Gleichung (1) keinen solchen Faktor hat, die Bestimmung der genannten Grössen sich als unmöglich ergeben wird.

Geometrisch ausgedrückt würde dies lauten: Wenn eine Curve einen geradlinigen Theil hat, so wird die Gleichung dieses Theiles bei passender Verwandlung der Coordinaten in die Gleichung $x' = 0$ übergehen, wenn er mit der y'-Achse, — oder in die Gleichung $y' = 0$, wenn er mit der x'-Achse zusammenfällt.

§. 2.

Die Bestimmbarkeit oder Nichtbestimmbarkeit der Grössen u, α und β unserer Aufgabe gemäss ergiebt sich aus Folgendem:

Durch die Substitutionen $x = x' \cos u - y' \sin u + \alpha$ und $y = x' \sin u + y' \cos u + \beta$ in Gleichung (1) erhält man in Beziehung auf x' und y' drei Gruppen von Gliedern:

1. solche, welche mit Potenzen von x' multiplicirt sind, zum Theil aber auch y' als Faktor enthalten;

2. solche, welche nur mit Potenzen von y' multiplicirt sind;

3. solche, welche nur α und β und ausserdem noch die Constante Q der Gleichung (1) enthalten.

In Beziehung auf die erste Gruppe ist nun zu bemerken, dass, wenn die Gleichung (1) einen linearen Faktor enthält, oder, wenn x' als eingliedriger Faktor in der durch die Substitutionen erhaltenen Gleichung heraustreten soll, die beiden übrigen Gruppen verschwinden müssen.

Diese Bemerkung gewährt die Mittel, mit denen man zur Bestimmung des Winkels u und der Grössen α und β schreiten kann.

Es ist klar, dass zunächst der Theil, welcher mit y'^n multiplicirt ist und von unbestimmten Grössen nur den Winkel u enthält, verschwinden muss. Man hat für gerade n:

$$y'^n(A_0 \sin u^n - A_1 \sin u^{n-1}.\cos u + A_2 \sin u^{n-2}.\cos u^2 - \dots$$
$$\dots - A_{n-1} \sin u.\cos u^{n-1} + A_n \cos u^n).$$

Für ungerade n beginnen die Glieder mit $-A_0$ und die Vorzeichen sind dann ebenfalls abwechselnd.

Damit dieser Theil der durch die Substitutionen erhaltenen Gleichung $=0$ werde, muss sein:

$$A_0 \sin u^n - A_1 \sin u^{n-1}.\cos u + \dots + A_n \cos u^n = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit:

(2) $$A_0 \operatorname{tg} u^n - A_1 \operatorname{tg} u^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

oder

(3) $$A_0 - A_1 \operatorname{cotg} u + A_2 \operatorname{cotg} u^2 - \dots + A_n \operatorname{cotg} u^n = 0.$$

Die n Werthe von $\operatorname{tg} u$, welche Gleichung (2) Genüge leisten und die wir im Anfange unserer Untersuchung alle als ungleich annehmen, seien:

$$\operatorname{tg} u = r_1,\ r_2,\ r_3, \dots r_n.$$

Es bleiben somit noch α und β der Aufgabe gemäss zu bestimmen übrig. Zur Bestimmung derselben genügen zwei von den mit Potenzen von y' multiplicirten Ausdrücken, welche auf 0 gebracht sind. Wir denken uns, um die Untersuchung zu vereinfachen, den mit y'^{n-1} und den mit y'^{n-2} multiplicirten Ausdruck gewählt, von denen der erste in Beziehung auf α und β vom ersten Grade, der zweite vom zweiten Grade ist. Diese Ausdrücke haben demnach die Gestalt:

(4) $$M\alpha + N\beta + O,$$

(5) $$P\alpha^2 + Q\alpha\beta + R\beta^2 + S\alpha + T\beta + U.$$

Diese beiden Ausdrücke bieten sich stets dar, wie später bewiesen werden soll, in dem Falle, dass alle Wurzeln $\operatorname{tg} u = r$ verschieden sind. Damit nun dieselben Werthe α und β, welche den Ausdruck (4) $=0$ machen, auch alle übrigen Ausdrücke, welche in Beziehung auf α und β von höheren Graden sind, $=0$ machen, muss Ausdruck (4) in diesen als Faktor enthalten sein. Ist dies der Fall, was durch einfache Division zu entscheiden sein würde, so dividire man mit $M\alpha + N\beta + O$ in Gleichung (5), damit hier der mit $M\alpha + N\beta + O$ identische Theil entfernt werde. Aus dem sich ergebenden Quotienten, welcher die Form $J\alpha + K\beta + L$ hat, und Gleichung (4) erhält man dann α und β der Aufgabe gemäss bestimmt. Setzt man dann diese Werthe für α und β und den für $\operatorname{tg} u$ ein in

$$x' = x\cos u + y\sin u - (\alpha\cos u + \beta\sin u),$$

so ist $x\cos u + y\sin u - (\alpha\cos u + \beta\sin u)$ ein linearer Faktor der ursprünglichen Funktion. Ist dagegen $M\alpha + N\beta + O$ nicht Faktor der α und β enthaltenden Ausdrücke, so verschwinden die mit Potenzen von y' multiplicirten Ausdrücke nicht, oder wenigstens nicht alle, und die Funktion hat keinen lineären Faktor für die Wurzel $\operatorname{tg} u = r$.

Dieselben Untersuchungen würde man nach Substitution der übrigen Wurzeln $\operatorname{tg} u = r$ anzustellen haben.

§. 3.

Schneller als diese Methode, welche zu unserer Untersuchung eine $(n-1)$malige Division in dem Falle erfordert, wo die Funktion wirklich einen lineären Faktor hat, führt uns die Methode zum Ziele, welche sich ergiebt aus der Bemerkung, dass die oben genannte dritte Gliedergruppe der Substitutionsgleichung einen Ausdruck giebt, welcher der ursprünglichen Funktion (1) vollständig conform ist, so dass, wenn man in jenem Ausdrucke x für α und y für β setzt, man wieder zu der ursprünglichen Funktion (1) gelangt.

Hieraus würde folgen, dass, wenn Funktion (1) für die Wurzel $\operatorname{tg} u = r_k$ einen lineären Faktor hat, dieser $= Mx + Ny + O$ sein muss, oder umgekehrt: wenn $M\alpha + N\beta + O$ ein Faktor des durch die dritte Gliedergruppe gebildeten Ausdruckes ist, so muss $Mx + Ny + O$ ein lineärer Faktor von Funktion (1) sein.

§. 4.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo zwei oder mehrere Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$ einander gleich sind. Wir berechnen zu diesem Zwecke die Ausdrücke, welche in Beziehung auf α und β vom ersten, zweiten und dritten Grade sind. Man hat für gerade n:

$$\begin{aligned}(6)\quad y'^{n-1}\big[&-A_0(n\alpha\sin u^{n-1})\\ &+A_1((n-1)\alpha\sin u^{n-2}.\cos u-\beta\sin u^{n-1})\\ &-A_2((n-2)\alpha\sin u^{n-3}.\cos u^2-2\beta\sin u^{n-2}.\cos u)\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+A_{n-1}((\alpha.\cos u^{n-1}-(n-1)\beta\sin u.\cos u^{n-2})\\ &-A_n(-n\beta\cos u^{n-1})\\ &-B_0\sin u^{n-1}+B_1\sin u^{n-2}.\cos u-B_2\sin u^{n-3}.\cos u^2+\ldots\\ &\qquad\ldots-B_{n-2}\sin u.\cos u^{n-2}+B_{n-1}\cos u^{n-1}\big],\end{aligned}$$

(7)

$$y'^{\,n-2}\Big[+A_0\Big(\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-2}\Big)$$

$$-A_1\Big(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-3}\cos u-(n-1)\alpha\beta\sin u^{n-2}\Big)$$

$$+A_2\Big(\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-4}.\cos u^2-2(n-2)\alpha\beta\sin u^{n-3}.\cos u$$

$$+\beta^2\sin u^{n-2}\Big)$$

. . . .

$$+A_{n-2}(\alpha^2\cos u^{n-2}-(n-2)2\alpha\beta\sin u\cos u^{n-3}$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\beta^2\sin u^2\cos u^{n-4})$$

$$-A_{n-1}(-(n-1)\alpha\beta\cos u^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\beta^2\sin u\cos u^{n-3})$$

$$+A_n\Big(\frac{n(n-1)}{1.2}\beta^2\cos u^{n-2}\Big)$$

$$+B_0((n-1)\alpha\sin u^{n-2})$$

$$-B_1((n-2)\alpha\sin u^{n-3}.\cos u-\beta\sin u^{n-2})$$

$$+B_2((n-3)\alpha\sin u^{n-4}.\cos u^2-2\beta\sin u^{n-3}.\cos u)$$

. . . .

$$+B_{n-2}(\alpha.\cos u^{n-2}-(n-2)\beta\sin u.\cos u^{n-3})$$

$$-B_{n-1}(-(n-1)\beta\cos u^{n-2})$$

$$+C_0\sin u^{n-2}-C_1\sin u^{n-3}.\cos u+C_2\sin u^{n-4}.\cos u^2-\ldots.$$

$$\ldots.+C_{n-2}\cos u^{n-2}\Big],$$

(8)

$$y'^{n-3}\Big[-A_0\Big(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin u^{n-3}\Big)$$

$$+A_1\Big(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\alpha^3\sin u^{n-4}.\cos u$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\alpha^2\beta\sin u^{n-3}\Big)$$

$$-A_2\Big(\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}\alpha^3\sin u^{n-5}.\cos u^2$$

$$-\frac{2(n-2)(n-3)}{1.2}\alpha^2\beta\sin u^{n-4}.\cos u+(n-2)\alpha\beta^2\sin u^{n-3}\Big)$$

$$+A_3\Big(\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}\alpha^3\sin u^{n-6}.\cos u^3$$

$$-\frac{3(n-3)(n-4)}{1.2}\alpha^2\beta\sin u^{n-5}.\cos u^2$$

$$+3(n-3)\alpha\beta^2\sin u^{n-4}.\cos u-\beta^3\sin u^{n-3}\Big)$$

. . . .

$$+A_{n-3}\Big(\alpha^3.\cos u^{n-3}-\frac{(n-3).3.2}{1.2}\alpha^2\beta\sin u\cos u^{n-4}$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}3\alpha\beta^2\sin u^2\cos u^{n-5}$$

$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}\beta^3\sin u^3.\cos u^{n-6}\Big)$$

$$-A_{n-2}\Big(-\frac{(n-2).2.1}{1.2}\alpha^2\beta.\cos u^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}2\alpha\beta^2\sin u.\cos u^{n-4}$$

$$-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}\beta^3\sin u^2\cos u^{n-5}\Big)$$

$$+A_{n-1}\Big(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\alpha\beta^2.\cos u^{n-3}$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\beta^3\sin u.\cos u^{n-4}\Big)$$

$$-A_n\left(-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\beta^3\cos u^{n-3}\right)$$

$$-B_0\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-3}\right)$$

$$+B_1\left(\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-4}.\cos u-(n-2)\alpha\beta\sin u^{n-3}\right)$$

$$-B_2\left(\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\alpha^2\sin u^{n-5}.\cos u^2\right.$$

$$\left.-2(n-3)\alpha\beta\sin u^{n-4}.\cos u+\beta^2\sin u^{n-3}\right)$$

. . . .

$$-B_{n-2}\left(-(n-2)\alpha\beta\cos u^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\beta^2\sin u.\cos u^{n-4}\right)$$

$$+B_{n-1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\beta^2.\cos u^{n-3}\right)$$

$$-C_0((n-2)\alpha\sin u^{n-3})$$

$$+C_1((n-3)\alpha\sin u^{n-4}.\cos u-\beta\sin u^{n-3})$$

$$-C_2((n-4)\alpha\sin u^{n-5}.\cos u^2-2\beta\sin u^{n-4}.\cos u)$$

. . . .

$$+C_{n-3}(\alpha\cos u^{n-3}-(n-3)\beta\sin u.\cos u^{n-4})$$

$$-C_{n-2}(-(n-2)\beta.\cos u^{n-3})$$

$$-D_0\sin u^{n-3}+D_1\sin u^{n-4}.\cos u-D_2\sin u^{n-5}.\cos u^2+\ldots.$$

$$\ldots.+D_{n-3}\cos u^{n-3}\Big].$$

Für ungerade n würden, wie leicht zu sehen, die Anfangsglieder A_0, B_0, C_0 u. s. w. das entgegengesetzte Vorzeichen haben und der Zeichenwechsel dann in entsprechender Weise fortschreiten.

Man erkennt leicht, nach welchem Gesetz die Glieder gebildet sind. Für gerade n wird das allgemeine Glied mit dem Coefficienten A dargestellt in der Form:

$$(-1)^{k+\lambda-\mu}.A_\lambda\frac{(n-\lambda)(n-(\lambda+1))\dots(n-(k+\lambda-\mu-1))}{1.2\dots(k-\mu)}.\frac{\lambda.(\lambda-1)\dots(\lambda-(\mu-1))}{1.2\dots\mu}.\alpha^{k-\mu}\beta^{\mu}\sin u^{n-(k+\lambda-\mu)}.\cos u^{\lambda-\mu}$$

Für die Coefficienten B, C, D u. s. w. hätte man beziehungsweise $n-1$, $n-2$, $n-3$ u. s. w. für n in diesem Gliede zu setzen und bei $n-1$, $n-3$, $n-5$ u. s. w. das Vorzeichen zu wählen, welches sich aus $(-1)^{k+\lambda-\mu-1}$ ergiebt.

Die Benutzung des allgemeinen Gliedes für ungerade n ergiebt sich von selbst.

Bezeichnen wir die identischen Gleichungen (2) und (3), welche die n Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$, respective $\operatorname{cotg} u = \frac{1}{r_k}$, enthalten, von denen jetzt zwei einander gleich sein sollen, der Kürze wegen mit $f(\operatorname{tg} u)$ und $\varphi(\operatorname{cotg} u)$, so haben wir also:

$$f(\operatorname{tg} u) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\operatorname{cotg} u) = 0.$$

Für den Fall, dass zwei Wurzeln einander gleich sind, muss der erste Differentialquotient von $f(\operatorname{tg} u)$, respective $\varphi(\operatorname{cotg} u)$, ebenfalls $=0$ sein, also:

$$f'(\operatorname{tg} u) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(\operatorname{cotg} u) = 0.$$

Betrachten wir nun die Coefficienten von α und β in (6), so bilden ihre Summen bezüglich die Differentialquotienten von $f(\operatorname{tg} u)$ multiplicirt mit $\cos u^{n-1}$ und $\varphi(\operatorname{cotg} u)$ multiplicirt mit $\sin u^{n-1}$; so dass, wenn wir diese Coefficientensummen mit M und N bezeichnen,

$$M = -\cos u^{n-1}.f'(\operatorname{tg} u),$$
$$N = \sin u^{n-1}\varphi'(\operatorname{cotg} u)$$

ist. Für zwei und mehr gleiche Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$ ist folglich:

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0.$$

Es können nun zwei Fälle eintreten, nämlich das weder α noch β enthaltende Glied O in (6) ist entweder $=0$ oder nicht $=0$.

1. Es sei $O = 0$.

In diesem Falle ist der in Beziehung auf α und β quadratische Ausdruck in (7) zu untersuchen. Es sind hier drei Fälle möglich:

a) $F(\alpha, \beta)$ ist durch diesen quadratischen Ausdruck theilbar;

b) $F(\alpha, \beta)$ ist nur durch einen linearen Faktor davon theilbar;

c) $F(\alpha, \beta)$ ist weder durch den quadratischen Ausdruck noch durch einen lineären Faktor davon theilbar.

Im ersteren Falle ist der Ausdruck entweder rein quadratisch, und die Funktion hat alsdann zwei gleiche lineäre Faktoren; oder er ergiebt, falls er sich in zwei Faktoren zerlegen lässt, zwei verschiedene Faktoren, in welchem Falle also die Funktion für zwei gleiche Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$ zwei verschiedene lineäre Faktoren hat.

Ist $F(\alpha, \beta)$ nicht durch den quadratischen Ausdruck theilbar, so hätte man zu untersuchen, ob ein Faktor davon in $F(\alpha, \beta)$ ohne Rest enthalten wäre.

Ist auch dies nicht der Fall, so hat die Funktion für die beiden gleichen Wurzeln keinen Faktor.

2. Es sei O nicht $=0$.

In diesem Falle ist kein Faktor vorhanden, indem alsdann y'^{n-1} nicht wegfallen würde.

§. 4.

Wir nehmen jetzt an, es seien drei Wurzeln $\operatorname{tg} u$ einander gleich.

Wir setzen hier voraus, dass $O=0$ ist, da ohne diese Voraussetzung die Unmöglichkeit des Vorhandenseins von Faktoren sich sofort ergeben würde.

Es ist dann:

$$M=0, \quad N=0, \quad O=0, \quad P=0, \quad Q=0, \quad R=0;$$

wo P, Q und R die Coefficienten des in Beziehung auf α und β quadratischen Theiles in (5) bezeichnen, denn es ist:

$$P = \frac{\cos u^{n-2}}{1.2} \cdot f''(\operatorname{tg} u),$$

$$Q = -\cos u^{n-2} . \frac{\partial \{\operatorname{tg} u . \varphi^{n-1}(\operatorname{cotg} u)\}}{\partial \operatorname{tg} u},$$

$$R = \frac{\sin u^{n-2}}{1.2} . \varphi''(\operatorname{cotg} u).$$

Dass die mit B, C, D u. s. w. behafteten Coefficientensummen in derselben Weise, wie die mit A behafteten zu untersuchen sind, ergiebt sich nun von selbst.

Bezeichnen S, T und U die Coefficienten des lineären Theiles in (5), so sei jetzt:

1) $S=0$, $T=0$, $U=0$.

In diesem Falle ist der in Beziehung auf α und β cubische Ausdruck zu untersuchen.

Entweder ist dann $F(\alpha, \beta)$ durch diesen cubischen Ausdruck theilbar und die Funktion hat in diesem Falle entweder drei gleiche lineäre Faktoren, oder zwei gleiche und einen ungleichen, oder drei ungleiche, oder einen kubischen; oder sie ist nur durch einen quadratischen Faktor davon theilbar, in welchem Falle sie entweder nur diesen quadratischen Faktor, d. h. keinen lineären Faktor hat, wenn sich derselbe nicht wieder zerlegen lässt, oder, wenn er sich zerlegen lässt, zwei gleiche oder zwei ungleiche lineäre Faktoren; oder sie ist nur durch einen lineären Theil davon theilbar, in welchem Falle sie nur einen einzigen lineären Faktor hat; oder endlich, es tritt keiner von den genannten Fällen ein und die Funktion hat für die drei gleichen Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$ keinen Faktor, weder einen lineären, noch einen kubischen.

2) Es sei $S=0$, $T=0$, aber U nicht $=0$.

In diesem Falle ist kein Faktor vorhanden.

3) Es sei einer von den Coefficienten S, T und $U=0$.

Alsdann hätte man zu untersuchen, ob $S\alpha + T\beta$ in $F(\alpha, \beta)$ ohne Rest enthalten wäre, in welchem Falle die Funktion für die drei gleichen Wurzeln einen lineären Faktor hätte.

Wir bemerken hier, dass der Fall, dass $S=0$, während T nicht $=0$, oder umgekehrt, nicht eintreten kann, da man hat:

$$S = -\cos u^{n-2} \psi'(\operatorname{tg} u),$$

$$T = \sin u^{n-2} \chi'(\operatorname{cotg} u).$$

Ist nun $\psi'(\operatorname{tg} u)=0$, so muss auch $\chi'(\operatorname{cotg} u)=0$ sein, folglich ist immer $T=0$, wenn $S=0$, und umgekehrt.

Ist S nicht $=0$, so ist also auch T nicht $=0$. Es bietet sich hier demnach nur der einzige Fall $S\alpha + T\beta$ für die Untersuchung dar, da man für $S=0$, $T=0$ und U nicht $=0$ den Fall 2) hat.

4) Es sei weder S, noch T, noch $U=0$.

In diesem Falle ist zu untersuchen, ob $S\alpha + T\beta + U$ in $F(\alpha, \beta)$ ohne Rest enthalten ist.

Da man leicht sieht, dass die Untersuchungen für vier und mehr gleiche Wurzeln $\operatorname{tg} u = r_k$ in derselben Weise anzustellen sind, so beendigen wir hiermit diesen Theil unserer Aufgabe, welcher die Funktionen mit zwei Veränderlichen zu betrachten hatte und wenden uns nunmehr zur Betrachtung der ganzen rationalen Funktionen mit drei Veränderlichen.

§. 5.

Folgende Untersuchung soll nun noch zeigen, in welcher Weise die gefundene Methode auch auf die Ermittelung der Faktoren von Funktionen mit drei Veränderlichen anwendbar ist.

Es handelt sich hier zunächst um die Aufsuchung eines lineären Faktors von der Form $ax + by + cz + d$. Hat die Funktion einen solchen Faktor, so liegt auf der Hand, dass der Theil dieses Faktors, welcher cz nicht enthält, d. h. $ax + by + d$, sich aus der Summe von Gliedern der vorliegenden Funktion finden lassen muss, welche z nicht enthalten. Untersucht man dann den Theil der Funktion, welcher y nicht enthält, so wird man entweder $ax + cz + d$ selbst hier als lineären Faktor finden, oder doch einen solchen, welcher durch Multiplikation mit einer constanten Grösse $ax + cz + d$ giebt. Endlich wird man noch den Theil der Funktion zu untersuchen haben, welcher x nicht enthält, und es wird jetzt, vorausgesetzt, dass die Funktion den Faktor $ax + by + cz + d$ hat, sich $by + cz + d$ entweder von selbst oder durch passende Multiplikation ergeben.

Für Funktionen von mehr als drei Veränderlichen würde sich dieselbe Methode zur Auffindung von Faktoren anwenden lassen. Man sieht, dass man bei einer ganzen rationalen Funktion von n Veränderlichen $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Untersuchungen in Beziehung auf Funktionen zweier Veränderlichen anzustellen hätte. Wir gehen jedoch hierauf nicht weiter ein, da sich das Weitere nunmehr von selbst ergiebt und die Resultate überdies keine geometrische Bedeutung mehr hätten.

XLIV.

Neue merkwürdige Formel für den körperlichen Inhalt schief abgeschnittener Prismen, mit besonderer Rücksicht auf die wichtigen Anwendungen, welche sich von derselben zur Berechnung der aufzutragenden und abzutragenden Erdkörper bei Eisenbahnbauten, Wiesenanlagen und allen Nivellirungsarbeiten machen lassen.

Von
dem Herausgeber.

I.

Man kennt die Formel, mittelst welcher der Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen senkrechten oder geraden Prismas bestimmt wird, und weiss auch, wie wichtig diese Formel für die Berechnung der aufzutragenden und abzutragenden Erdkörper bei Eisenbahnbauten, Wiesenanlagen und überhaupt allen Nivellirungs-Arbeiten ist, indem es, insbesondere wenn diese Erdkörper von unregelmässiger Gestalt sind, wohl überhaupt keine andere Methode zu der, für die Veranschlagung solcher Arbeiten so wichtigen Berechnung der auf- und abzutragenden Erdkörper als die Anwendung der erwähnten Formel geben dürfte. Bekanntlich erfordert die Anwendung dieser Formel die Kenntniss der drei Höhen des Prismas und des Inhalts seiner horizontalen Grundfläche. Die Messung der drei ersteren ist mit Hülfe der Nivellir-Latte und des Nivellir-Instruments mit aller erforderlichen Genauigkeit leicht ausführbar und unterliegt nicht der geringsten Schwierigkeit. Anders verhält es sich aber mit der Bestimmung des Inhalts der horizontalen Grundfläche, welche die Messung der horizontalen Projectionen der drei Seiten der oberen schiefen

Grundfläche in Anspruch nimmt, und mit der erforderlichen Genauigkeit nie ohne namhaften Zeitaufwand ausführbar, in der Praxis selbst zuweilen nicht von allen Schwierigkeiten frei ist. Ueberdies muss man aus diesen drei gemessenen Projectionen den Inhalt der horizontalen Grundfläche nach der bekannten Formel für den Inhalt des Dreieks aus seinen drei Seiten berechnen, wozu die Ausziehung einer Quadratwurzel erforderlich ist, die sich in diesem Falle nicht wohl anders als nach der gewöhnlichen elementaren Methode oder mittelst der Logarithmen ausführen lässt. Um diese etwas weitläufige Rechnung zu umgehen, misst man auch wohl nur die horizontale Projection einer Seite der oberen schiefen Grundfläche und deren horizontalen Abstand von der gegenüberstehenden Ecke dieser Grundfläche, wodurch man sich eine Seite und die entsprechende Höhe der horizontalen Grundfläche verschafft, woraus man dann deren Inhalt leicht berechnen kann; aber diese Messung genau auszuführen, ist nicht ganz leicht und nimmt ziemliche Zeit in Anspruch.

Alle diese Schwierigkeiten werden vermieden, wenn man im Besitz einer Formel ist, mittelst welcher man den Inhalt des Prismas aus seinen drei Höhen und den drei Seiten der oberen schiefen Grundfläche berechnen kann, weil, wie schon gesagt, die Messung der ersteren mittelst der Nivellir-Latte und des Nivellir-Instruments mit grosser Genauigkeit leicht ausführbar ist, und die Messung der letzteren nur die unmittelbare Anlegung des Maassstabes erfordert, wozu ich noch bemerke, dass auch jede Höhe der oberen schiefen Grundfläche sehr leicht mit dem Maassstabe gemessen, und also der Inhalt dieser Grundfläche einfach aus Grundlinie und Höhe berechnet werden kann. Eine allen diesen Erfordernissen entsprechende Formel für den Inhalt schief abgeschnittener gerader dreiseitiger Prismen will ich nun entwickeln, welche ich auch in theoretischer Rücksicht für sehr merkwürdig und für eine Bereicherung der elementaren Stereometrie zu halten geneigt bin, so dass es mir sehr wünschenswerth scheint, dass dieselbe künftig in den stereometrischen Elementar-Unterricht und die betreffenden Lehrbücher aufgenommen werde, namentlich auch deshalb, weil dieselbe Gelegenheit zu so vielen wichtigen praktischen Anwendungen darbietet.

II.

In Taf. VIII. Fig. 1. sei ABC die untere Grundfläche des schief abgeschnittenen geraden dreiseitigen Prismas $ABCA'B'C'$, auf welcher die drei Höhen AA', BB', CC' desselben senkrecht stehen,

und $A'B'C'$ sei die obere schiefe Grundfläche desselben. Der Kürze wegen bezeichne man die Inhalte der beiden Grundflächen ABC und $A'B'C'$ respective durch Δ und Δ' und setze:

$$BC=\alpha,\quad CA=\beta,\quad AB=\gamma;$$
$$AA'=a,\quad BB'=b,\quad CC'=c;$$
$$B'C'=a',\quad C'A'=b',\quad A'B'=c'.$$

Nach einer bekannten Formel der ebenen Geometrie ist

$$16\Delta^2=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4.$$

Offenbar ist aber

$$\alpha^2=a'^2-(b-c)^2,\quad \beta^2=b'^2-(c-a)^2,\quad \gamma^2=c'^2-(a-b)^2;$$

folglich:

$$\begin{aligned}16\Delta^2= {} & 2\{a'^2-(b-c)^2\}\{b'^2-(c-a)^2\}\\ & +2\{b'^2-(c-a)^2\}\{c'^2-(a-b)^2\}\\ & +2\{c'^2-(a-b)^2\}\{a'^2-(b-c)^2\}\\ & -\{a'^2-(b-c)^2\}^2-\{b'^2-(c-a)^2\}^2-\{c'^2-(a-b)^2\}^2,\end{aligned}$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung der einzelnen Theile dieses Ausdrucks die folgende Formel erhält:

$$\begin{aligned}16\Delta^2= {} & 2a'^2b'^2+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2-a'^4-b'^4-c'^4\\ & -2(a-b)^2(a'^2+b'^2-c'^2)\\ & -2(b-c)^2(b'^2+c'^2-a'^2)\\ & -2(c-a)^2(c'^2+a'^2-b'^2)\\ & +2(a-b)^2(b-c)^2+2(b-c)^2(c-a)^2+2(c-a)^2(a-b)^2\\ & -(a-b)^4-(b-c)^4-(c-a)^4.\end{aligned}$$

Nun überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der auch an sich merkwürdigen allgemeinen algebraischen Relation:

1)

$$\left.\begin{aligned}2(a-b)^2(b-c)^2+2(b-c)^2(c-a)^2+2(c-a)^2(a-b)^2\\ -(a-b)^4-(b-c)^4-(c-a)^4\end{aligned}\right\}=0,$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden:

$$16\Delta^2 = 2a'^2b'^2 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4$$
$$-2(a-b)^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$
$$-2(b-c)^2(b'^2+c'^2-a'^2)$$
$$-2(c-a)^2(c'^2+a'^2-b'^2),$$

oder, weil nach der schon oben angewandten Formel der ebenen Geometrie

$$16\Delta'^2 = 2a'^2b'^2 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4$$

ist:

$$2) \quad 16\Delta^2 = 16\Delta'^2 - 2(a-b)^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$
$$-2(b-c)^2(b'^2+c'^2-a'^2)$$
$$-2(c-a)^2(c'^2+a'^2-b'^2)$$

oder

$$3) \quad 16\Delta^2 = 16\Delta'^2 - 2a'^2\{(a-b)^2-(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$-2b'^2\{(a-b)^2+(b-c)^2-(c-a)^2\}$$
$$-2c'^2\{-(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

Leicht ergiebt sich:

$$(a-b)^2-(b-c)^2+(c-a)^2 = -2(a-b)(c-a),$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2-(c-a)^2 = -2(b-c)(a-b),$$
$$-(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = -2(c-a)(b-c);$$

und es ist also:

$$16\Delta^2 = 16\Delta'^2 + 4a'^2(a-b)(c-a) + 4b'^2(b-c)(a-b) + 4c'^2(c-a)(b-c)$$

oder

$$\Delta^2 = \Delta'^2 + \frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4},$$

oder auch:

$$\Delta^2 = \Delta'^2\left\{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}\right\},$$

und folglich:

4)

$$\Delta = \Delta'\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen geraden Prismas $ABCA'B'C'$ durch P, und denken uns durch A' eine mit ABC parallele Ebene gelegt, wodurch das schief abgeschnittene dreiseitige gerade Prisma in ein gerades dreiseitiges Prisma und eine vierseitige Pyramide zerfällt wird; so ist, wenn wir das von A oder A' auf die Ebene $BCB'C'$ gefällte Perpendikel durch h bezeichnen, offenbar:

$$P = \tfrac{1}{2}a\alpha h + \tfrac{1}{3}.\frac{\{(b-a)+(c-a)\}\alpha}{2}h\,{}^{*})$$

$$= (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}.\frac{b+c-2a}{2})\alpha h$$

$$= (a + \frac{b+c-2a}{3}).\tfrac{1}{2}\alpha h,$$

also:

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P = \frac{a+b+c}{3}\Delta.$$

Also ist nach 4):

6)

$$P = \frac{(a+b+c)\Delta'}{3}\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}},$$

und wenn man

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2s' = a' + b' + c'$$

setzt, so ist bekanntlich:

---

*) Wenn $ABCA'B'C'$ in Taf. VIII. Fig. II. ein beliebiges dreiseitiges Prisma ist, so kann man sich dasselbe, indem man durch AA' eine mit $BCB'C'$ parallele Ebene legt, zu einem Parallelepipedon ergänzt denken, von welchem das dreiseitige Prisma die Hälfte ist. Bezeichnet man nun die Entfernung der Kante AA' von der Seitenfläche $BCB'C'$, d. h. ein von einem beliebigen Punkte in AA' auf $BCB'C'$ gefälltes Perpendikel durch H, so ist $H.\overline{BCB'C'}$ der Inhalt des Parallelepipedons, folglich

$$\text{Prisma } ABCA'B'C' = \tfrac{1}{2}H.\overline{BCB'C'};$$

und ist $BCB'C'$ ein Rechteck, so ist

$$\text{Prisma } ABCA'B'C' = \tfrac{1}{2}H.\overline{BC}.\overline{BB'}.$$

Dieser Satz ist oben bei der Bestimmung des Inhalts von P in Anwendung gebracht worden, und kann überhaupt häufig bei Körperberechnungen mit grossem Vortheil angewandt werden, weshalb man ihn in die Elemente aufnehmen sollte.

8) . . . $\Delta'=\sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$,

also:

9)

$$P=\frac{(a+b+c)\Delta'}{3}\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}}$$

oder:

10)

$$P=\frac{(a+b+c)\Delta'}{3}\sqrt{1+\frac{4\{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)\}}{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(c'+a'-b')(a'+b'-c')}},$$

Formeln, durch welche nun, wie verlangt wurde, P bloss durch a, b, c und a', b', c' ausgedrückt ist.

In der Praxis wird man sich am besten der Formel 6) bedienen, indem man den Flächeninhalt Δ' der oberen schiefen Grundfläche $A'B'C'$ durch Messung nur einer Seite und der dieser Seite entsprechenden Höhe des Dreiecks $A'B'C'$ bestimmt, was nie einer Schwierigkeit unterliegt und immer mit der erforderlichen Genauigkeit durch unmittelbare Anlegung des Maassstabes ausführbar ist*).

III.

Wenn die Ebene $A'B'C'$ nur wenig von der horizontalen Lage abweicht, was bei praktischen Arbeiten häufig der Fall sein wird, so sind die absoluten Werthe der Differenzen $a-b$, $b-c$, $c-a$ nur klein, und es wird also auch der absolute Werth der Grösse

$$\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}$$

nur klein sein. Setzen wir also

11) $$\varepsilon=-\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2},$$

und folglich nach 6):

12) . . . . . $P=\dfrac{(a+b+c)\Delta'}{3}\sqrt{1-\varepsilon}$,

*) Wenigstens die bis hierher entwickelten Formeln möchte ich zur künftigen Aufnahme in den stereometrischen Elementar-Unterricht und die betreffenden Lehrbücher sehr empfehlen.

so kann in solchen Fällen zur Berechnung der in dieser Formel vorkommenden Quadratwurzel vortheilhaft das Binomial-Theorem angewandt werden, wodurch wir den folgenden Ausdruck erhalten:

13)

$$p=\frac{(a+b+c)\Delta'}{3}\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2.4}\varepsilon^2-\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon^4-\ldots.\right)$$

oder

14)

$$p=\frac{(a+b+c)\Delta'}{3}\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2-\frac{1}{16}\varepsilon^3-\frac{5}{128}\varepsilon^4-\ldots.\right),$$

welcher eine desto leichtere Rechnung gewährt, je kleiner ε ist.

IV.

Nach einem bekannten Satze der Lehre von den Projectionen ist, wenn i' den Neigungswinkel der Ebene $A'B'C'$ gegen den Horizont, d. h. im Allgemeinen gegen die Ebene ABC, bezeichnet:

$$\Delta=\Delta'\cos i',$$

also nach 4) offenbar

15)

$$\cos i'=\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}},$$

folglich:

16)

$$\sin i'^2=-\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}=\varepsilon,$$

woraus:

17)

$$\sin i'=\frac{\sqrt{-\{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)\}}}{2\Delta'}$$

oder

18)

$$\sin i'=\frac{\sqrt{a'^2(a-b)(a-c)+b'^2(b-c)(b-a)+c'^2(c-a)(c-b)}}{2\Delta'}$$

folgt, welche Formeln gleichfalls sehr bemerkenswerth und mancher Anwendungen fähig sind.

V.

Wenn in Taf. VIII. Fig. III. die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ respective S und S' sind, so ist bekanntlich

$$AD=BD,\ A'D'=B'D';\ \ SD=\tfrac{1}{2}CS,\ S'D'=\tfrac{1}{2}C'S';$$

woraus zunächst auf der Stelle erhellet, dass die Linie SS', welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen des Prismas mit einander verbindet, den Kanten AA', BB', CC' des Prismas parallel ist, und daher auf ABC senkrecht steht. Ferner ist nach einem leicht zu beweisenden Satze vom Trapezium*):

$$DD'=\tfrac{1}{2}.AA'+\tfrac{1}{2}.BB',$$

$$SS'=\tfrac{2}{3}.DD'+\tfrac{1}{3}.CC';$$

folglich:

$$SS'=\tfrac{1}{3}.AA'+\tfrac{1}{3}.BB'+\tfrac{1}{3}CC'$$

oder

$$SS'=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

Bezeichnen wir also die Entfernung der Schwerpunkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, nämlich der beiden Grundflächen des schief abgeschnittenen geraden dreiseitigen Prismas, von einander, oder nach dem Vorhergehenden die Entfernung des Schwerpunkts der oberen Grundfläche von der unteren, durch E, so ist nach 5):

19) . . . . $P=E\Delta$,

und nach 6) ist:

*) Wenn in Taf. VIII. Fig. IV. in dem Trapezium $AA'BB'$ mit AA' und BB' die Parallele CC' gezogen ist, so erhellet, wenn man durch A eine Parallele mit $A'B'$ legt, auf der Stelle, dass

$$CC'=AA'+(BB'-AA').\frac{AC}{AB}$$

$$=\frac{AA'.(AB-AC)+BB'.AC}{AB}$$

$$=\frac{AA'.BC+BB'.AC}{AB}$$

oder

$$CC'=AA'.\frac{BC}{AB}+BB'.\frac{AC}{AB}$$

ist.

20)

$$P = E\Delta'\sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}}.$$

VI.

Ein schief abgeschnittenes gerades Prisma von beliebiger Seitenzahl kann man, wie Taf. VIII. Fig. V. zeigt, immer in mehrere schief abgeschnittene gerade dreiseitige Prismen zerlegen, deren untere und obere Grundflächen wir mit Bezug auf die genannte Figur durch

$$\Delta_1, \Delta_1'; \quad \Delta_2, \Delta_2'; \quad \Delta_3, \Delta_3'; \quad \Delta_4, \Delta_4'; \quad \Delta_5, \Delta_5'$$

bezeichnen wollen. Bezeichnen wir dann ferner die Entfernungen der Schwerpunkte der Grundflächen dieser schief abgeschnittenen geraden dreiseitigen Prismen von einander, welche nach V. zugleich die Entfernungen der Schwerpunkte der oberen Grundflächen von der unteren Grundfläche des ganzen Prismas sind, respective durch

$$E_1, \; E_2, \; E_3, \; E_4, \; E_5$$

und den Inhalt des ganzen schief abgeschnittenen Prismas durch P; so ist nach 19):

$$P = E_1\Delta_1 + E_2\Delta_2 + E_3\Delta_3 + E_4\Delta_4 + E_5\Delta_5.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist aber, wenn wir die Entfernung des Schwerpunktes der oberen Grundfläche des ganzen schief abgeschnittenen Prismas von dessen unterer Grundfläche durch E bezeichnen:

$$E = \frac{E_1\Delta_1' + E_2\Delta_2' + E_3\Delta_3' + E_4\Delta_4' + E_5\Delta_5'}{\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' + \Delta_4' + \Delta_5'},$$

oder, wenn Δ' den Inhalt der ganzen oberen schiefen Grundfläche unseres Prismas bezeichnet, so dass

$$\Delta' = \Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' + \Delta_4' + \Delta_5'$$

ist:

$$E\Delta' = E_1\Delta_1' + E_2\Delta_2' + E_3\Delta_3' + E_4\Delta_4' + E_5\Delta_5',$$

folglich auch, wenn i' den Neigungswinkel der oberen Grundfläche gegen die untere bezeichnet:

$$E\Delta'\cos i'$$

$$= E_1\Delta_1'\cos i' + E_2\Delta_2'\cos i' + E_3\Delta_3'\cos i' + E_4\Delta_4'\cos i' + E_5\Delta_5'\cos i',$$

also nach dem schon oben angewandten bekannten Satze von den Projectionen, wenn $\varDelta$ den Inhalt der ganzen unteren Grundfläche unsers Prismas bezeichnet:

$$E\varDelta = E_1\varDelta_1 + E_2\varDelta_2 + E_3\varDelta_3 + E_4\varDelta_4 + E_5\varDelta_5.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$21) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad P = E\varDelta,$$

und die oben für das schief abgeschnittene gerade dreiseitige Prisma bewiesene Formel 19) gilt daher allgemein für jedes schief abgeschnittene gerade Prisma von beliebiger Seitenzahl.

Aus der bekannten Construction, durch welche man den Schwerpunkt einer beliebigen geradlinigen Figur, die man in Dreiecke zerlegt hat, nach und nach aus den Schwerpunkten dieser Dreiecke zu finden pflegt, erhellet auf der Stelle, dass die Entfernung E des Schwerpunkts der oberen Grundfläche unsers Prismas von seiner unteren Grundfläche die gerade Linie ist, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen mit einander verbindet.

Wenn man in der oberen schiefen Grundfläche unsers Prismas drei ganz beliebige Punkte A', B', C' annimmt, deren Entfernungen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oder a', b', c' von einander misst und ihre senkrechten Abstände a, b, c von der unteren Grundfläche nach dem gewöhnlichen praktischen Verfahren bestimmt, so ist nach 15):

$$\cos i' = \sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)}{4s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}},$$

wo wie früher

$$2s' = a' + b' + c'$$

ist, oder

$$\cos i' = \sqrt{1 + \frac{4\{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)\}}{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(c'+a'-b')(a'+b'-c')}},$$

also, wenn $\varDelta$ und $\varDelta'$ wie oben die ganze untere und obere Grundfläche des schief abgeschnittenen mehrseitigen Prismas bezeichnen, da nach dem schon mehrfach angewandten Satze von den Projectionen allgemein $\varDelta = \varDelta' \cos i'$ ist, nach 21):

22)

$$P = E\varDelta' \sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)}{4s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}}$$

oder

23)

$$P = E\Delta' \sqrt{1 + \frac{4\{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)\}}{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(c'+a'-b')(a'+b'-c')}}.$$

Bezeichnen wir den Inhalt des vorher auf der oberen Grundfläche unsers Prismas beliebig angenommenen Dreiecks, dessen Seiten a', b', c' sind, jetzt durch D'; so ist

$$D'^2 = s'(s'-a')(s'-b')(s'-c'),$$

also:

24)

$$P = E\Delta' \sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)}{4D'^2}},$$

wo man D' auch durch Messung einer Seite und der entsprechenden Höhe des betreffenden Dreiecks bestimmen kann.

Die vorstehenden Formeln, in denen alle zu messenden Elemente sich auf die obere schiefe Grundfläche des Prismas beziehen, und in allen Fällen durch die bekannten Methoden mittelst des Maassstabes, der Nivellir-Latte und des Nivellir-Instruments leicht und genau ermittelt werden können, gelten auch für schief abgeschnittene gerade Cylinder, weil im Vorhergehenden natürlich die Seitenzahl des Prismas sich beliebig gross annehmen lässt, die Seitenflächen desselben beliebig klein angenommen werden können.

VII.

Wir wollen uns jetzt ein Prisma von beliebiger Seitenzahl von zwei gegen seine parallelen Seitenkanten willkührlich geneigten Ebenen durchschnitten denken, wodurch zwei Schnitte entstehen, deren Flächenräume wir durch Δ' und Δ_1', und den Inhalt des zwischen diesen Schnitten enthaltenen Körpers durch P bezeichnen wollen. Die Schnitte Δ' und Δ_1' mögen der Kürze wegen die Grundflächen dieses Körpers genannt werden. Denken wir uns nun ferner einen auf den parallelen Seitenkanten des Körpers P senkrecht stehenden Schnitt Δ, welcher entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des Körpers P liegt, so dass im ersten Falle die Grundfläche Δ_1' zwischen der Grundfläche Δ' und dem senkrechten Schnitte Δ liegt, und bezeichnen die Entfernungen der Schwerpunkte der Grundflächen Δ' und Δ_1' von dem

senkrechten Schnitte Δ respective durch E und E_1; so ist nach 21) offenbar

$$P=E\Delta\mp E_1\Delta=(E\mp E_1)\Delta,$$

indem man in dem ersten der beiden obigen Fälle das obere, in dem zweiten dieser beiden Fälle dagegen das untere Zeichen zu nehmen hat. Aus VI. erhellet unmittelbar, dass die Schwerpunkte von Δ', Δ_1', Δ in einer und derselben auf dem Schnitte Δ senkrecht stehenden geraden Linie liegen, so dass also $E\mp E_1$ die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Grundflächen des Körpers P von einander, und folglich, wenn wir diese Entfernung durch $\mathfrak{E}$ bezeichnen, nach dem Obigen

25) . . . . $P=\mathfrak{E}\Delta$

ist.

Nehmen wir nun etwa in der Grundfläche Δ', die unter dem Winkel i' gegen Δ geneigt sein mag, drei beliebige Punkte A', B', C' an, und messen deren Entfernungen $B'C'=a'$, $C'A'=b'$, $A'B'=c'$ von einander, so wie ihre senkrechten Abstände a, b, c von der Ebene des senkrechten Schnitts Δ; so ist, wenn D' den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ bezeichnet, bekanntlich:

$$\cos i'=\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4D'^2}},$$

also offenbar:

26)

$$P=\mathfrak{E}\Delta'\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4D'^2}}.$$

Ist das Prisma ein dreiseitiges, und sind a, b, c und a_1, b_1, c_1 die senkrechten Abstände der Ecken der Grundflächen Δ' und Δ_1' von dem senkrechten Schnitte Δ, so ist bekanntlich

$$E=\frac{a+b+c}{3},\quad E_1=\frac{a_1+b_1+c_1}{3};$$

also

$$E\mp E_1=\frac{(a\mp a_1)+(b\mp b_1)+(c\mp c_1)}{3},$$

oder, wenn wir die Entfernungen der Ecken der beiden Grundflächen Δ' und Δ_1' von einander durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnen:

$$E\mp E_1=\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{3},$$

also nach dem Obigen:

27) . . . . $$P=\frac{a+b+c}{3}\Delta.$$

Bezeichnen aber wie gewöhnlich a', b', c' Seiten der Grundfläche Δ' in der oben immer festgehaltenen Ordnung, so dass nämlich, wenn wir diese Grundfläche durch $A'B'C'$ bezeichnen, wie oben $a'=B'C'$, $b'=C'A'$, $c'=A'B'$ ist, so ist:

28)

$$P=\frac{a+b+c}{3}\Delta'\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}}.$$

Alle diese Formeln sind so entwickelt und dargestellt worden, dass die Bestimmung der Grössen, von denen sie abhängen, in der Praxis keiner Schwierigkeit unterliegt, was mit ein Hauptzweck war, den dieser Aufsatz zu erreichen suchte.

XLV.

Verschiedene Sätze und Resultate.

Von

Herrn Dr. *Zehfuss,*

Lehrer der Mathematik und höheren Mechanik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt.

---

1) Es ist mir nicht bekannt, dass Jemand folgende Integrale bestimmt hätte:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}-1}{1-x^2}\partial x=\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{2},\ldots\ldots,\quad 2>m>0.$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-a}}{x^2-a^2}\partial x=\frac{1}{2a}[e^a\mathrm{li}.e^{-a}-e^{-a}\mathrm{li}.e^a],$$

wo li das Zeichen des Integrallogarithmus vorstellt. Leichter ergibt sich das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Auch ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} \partial x = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\frac{a+b}{a-b}, \ldots, \quad a > b.$$

Auf Verlangen bin ich gerne bereit, die Herleitung dieser Formeln zu veröffentlichen. Besonders eigenthümlich dürfte die Analyse sein, durch welche ich mit Zuziehung des Imaginären die beiden ersten Integrale gefunden habe und welche noch die Werthe einer sehr grossen Anzahl bestimmter Integrale mit den Grenzen ∞ und 0 ergibt.

2) Setzt man $\frac{x\partial y}{y\partial x} = \mathrm{K}(y)$, wo K ein Operationszeichen vorstellt, und $\mathrm{K}(\mathrm{K}y)$ zur Abkürzung $=\mathrm{K}^2y$, $\mathrm{K}(\mathrm{K}^2y) = \mathrm{K}^3y$ u. s. w., so ist

$$y_{nx} = y_x . (\mathrm{K}y)^{\mathrm{l}n} . (\mathrm{K}^2y)^{\frac{(\mathrm{l}n)^2}{1.2}} . (\mathrm{K}^3y)^{\frac{(\mathrm{l}n)^3}{1.2.3}} \text{ u. s. w. } \ldots.$$

Man hat für den Ausdruck Ky den Namen des **Quotials** von y vorgeschlagen. Die obige Reihe ist mithin ein Analogon für die Taylor'sche Reihe, gefunden mittelst der Theorie der Quotiale. Ich habe dieselbe schon vor zehn Jahren gefunden, als ich mich in den ersten selbstständigen Arbeiten versuchte, und bemerkt, dass man auch daraus ableiten könne:

$$f(hx) = f(x) + xf_x'.\mathrm{l}h + x(xf_x')_x'.\frac{(\mathrm{l}h)^2}{1.2} + x(x(xf_x')_x')_x'.\frac{(\mathrm{l}h)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Mittelst des **Cauchy**'schen Satzes über die Taylor'sche Reihe ist es eine leichte Aufgabe, die Grenzen der Giltigkeit der obigen Formeln zu bestimmen.

3) Jeder Zerlegung einer Zahl in vier gerade Quadrate lässt sich noch jede der beiden folgenden als correspondirende beigesellen:

$$(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 + (2d)^2$$
$$= (a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a-b+c-d)^2 + (a-b-c+d)^2$$
$$= (a+b+c-d)^2 + (a+b-c+d)^2 + (a-b+c+d)^2 + (-a+b+c+d)^2.$$

Für $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$ erhält man z. B.

$$2^2+4^2+6^2+10^2 = 11^2+5^2+3^2+1^2 = 9^2+7^2+5^2+1^2.$$

XLVI.

Règle mnémonique pour écrire les formules de Delambre.

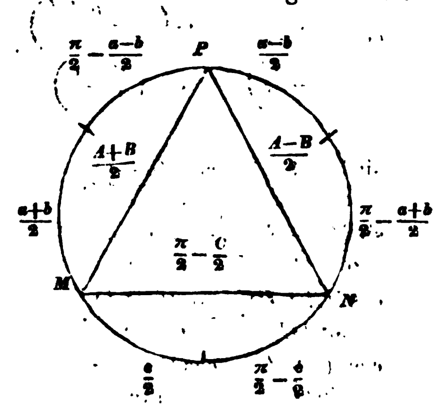
Par

Monsieur *Georges Dostor*,

Docteur ès sciences mathématiques, Membre de la Société des Sciences et Arts de l'Ile de la Réunion (Mer des Indes).

Mauduit a imaginé un moyen mnémonique, pour écrire avec certitude et facilité les relations, qui existent entre les côtés et les angles du triangle sphérique rectangle. Les formules de Delambre, ou analogies de Gauss (comme on les appelle en Allemagne) sont beaucoup plus rebelles au souvenir. Nous avons cru devoir chercher un moyen aisé pour en rendre l'écriture plus facile. Nous avons l'honneur de soumettre au public enseignant le résultat, qui s'est présenté à la suite de nos recherches.

Dans un cercle inscrivons un triangle *PMN*:



Sur les deux côtés *PM*, *PN* du triangle marquons les angles

$$\frac{A+B}{2}, \quad \frac{A-B}{2}$$

et l'angle

$$\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

sur la base MN; enfin sur la suite des demi-arcs soustendus marquons les côtés

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{a-b}{2},\quad \frac{a-b}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{c}{2},\quad \frac{c}{2}.$$

Cela construit, voici la règle mnémonique, que nous avons imaginée:

Le sinus d'un côté du triangle est à celui de la base dans le rapport des sinus des demi-arcs soustendus, qui ne sont pas adjacents au sommet commun.

Le cosinus d'un côté est à celui de la base, dans le rapport des cosinus des demi-arcs soustendus, qui sont adjacents au sommet commun.

On trouve ainsi les quatre formules:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)};$$

ou

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

qui sont celles de Gauss ou de Delambre.

XLVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgabe.

Von Herrn Dr. Zehfuss zu Darmstadt.

Wie beweist man, dass

$$\int_p^{p+1} l\Gamma(x)\partial x = l\sqrt{2\pi} + plp - p?$$

Lehrsatz.

Von Herrn Otto Böklen zu Sulz a. N. in Würtemberg.

Ein Kreis, dessen Halbmesser $=r$, rollt auf der äussern oder innern Seite eines festen Kreises, dessen Halbmesser $=R$ und Mittelpunkt O ist. Man ziehe durch O eine Gerade, welche den Kreis R in den Endpunkten eines Durchmessers QS schneidet, und nehme auf dieser Geraden irgendwo den Punkt A an. Im Anfange der Bewegung sei Q, am Ende S der Berührungspunkt beider Kreise; während derselben beschreibt A einen Quadranten AB einer verlängerten oder verkürzten Epicycloide oder Hypocycloide. Zwei Punkte M und M' auf AB, deren Normalen gleichweit von O abstehen, und zwar um d, theilen den Quadranten AB in drei Theile, wovon die beiden äusseren um eine algebraische Grösse differiren:

$$BM - M'A = 4\frac{R \pm r}{R^2} rd;$$

das obere Zeichen gilt, wenn der Kreis r ausserhalb, das untere, wenn er innerhalb des Kreises R rollt.

Auflösung der drei Gleichungen:

$$(a-x)(b-y)=z,$$
$$(a_1-x)(b_1-y)=z,$$
$$(a_2-x)(b_2-y)=z.$$

Von dem Herausgeber.

Stellt man diese Gleichungen auf folgende Art dar:

$$ab-bx-ay+xy=z,$$
$$a_1b_1-b_1x-a_1y+xy=z,$$
$$a_2b_2-b_2x-a_2y+xy=z$$

und zieht dann die zweite von der ersten, die dritte von der zweiten ab, so erhält man:

$$ab-a_1b_1-(b-b_1)x-(a-a_1)y=0,$$
$$a_1b_1-a_2b_2-(b_1-b_2)x-(a_1-a_2)y=0.$$

Durch Auflösung dieser zwei Gleichungen erhält man:

$$x=-\frac{ab(a_1-a_2)+a_1b_1(a_2-a)+a_2b_2(a-a_1)}{a(b_1-b_2)+a_1(b_2-b)+a_2(b-b_1)},$$
$$y=\frac{ab(b_1-b_2)+a_1b_1(b_2-b)+a_2b_2(b-b_1)}{a(b_1-b_2)+a_1(b_2-b)+a_2(b-b_1)}$$

oder:

$$x=\frac{ab(a_1-a_2)+a_1b_1(a_2-a)+a_2b_2(a-a_1)}{b(a_1-a_2)+b_1(a_2-a)+b_2(a-a_1)},$$
$$y=-\frac{ab(b_1-b_2)+a_1b_1(b_2-b)+a_2b_2(b-b_1)}{b(a_1-a_2)+b_1(a_2-a)+b_2(a-a_1)}.$$

oder:

$$x=\frac{a(a_1b_1-a_2b_2)+a_1(a_2b_2-ab)+a_2(ab-a_1b_1)}{(ab_1-ba_1)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b-ab_2)},$$
$$y=-\frac{b(a_1b_1-a_2b_2)+b_1(a_2b_2-ab)+b_2(ab-a_1b_1)}{(ab_1-ba_1)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b-ab_2)};$$

oder auch:

$$x=-\frac{aa_1(b-b_1)+a_1a_2(b_1-b_2)+a_2a(b_2-b)}{a(b_1-b_2)+a_1(b_2-b)+a_2(b-b_1)},$$
$$y=-\frac{bb_1(a-a_1)+b_1b_2(a_1-a_2)+b_2b(a_2-a)}{b(a_1-a_2)+b_1(a_2-a)+b_2(a-a_1)}.$$

An diesen und noch andern Umgestaltungen der vorhergehenden Ausdrücke von x und y können die Schüler sich mannigfaltig versuchen.

Ferner findet man nun hieraus leicht:

$$a-x=\frac{(a-a_1)(a-a_2)(b_1-b_2)}{a(b_1-b_2)+a_1(b_2-b)+a_2(b-b_1)},$$

$$b-y=\frac{(a_1-a_2)(b-b_1)(b-b_2)}{b(a_1-a_2)+b_1(a_2-a)+b_2(a-a_1)};$$

oder:

$$a-x=\frac{(a-a_1)(a-a_2)(b_1-b_2)}{(ab_1-ba_1)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b-ab_2)},$$

$$b-y=-\frac{(a_1-a_2)(b-b_1)(b-b_2)}{(ab_1-ba_1)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b-ab_2)}.$$

Folglich ist endlich

$$z=-\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)(b-b_1)(b_1-b_2)(b_2-b)}{\{(ab_1-ba_1)+(a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b-ab_2)\}^2},$$

wo man den Nenner wieder verschiedentlich umgestalten könnte.

Dergleichen, zu mehrfachen eleganten und symmetrischen Umgestaltungen Gelegenheit gebende Aufgaben scheinen mir für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik und Algebra besonders zweckmässig zu sein, mehr als viele andere in den Aufgabensammlungen vorkommende, die auf einen undurchsichtigen Wald complicirter Formeln führen. Auch spricht sich gerade in solchen eleganten Transformationen der Charakter der neueren Analysis vielfach aus, und dass der Schüler frühzeitig in denselben eingeführt und mit ihm bekannt gemacht werde, ist sehr zu wünschen, wozu natürlich möglichst einfache und besonders zweckmässige Aufgaben und Beispiele erforderlich sind.

XLVIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

I.

Der von mir in Thl. XXIV. S. 403. mittelst der Integralrechnung bewiesene merkwürdige Ausdruck für den Flächeninhalt eines, seine Spitze im Mittelpunkte der Ellipse habenden elliptischen Sectors kann auf elementarem Wege auf folgende Weise leicht gefunden werden, was ich im Interesse des Unterrichts in der Lehre von den Kegelschnitten hier mittheile.

Der Mittelpunkt der Ellipse sei C. Zwei durch die Anomalien u_0 und u_1 bestimmte Punkte der Ellipse seien A_0 und A_1. Die diese Punkte mit einander verbindende Sehne A_0A_1 der Ellipse werde durch $s_{0,1}$ bezeichnet, so ist bekanntlich *):

$$s_{0,1}{}^2 = a^2(\cos u_0 - \cos u_1)^2 + b^2(\sin u_0 - \sin u_1)^2.$$

Bezeichnen wir nun ferner die von dem Mittelpunkte C nach den Punkten A_0 und A_1 gezogenen Halbmesser CA_0 und CA_1 der Ellipse durch r_0 und r_1, und den Winkel A_0CA_1 des durch die Punkte A_0, C, A_1 bestimmten Dreiecks durch C, den Flächeninhalt dieses Dreiecks aber durch $\varDelta$; so ist

$$r_0{}^2 = a^2\cos u_0{}^2 + b^2\sin u_0{}^2,\quad r_1{}^2 = a^2\cos u_1{}^2 + b^2\sin u_1{}^2$$

und

$$\cos C = \frac{r_0{}^2 + r_1{}^2 - s_{0,1}{}^2}{2r_0r_1},$$

also, wie man leicht findet, wenn man in diese Formel die obigen Ausdrücke von $r_0{}^2$, $r_1{}^2$, $s_{0,1}{}^2$ einführt:

$$\cos C = \frac{a^2\cos u_0 \cos u_1 + b^2 \sin u_0 \sin u_1}{\sqrt{(a^2\cos u_0{}^2 + b^2\sin u_0{}^2)(a^2\cos u_1{}^2 + b^2\sin u_1{}^2)}},$$

*) Thl. XXIV. S. 373.

woraus sich ferner leicht

$$\sin C = \pm \frac{ab\sin(u_1-u_0)}{\sqrt{(a^2\cos u_0{}^2+b^2\sin u_0{}^2)(a^2\cos u_1{}^2+b^2\sin u_1{}^2)}},$$

oder

$$\sin C = \pm \frac{ab\sin(u_1-u_0)}{r_0 r_1}$$

ergiebt, wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\sin(u_1-u_0)$ positiv oder negativ ist. Weil nun

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r_0 r_1 \sin C$$

ist, so ist

$$\Delta = \pm\tfrac{1}{2}ab\sin(u_1-u_0),$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\sin(u_1-u_0)$ positiv oder negativ ist.

Wir nehmen jetzt an, dass u_1 grösser als u_0 sei, und bezeichnen den Flächeninhalt des, der Differenz u_1-u_0 dieser Anomalien entsprechenden elliptischen Sectors durch $S_{0,1}$. Um $S_{0,1}$ zu bestimmen, theile man u_1-u_0 in n gleiche Theile ein, deren jeder i sein mag, so dass also

$$\frac{u_1-u_0}{n} = i$$

ist. Da wir uns nun bei der folgenden Gränzenbetrachtung offenbar immer n so gross, oder das positive i so klein angenommen denken können, dass $\sin i$ positiv ist; so ist offenbar unter der Voraussetzung, dass n in's Unendliche wächst, also i in's Unendliche abnimmt, nach dem Obigen:

$$S_{0,1} = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Lim}\{\sin i+\sin i+\sin i+\sin i+\ldots+\sin i\},$$

wo die Anzahl der Glieder der eingeklammerten Reihe n ist. Folglich ist

$$S_{0,1} = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Lim}.\,n\sin i,$$

also, weil nach dem Obigen

$$n = \frac{u_1-u_0}{i}$$

ist:

$$S_{0,1} = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Lim}\frac{(u_1-u_0)\sin i}{i},$$

und folglich, wenn $u_1 - u_0$ in Theilen der Einheit ausgedrückt angenommen wird, offenbar:

$$S_{0,1} = \tfrac{1}{2}ab(u_1 - u_0)\,\mathrm{Lim}\frac{\sin i}{i}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten Satze

$$\mathrm{Lim}\frac{\sin i}{i} = 1,$$

also

$$S_{0,1} = \tfrac{1}{2}ab(u_1 - u_0),$$

welches die in Thl. XXIV. S. 403. durch die Integralrechnung bewiesene Formel ist, zu der wir also hier bloss mittelst ganz elementarer Betrachtungen, im Interesse des Unterrichts in der Lehre von den Kegelschnitten, gelangt sind.

Für die ganze Ellipse ist $u_1 - u_0 = 2\pi$, also, wenn E den Flächeninhalt der ganzen Ellipse bezeichnet,

$$E = ab\pi,$$

so dass also auf diese Weise auch die ganze Ellipse quadrirt ist.

Von der obigen allgemeinen Formel für den Flächeninhalt eines elliptischen Sectors lassen sich vielerlei Anwendungen machen, die aber, einer Schwierigkeit nicht unterliegend, natürlich nicht hierher gehören.

II.

Nachtrag und Berichtigung zu der Abhandlung: Ueber die Bestimmung der Directrixen, Brennpunkte und Charakteristiken oder Determinanten der Linien des zweiten Grades im Allgemeinen in Thl. XXV. Nr. XXII.

In meiner oben genannten Abhandlung kommt auf S. 281. ein Versehen vor, welches eine Berichtigung erfordert, wenn es auch nur eine beiläufige Bemerkung, nicht den eigentlichen Gegenstand der Abhandlung betrifft, indem dieselbe es nicht eigentlich mit der Discussion der Linien des zweiten Grades, sondern lediglich mit der Bestimmung der Directrixen, Brennpunkte und Charakteristiken dieser Curven durch ganz allgemeine Formeln zu thun hat, welchem letzteren Zwecke auch mit möglichster Vollständigkeit in dieser Abhandlung entsprochen sein dürfte. Jedenfalls

aber bedarf dieselbe eines Nachtrags, den ich, nebst einer Berichtigung des erwähnten Versehens, hier geben werde.

Auf S. 281. ist nämlich Folgendes gesagt:

„Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, so sind beide Werthe von C imaginär, und es giebt also in diesem Falle weder eine Directrix, noch einen Brennpunkt. Weil man anderweitig (m. s. den Aufsatz Nr. XII. in diesem Theile) weiss, dass in dem vorliegenden Falle, wo $c^2-ab>0$ ist, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur eine Hyperbel oder zwei gerade Linien repräsentiren kann, die Hyperbel aber immer zwei Brennpunkte und zwei Directrixen hat, so kann in dem Falle, wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

nur zwei gerade Linien repräsentiren, was wir jetzt der Kürze wegen nicht weiter analytisch untersuchen wollen."

Man sieht es dieser Bemerkung an ihrem Schlusssatze an, dass sie nur beiläufig gemacht sein sollte. Dieselbe enthält aber eine Unrichtigkeit, welche darin ihren Grund hat, dass von mir übersehen worden ist, dass in dem vorliegenden Falle, wo $c^2-ab>0$ ist, a und b ganz beliebige Grössen sein können, nicht wie in den beiden andern Fällen, wenn $c^2-ab=0$ oder $c^2-ab<0$ ist, beide als negativ vorausgesetzt werden müssen, wie dies auch auf S. 276. besonders hervorgehoben worden ist. Man hat nun aber die obige Bemerkung ganz zu streichen und sich vielmehr an die folgende Auseinandersetzung zu halten.

„Wenn

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist, so hat man zu bemerken, dass nach dem Obigen a und b zwei ganz beliebige Grössen sein können, weshalb man die gegebene Gleichung der Curve sowohl unter der Form

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0,$$

als auch unter der Form

$$-ax^2-by^2-2cxy-2dx-2ey-f=0$$

schreiben kann, in welchen beiden Formen die Coefficienten aller Glieder, insbesondere auch die Coefficienten von xy, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bezeichnen wir nun die der zweiten Form entsprechenden Werthe von n, A, B respective durch n', A', B'; so ist der, der zweiten Form entsprechende, Werth von

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}$$

offenbar

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2-fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\},$$

wo in der ersten Grösse für d, e, f, n, A, B respective $-d$, $-e$, $-f$, n', A', B' gesetzt worden ist, wie es sein muss.

Nach S. 271. und S. 272. ist

$$n^2-1=\frac{a^2+b^2+2c^2+(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}$$

und

$$A=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$A=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B=\mp\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

jenachdem c positiv oder negativ ist. Also ist beziehungsweise:

$$n'^2-1=\frac{a^2+b^2+2c^2-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)}$$

und

$$A'=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B'=\mp\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$A'=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B'=\pm\left\{\frac{c^2-ab}{\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\cdot\frac{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}+(a^2+b^2+2c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\frac{B}{A}=\pm\left\{\frac{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{a(a-b)+2c^2+a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{B'}{A'}=\mp\left\{\frac{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

woraus man mittelst leichter Rechnung die Gleichung

$$\frac{B}{A}\cdot\frac{B'}{A'}=-1,\quad\text{also}\quad\frac{B'}{A'}=-\frac{A}{B}$$

erhält; und ferner ergiebt sich mittelst des Obigen eben so leicht die Gleichung

$$(n^2-1)(n'^2-1)=1,\quad\text{also}\quad n'^2-1=\frac{1}{n^2-1}.$$

Folglich ist nach dem Obigen, wie man leicht findet, wenn man für $\frac{B'}{A'}$ und n'^2-1 ihre vorhergehenden Werthe setzt:

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2-fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\}$$

$$=\frac{(n^2-1)(eA-dB)^2-\{(dA+eB)^2-f\frac{A'^2}{B^2}(A^2+B^2)^2\}}{(n^2-1)B^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$\frac{A'^2}{B^2}=\frac{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2+2c^2+(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{a^2+b^2+2c^2-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}},$$

und folglich, weil, wie man leicht findet:

$$\{a(a-b)+2c^2-a\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\}\{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\}$$
$$=2c^2\{a^2+b^2+2c^2-(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\},$$

$$\{b(b-a)+2c^2+b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\}\{b(b-a)+2c^2-b\sqrt{(a-b)^2+4c^2}\}$$
$$=4c^2(c^2-ab)$$

ist, offenbar:

$$\frac{A'^2}{B^2}=\frac{a^2+b^2+2c^2+(a+b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}}{2(c^2-ab)},$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{A'^2}{B^2}=n^2-1.$$

Daher ist

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2-fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\}$$

$$=\frac{(n^2-1)(eA-dB)^2-\{(dA+eB)^2-(n^2-1)f(A^2+B^2)^2\}}{(n^2-1)B^2}$$

oder

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2-fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\}$$

$$=-\frac{(dA+eB)^2-(n^2-1)\{(eA-dB)^2+f(A^2+B^2)^2\}}{(n^2-1)B^2},$$

oder

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2-fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\}$$

$$=-\frac{A^2}{B^2}\cdot\frac{(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}}{n^2-1}.$$

Weil nun in diesem Falle n^2-1 positiv ist, so haben die Grössen

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}$$

und

$$(d+e\frac{B'}{A'})^2-(n'^2-1)\{(e-d\frac{B'}{A'})^2+fA'^2(1+\frac{B'^2}{A'^2})^2\}$$

jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen, und wenn also die erste negativ ist, so ist die zweite positiv.

Also liefert in diesem Falle immer entweder die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

oder die Gleichung

$$-ax^2-by^2-2cxy-2dx-2ey-f=0,$$

welche Gleichungen natürlich beide ganz dieselbe Curve ausdrücken, für C, X, Y reelle Werthe, und in dem Falle

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}<0$$

ist also die durch die Gleichung

$$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f=0$$

charakterisirte Curve ebensowohl eine Hyperbel wie in dem Falle

$$(d+e\frac{B}{A})^2-(n^2-1)\{(e-d\frac{B}{A})^2+fA^2(1+\frac{B^2}{A^2})^2\}>0,$$

natürlich immer unter der Voraussetzung, dass

$$c^2-ab>0$$

ist."

Ich bitte nochmals, das Vorstehende meiner oben genannten Abhandlung als einen Nachtrag beizufügen, oder vielmehr statt der oben näher bezeichneten Stelle in dieselbe einzuschalten.

Schreiben des Herrn Professor Dr. Koenig am Kneiphöfischen Gymnasio zu Königsberg i. Pr. an den Herausgeber.

In dem dritten Hefte des 30sten Theils Ihres geschätzten Archivs finde ich Seite 356. einen geometrischen Satz bewiesen und am Schluss die Frage: „Wie lässt sich dieser Satz einfacher beweisen?" Wenn hierin vielleicht der Wunsch liegt, einen

einfachern Beweis zu erhalten, so erlaube ich mir, hier einen solchen mitzutheilen.

Behält man dieselben Figuren (Taf. III. Fig. 8.) und multiplicirt die Quadrate von AB und AD gleich resp. mit CD und CB, so entsteht:

$$AB^2.CD = AC^2.CD + BC^2.CD \mp 2BC.CE.CD,$$

$$AD^2.CB = AC^2.CB + CD^2.CB \mp 2CD.CE.CB;$$

und die untere Gleichung von der oberen abgezogen giebt:

$$AB^2.CD - AD^2.CB = -AC^2(CB-CD) + BC.CD(CB-CD)$$

$$= -AC^2.BD + BC.CD.BD,$$

w. z. b. w.

Bemerkung vom Herausgeber.

Unter den in Nr. XXVII. dieses Theils von Herrn Director Heinen in Düsseldorf veröffentlichten und eingesandten Beweisen des geometrischen Lehrsatzes von Fermat rühren die mit B. bezeichneten von einem Primaner der dortigen Realschule, A. Siebel, her, welches auf den Wunsch des Einsenders, und in Folge einer schon früher brieflich gemachten Bemerkung desselben, hier nachträglich besonders bemerkt wird.

Berichtigungen.

Thl. XXX. S. 52. Z. 26. v. o. statt „Comptes Rondus" setze man „Comptes Rendus."

„ „ S. 119. Z. 13. u. 18. v. u. werde für „Prisma $ABA'B'A''B''$" beide Mal gesetzt: „Prisma $ABA'C'A''C''$."

Literarischer Bericht

CXVII.

Am 16ten November 1857 starb zu Berlin der frühere Professor der Mathematik am dortigen Königlichen Cadetten-Corps und an der Universität Dr. Johann Philipp Grüson, das älteste Mitglied der Königlichen Akademie der Wissenschaften, im 90sten Lebensjahre, seit vielen Jahren pensionirt.

Die Mittheilung eines Necrologs von einer kundigen Feder zur Aufnahme in's Archiv würde uns angenehm sein. Gr.

Geometrie.

Ueber harmonische Punkte. Von Prof. Paul Hackel. (Programm des k. k. Ober-Gymnasiums zu Böhmisch-Leippa am Schlusse des Schuljahres 1857.) Prag, Druck von Haase Söhne. 1857. 8.

Es ist von uns schon öfter als zweckmässig anerkannt worden, dass zum Gegenstande von Schul-Programmen solche der neueren Forschung angehörende Theorieen, die nicht in den Kreis der gewöhnlichen Elemente gehören, gewählt werden, wie in dem vorliegenden Programm die Theorie der harmonischen Punkte. Dergleichen Abhandlungen, wenn ihr Gegenstand so einfach und deutlich behandelt wird, wie in der vorliegenden Schulschrift, können dann sehr wohl dazu dienen, um, fähigern und vorgerückteren Schülern zum eigenen Studium in die Hände gegeben, dieselben weiter zu üben und mit der neueren weiteren Ausbildung der Geometrie und der Wissenschaft überhaupt bekannt zu machen. In sehr zweckmässiger Kürze, wie es das Bedürfniss der Schüler fordert, ist in der vorliegenden Schrift

die Theorie der harmonischen Punkte recht deutlich in systematischem Zusammenhange behandelt worden, und es finden sich auch manche hübsche eigene Beweise darin, wie z. B. 17., 23., 24. u. s. w. Auch ist zweckmässig in 26. die Anwendung der Sätze von den harmonischen Punkten zu der kurzen Entwickelung der Grundformel der Theorie der sphärischen Spiegel gezeigt, und mehrere geometrische Aufgaben sind zu weiterer Erläuterung am Schluss aufgelöst.

Optik.

Ich habe es im Interesse der Sache für meine Pflicht gehalten, nachstehende mir zugesandte Anzeige ihrem wesentlichen Inhalte nach im Archive abdrucken zu lassen. In Bezug auf die angegebenen Leistungen, insofern dieselben vollständig erfüllt werden, sind die Preise allerdings niedrig gestellt. Gesehen habe ich jedoch bis jetzt keins dieser Instrumente, so dass ich mir also ein Urtheil über dieselben nicht erlauben kann, da mir auch kein anderes fremdes Urtheil zur Seite steht. Rücksichtlich der Preise bitte ich die auch ungemein niedrig gestellten Preise der so vortrefflichen Instrumente des Herrn v. Steinheil in München im Literar. Bericht Nr XCVII. S. 8. und Nr. CXI. S. 7. zu vergleichen. Grunert.

Empfehlung vollkommen achromatischer optischer Instrumente.

Zu den wesentlichsten Hülfsmitteln der Naturwissenschaft gehören unstreitig das

Fernrohr, Mikroskop und die Lupe.

Eine weitere bekannte Thatsache ist es, dass diese Instrumente zum wissenschaftlichen Gebrauche einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht haben müssen, wenn sie dienstthuend sein sollen, in welchem Falle dieselben aber auch dann beim Ankauf sehr theuer zu stehen kommen.

Mein Zweck ist nun, Instrumente von vorzüglicher und geprüfter Güte um die möglichst billigen Preise allen denen zu liefern, welche sich theils als Fachmänner mit dem Studium der Naturwissenschaft beschäftigen, theils aber auch denen, welche bloss als Liebhaber naturwissenschaftliche Studien cultiviren.

Die Instrumente ersterer Art sind Fernrohre von 24''' Oeffnung und 24'' Brennweite mit verstellbarem irdischen Okulare von 30—40maliger Vergrösserung, mit 40, 60, 80 und 126maliger astronomischer Vergrösserung. Ein solches Fernrohr erhält eine mit horizontaler und verticaler Bewegung versehene Baumschraube oder auf Verlangen ein Stativ mit Sucher.

Die Instrumente der zweiten Art sind kleine Tuben, mit irdischen und astronomischen Okularen bei 14''' Oeffnung und 9'' Brennweite. Die

irdische Okular vergrössert 20mal, die 3 astronomischen 30, 60 und 80mal; das Instrument erhält gleichfalls eine Baumschraube oder Stativ auf Verlangen und es werden die Instrumente der ersten und zweiten Art in eleganten Kästchen geordnet dem Käufer überliefert und sind beide Instrumente mit gezähnter Windenstange und mit Getriebe der feineren Einstellung halber versehen.

Als Leistungsfähigkeit der besagten grösseren Instrumente wird garantirt, dass bei günstiger Atmosphäre und hohem Stande des Planeten die Theilung des Saturn's-Ringes, die Theilung äusserst feiner Doppelsterne, wie z. B. Mesarthim im Widder, 5 Sterne im Trapez des Orion-Nebels etc. beobachtet werden können, auch wird bei irdischen Beobachtungen auf eine Entfernung von 2 deutschen Meilen jede Bewegung eines Menschen noch erkannt werden. Die kleineren Tuben werden verhältnissmässig Aehnliches leisten und es wird mit denselben der Ring des Saturns, die Phasen der Venus, feinstes Detail auf der Mondoberfläche, die Streifen des Jupiter und die Verfinsterung seiner Trabanten, sowie nicht allzu nahestehende Doppelsterne beobachtet werden können, wenn die letzteren nicht unter 5 Sekunden Distanz haben.

Weiter liess ich anfertigen zum bequemen Handgebrauche auf Reisen und Spaziergängen sogenannte Feldstecher, das sind kleinere irdische Fernröhre nach neuerer Construction.

Diese Instrumente von älterer Einrichtung finden wegen ihres kleinen Sehfeldes wenig Anklang mehr. Ich liess dieselben nun in der Weise ausführen, dass dieselben, unbeschadet der Deutlichkeit, eine ungemein grosse Oeffnung des Objectivs bei kurzer Brennweite erhalten, wodurch das Instrument ein grosses Gesichtsfeld darbietet. Das achromatische Doppelokular hat über 7 pariser Linien Oeffnung und dabei doch eine so kleine Zerstreuungsweite, dass es eine namhafte Vergrösserung gestattet, ohne die Bilder am Rande des Gesichtsfeldes zu verziehen. Die Leistungsfähigkeit eines solchen Instrumentes wird dahin garantirt: auf eine Entfernung von 2 deutschen Meilen werden kleine Fensteröffnungen ohne Mühe erkannt und gezählt, auch die Bewegungen eines Menschen auf eine Meile beobachtet. Die Instrumente eignen sich wegen ihrer Bequemlichkeit mit kleiner Baumschraube versehen für Forstleute, Bahnbedienstete und Reisende, sowie sie auch bequem für die Bühne zu gebrauchen sind, weil sie neben ihrer Leistungsfähigkeit für die Ferne auch die Künstler auf den Brettern in unmittelbare Nähe des Beobachters bringen. Ihre Länge beträgt ausgezogen 4½ und zusammengeschoben 2½″ pariser Maasses.

Die Einrichtung dieser Instrumente ist nicht etwa bloss ein optischer Gedanke, dessen Realisirbarkeit noch in Frage steht, sondern es sind solche bereits ausgeführt und ihre Leistungen erprobt.

Endlich erbiete ich mich auch, zusammengesetzte Mikroskope Aerzten, Apothekern, Naturforschern und Technikern zu liefern und sie werden den Anforderungen der Wissenschaft entsprechen; dieselben gewähren einen ausreichenden Wechsel von Vergrösserungen; von der 40fachen bis zur 500maligen im Diameter hinansteigend, dienen sie zur Betrach-

tung transparenter, wie opaker Objecte. Der Objectenträger ist durch eine gezähnte Stange beweglich und das ganze Instrument ist so raumersparend in ein Mahagoni-Kästchen geordnet, dass es der Besitzer auf allen Ausflügen ohne alle Belästigung mit sich führen kann. Freiheit von prismatischen Farbenrändern, grosse Klarheit und feine Deutlichkeit, ohne dass das Auge des Beobachters durch jenes eigenthümliche, falsch gebrochene Licht, welches ein Fehler so mancher Mikroskope ist, belästigt wird, sind die Eigenschaften meiner zusammengesetzten Mikroskope.

Beispielshalber wird als eine der Leistungen dieser Mikroskope aufgeführt, dass es die Liniamente auf den Flügelschuppen des Kohlweisslings erkennen lässt, welche Beobachtung bekanntlich zu den schwierigeren der Mikroskopik gehört.

Jedem Instrumente werden eine Anzahl Probeobjecte beigegeben.

Meine vorzüglichen Lupen zum Gebrauche und zur vorläufigen Beobachtung mikroskopischer Objecte mit aplanatischer Construction in Messingröhrchen gefasst von 24maliger bis 60maliger Vergrösserung im Diameter kann ich Aerzten und Apothekern bestens empfehlen.

Refractoren von 4″ freier Oeffnung bis 9″ werden, paralaktisch aufgestellt, um die möglichst billigsten Preise für Sternwarten angefertigt und bei vollkommenster Achromasie, Klarheit und Deutlichkeit der Bilder über die ganze Fläche des Objectives wird auf einzulaufende Bestellung hin die Leistungsfähigkeit garantirt.

Die vorläufigen Preise der vorbenannten Instrumente sind:

1) **Tuben** 24‴ Oeffnung mit verstellbarem irdischen Okulare, 30 und 40maliger Vergrösserung, dann 40, 60, 80 und 126maliger astronomischer Vergrösserung, 40 Thlr. preuss. Cour. oder 70 fl. rhein. oder 60 fl. Conv.-M.

2) **Tuben** von 14‴ Oeffnung mit 20maliger irdischer, 30, 60 und 80maliger astronomischer Vergrösserung, 28 Thlr. preuss. Cour. oder 49 fl. rhein. oder 42 fl. Conv.-M.

3) **Feldstecher**, 8 Thlr. preuss. Cour. od. 14 fl. rhein. od. 12 fl. C.-M.

4) **Mikroskope**, wie oben angeführt, 14 Thlr. preuss. Cour. oder 24 fl. 30 kr. rhein. oder 21 fl. Conv.-M.

5) **Lupen**, 2 Thlr. preuss. Cour. oder 3 fl. 30 kr. rhein. oder 3 fl. C.-M.

6) **Refractoren** werden bei Bestellung nach Grösse der Objectiv-Fassung und Aufstellung berechnet.

Anmerkung. Die Tuben 1 und 2 werden auch ohne astronomische Okulare abgegeben und dann um 4 Thlr. billiger verkauft, so dass der grössere Tubus dann nur 36 Thlr. oder 63 fl. rhein. oder 54 fl. Conv.-M., der kleinere Tubus 24 Thlr. oder 42 fl. rhein. oder 36 fl. Conv.-M. kosten wird. Briefe und Gelder werden franco erbeten einzusenden.

Den Instrumenten sub 1., 2. und 3. ist eine Baumschraube beigegeben. Stative werden eigends berechnet und je nach der Bestellung möglichst billig angefertigt.

Die Objective, aus Crown- und Flintglas bestehend, bei denen der Kugelgestaltfehler über das ganze Objectiv strenge vermieden ist, wer-

den vollkommen achromatisch; wohlverpackt auf Weg und Gefahr des Bestellers abgeliefert. — Die Bezahlung erfolgt erst nach empfangenem Instrumente und erprobter Leistungsfähigkeit, welche dafür garantirt ist. Zu diesem Behufe werden alle Instrumente vor der Versendung von einer eigenen Commission von Sachkennern geprüft, das Gutachten dem Empfänger mit eingesendet und das Instrument zurückgenommen (für den Fall es nicht beschädigt ist), wenn die versprochene Leistungsfähigkeit nicht erreicht sein sollte.

Der Preis der Instrumente ist absichtlich niedrig im Verhältnisse zu den Preisen optischer Instrumente anderer optischen Werkstätten gehalten, um den Ankauf für oben bezeichnete Zwecke zu ermöglichen.

Bestellungen nimmt entgegen

August Lamprecht,
Kgl. bayer. Hofapotheker in Bamberg.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Literarischer Ber. Nr. CXVI. S. 13.)

Jahrgang 1857. Band XXVIII. Heft 2. Schrötter: Ist die krystallinische Textur des Eisens von Einfluss auf sein Vermögen, magnetisch zu werden. S. 472. — Pohl: Ueber ein neues Sonnen-Okular. S. 482.

Jahrgang 1857. Band XXIV. Heft 1. Aus einem Schreiben des Grafen F. Schaffgotsch an Herrn Dr. Natterer über eine akustische Beobachtung bei der chemischen Harmonika. S. 3. — Ettingshausen, A. v.: Bericht über das Arithmometer des Herrn Thomas (in die Leistungen des Herrn Thomas sehr anerkennender Weise). S. 16. — Schrötter: Ueber die Ursachen des Tons bei der chemischen Harmonika. (Auf S. 4. weiset Herr Schrötter nach, dass er die von dem Grafen Schaffgotsch jetzt veröffentlichten Beobachtungen über die chemische Harmonika schon im Jahre 1843 gemacht und das Allgemeinste darüber in dem amtlichen Berichte über die 21. Versammlung deutscher Naturforscher veröffentlicht habe. Die in dem vorliegenden Aufsatze von Herrn Schrötter gegebene Erklärung dieser Erscheinungen ist sehr lehrreich und verdient alle Beachtung!) S. 18. — Zantedeschi: Ricerche sul calorico raggiante. S. 43. — Petzval: Bericht über optische Untersuchungen. (Dieser Bericht, nebst seinen zwei Fortsetzungen in diesem und dem folgenden Hefte, über die mit grosser Ausdauer von Herrn Professor Petzval

fortgesetzten optischen Untersuchungen giebt ein sehr klares Bild des Ganges und der Tendenz derselben im Allgemeinen, und weiset mehrere durch dieselben schon jetzt gewonnene sowohl wissenschaftlich als praktisch sehr wichtige Resultate auf. Insbesondere hat Herr Professor Petzval auch der gesammten Beleuchtungs-Theorie grosse Aufmerksamkeit gewidmet, ist dabei zu verschiedenen sehr merkwürdigen Resultaten gelangt, und hat eine eigene Beleuchtungs-Wissenschaft geschaffen, die, was wenigstens den mathematischen Theil betrifft, als abgeschlossen betrachtet werden darf. Sowohl in praktischer, als auch in theoretischer Rücksicht ist sehr zu wünschen, dass Herr Professor Petzval die mühsam und mit grossem Scharfsinne gewonnenen Resultate seiner Forschungen auf dem ganzen Gebiete der Optik in dem grossen Werke, mit dessen Ausarbeitung er, wie wir wissen, schon seit vielen Jahren beschäftigt ist, dem wissenschaftlichen und technischen Publikum recht bald vor Augen lege und zu dessen Gemeingut mache.) S. 50. — Ritter v. Perger: Ueber die Vervielfältigung von Lichtbildern (Photographien) durch Aetzungen und Galvanoplastik. S. 76. — Zenger: Ueber eine neue Bestimmungsmethode des Ozon-Sauerstoffes. S. 78. — Petzval: Fortsetzung des Berichts über optische Untersuchungen. S. 92. — Hornstein: Ueber die Bahn der Calliope und ihre Opposition im Jahre 1859. S. 106.

Jahrgang 1857. Band XXIV. Heft 2. Petzval: Fortsetzung des Berichts über optische Untersuchungen. Dritte Fortsetzung. S. 129. — Allé: Ueber die Bahn der Lätitia. S. 159. — Löwy: Ueber die Bahn der Leda. S. 173. (Fleissige Arbeiten der Wiener Sternwarte, wie die obige des Herrn Hornstein über die Calliope.) — Aus einem Schreiben des Herrn Prof. Beer in Bonn an das wirkliche Mitglied, Herrn Sectionsrath Haidinger (betreffend einen vom Herrn Prof. Beer gefundenen bemerkenswerthen Satz der Mechanik, zugleich in Bezug auf die, die Bahncurven umhüllenden Flächen des zweiten Grades). S. 314.

Die Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei sind durch den in ihnen enthaltenen reichen Schatz gediegener Arbeiten gegenwärtig so wichtig für die Wissenschaft, dass ich mir es, durch besonders günstige Umstände in sehr liberaler, von mir mit dem grössten Danke anerkannter Weise dazu in den Stand gesetzt, angelegen sein lassen werde, den Inhalt der einzelnen Theile möglichst bald nach ihrem Erscheinen in dem Archive mitzutheilen.

Die ihren Sitz in Rom habende Accademia de' Lincei,

gestiftet von Federico Cesi im Jahre 1603, ist eine der ältesten und berühmtesten Akademieen in Italien, und hat zwar im Laufe der Jahre mannigfaltige Umgestaltungen erfahren, bei allem Wechsel der Schicksale aber immer ihren alten Ruhm bewahrt. Den Namen Accademia de' Nuovi Lincei hat sie im Jahre 1740 bei ihrer zweiten Umgestaltung erhalten. Ihre neueste, sehr vervollkommnete, ganz dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaften entsprechende Gestalt verdankt sie aber seit dem Jahre 1847 durchaus Seiner Heiligkeit dem jetzt regierenden Pabste Pio IX., der bekanntlich nicht nur ein grosser Kenner, sondern auch der grösste Beschützer und Beförderer der Wissenschaften in seinen Staaten ist. Der erste, die Jahre 1847—48 enthaltende Theil ihrer „Atti" ist zu Rom im Jahre 1851 erschienen, und enthält, ausser anderen werthvollen wissenschaftlichen Arbeiten, eine sehr interessante und in allgemeiner literar-historischer Hinsicht sehr wichtige Geschichte der Akademie seit ihrer Gründung bis zu ihrer neuen Organisation im Jahre 1847.

Sie zählt unter ihren jetzigen ordentlichen Mitgliedern eine grosse Anzahl berühmter Namen: Abate Ottaviano Astolfi, professore di matematica nel collegio di Propaganda Fide; den durch seine grossartigen Arbeiten auf dem Felde der Geschichte der Mathematik so berühmten D. Baldassarre Boncompagni, dei principi di Piombino; D. Ignazio Calandrelli, professore di ottica e di astronomia nell' università di Romà, zugleich Director des pontificio nuovo osservatorio dell' università romana, ed annesso all' accademia, dessen durch Zeichnungen erläuterte Beschreibung sich in den Atti. Anno VI. p. 267. findet; San Bertolo Nicola Cavalieri, professore emerito di architettura statica e idraulica nell' università di Roma; P. Domenico Chelini delle Scuole Pie, professore di meccanica e idraulica nell' università di Bologna, durch viele werthvolle Abhandlungen in Zeitschriften bekannt; D. Tommaso Mazzani, professore di meccanica e idraulica nell' università di Roma; Giuliano Pieri, professore d'introduzione al calcolo sublime nell' università di Roma; D. Salvatore Proja, nominato a professore futuro di elementi di matematica nell' università di Roma; P. Angelo Secchi, della compagnia di Gesù, direttore dell' osservatorio astronomico del collegio romano, den Lesern der „astronomischen Nachrichten" durch viele verdienstliche Arbeiten wohl bekannt; die Beschreibung des osservatorio del collegio romano ist, durch Zeichnungen erläutert, in den Atti. Anno VII. p. 1. gegeben; Carlo Sereni, professore di geometria descrittiva e idrometria nell' università di Roma; D. Barnaba Tortolini, professore di calcolo sublime nell' università di Roma, berühmt durch die grosse Anzahl seiner trefflichen analytischen Arbeiten und die Herausgabe der „Annali di scienze matematiche e fisiche; Dott. cav. Paolo Volpicelli, professore di fisica sperimentale nell' università di Roma, Sekretair der Akademie, berühmt nicht bloss durch seine wichtigen physikalischen Arbeiten, sondern auch durch seine Untersuchungen auf dem Gebiete der Zahlenlehre.

Der neueste zehnte Band der Atti dell' Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Tomo X. Anno X. (1856—57.) Roma. 1856. 4. enthält die folgenden, dem Kreise des Archivs angehörenden Abhandlungen:

Prof. R. P. A. Secchi: Ricerche sulla luce elettrica. p. 9.

Comm. Alessandro Cialdi: Appendice alla memoria intitolato: Cenni sul moto ondoso del mare, e sulle correnti di esso. p. 12.

Prof. D. Ignazio Calandrelli: Sulla rifrazione solare. p. 25.

Prof. Paolo Volpicelli: Sugli spezzamenti diversi che può subire un dato numero, tutti ad una stessa legge di partizione subordinati. p. 43—122.

Prof. N. Cavalieri: Alcune ricerche intorno alle serie aritmetiche. p. 78.

Prof. R. P. Angelo Secchi: Alcune ricerche di astronomia siderale, relative specialmente alla distribuzione delle stelle nello spazio. p. 100—265—337.

Prof. R. P. Angelo Secchi: Intorno ad un nuovo barometrografo. p. 137.

Prof. D. Ignazio Calandrelli: Osservazioni astronomiche, fatte nel nuovo pontificio osservatorio della romana università. p. 146.

Prof. Paolo Volpicelli: Sulla legge di Mariotte, e sopra un congegno nuovo, per facilmente dimostrarla, nelle sperimentali pubbliche lezioni. p. 181—393—430.

De La Rive: De l'influence du mouvement mécanique dans l'action du magnétisme sur les corps non magnétiques. p. 903.

Prof. J. Calandrelli: Sopra i movimenti propri delle stelle. p. 209—213.

Dr. R. Fabri: Sulle curve cicloidali.

F. Woepcke: Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise. p. 236.

Prof. P. Maggiorani: Sulla endosmosi dell' albumina.

Prof. Paolo Volpicelli: Quarta communicazione sulla elettrostatica induzione. p. 280.

Dr. R. Fabri: Brevi osservazioni sugli sperimenti, riportati contro la nuova teorica del Melloni sulla induzione elettrostatica. p. 331.

Prof. R. P. Angelo Secchi: Sulle variazioni o perturbazioni straordinarie dell 'ago magnetico. p. 373.

Prof. Carlo Dr. Maggionari: Nuove osservazioni microscopiche sull'azione che la ellettricità esercita sull'allbumina. p. 376.

D. Ruggiero Fabri: Sulla curvatura delle linee cicloidali. p. 387.

Prof. R. P. Angelo Secchi: Osservazioni astronomiche diverse. p. 414.

Man sieht hieraus, wie reich an einer grossen Anzahl wichtiger und interessanter Arbeiten der vorliegende neueste Band, eben so wie seine Vorgänger, ist.

Literarischer Bericht
CXVIII.

Arithmetik.

Mathematische Mittheilungen von Dr. J. L. Raabe, Professor (zu Zürich). Erstes Heft. Zürich. Meyer & Zeller. 1857. 8.

Der Inhalt dieser Mittheilungen ist folgender: I. Deutung bestimmter einfacher Integrale mit complexen Integrationsgrenzen. — II. Zur algebraischen Analysis. (Eigenthümliche Beweise der gewöhnlichen analytischen Reihen, gegen die wir freilich verschiedene Einwendungen zu machen haben würden, wenn dies hier ohne grössere Ausführlichkeit in zweckmässiger und wissenschaftlich erschöpfender Weise geschehen könnte.) — III. Neue Anwendungen der Jakob Bernoulli'schen Zahlen, wie der nach demselben Autor benannten Function. A. Ueber die Form der linearen Differentialgleichung zweier Variabeln $n$ter Ordnung, bei der eine partikuläre Integral-Auflösung zugleich den integrirenden Factor derselben, der lediglich Function der absoluten Variabeln ist, vorstellt. B. Ueber die Darstellung des Ergänzungsgliedes bei der näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals nach der Methode der Quadraturen. — IV. Werthung des bestimmten Integrals $\int_0^x x^{a-1} e^{bx} e^{cx^t} \partial x$. — V. Zur cubischen Gleichung. — Dass den Lesern hier meistens Interessantes und Lehrreiches geboten wird, wenn man auch mit dem Herrn Verfasser nicht überall einerlei Meinung sein kann, dafür leistet dessen Name hinreichend Bürgschaft.

Geometrie und Trigonometrie.

Lehrbuch der elementaren Planimetrie von Dr. B. Féaux, Oberlehrer am Gymnasium zu Paderborn. Paderborn. Schöningh. 1857. 8°.

Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie von Dr. B. Féaux, u. s. w. Paderborn. Schöningh. 1857. 8°.

Begreiflicher Weise sind wir bei der Fluth mathematischer Elementar-Lehrbücher, mit welcher namentlich seit einiger Zeit der Büchermarkt überschwemmt wird, ganz ausser Stande, diese Bücher alle im Archiv anzuzeigen oder gar dieselben genauer zu charakterisiren. Sowohl durch Deutlichkeit, Zweckmässigkeit und angemessene Strenge der Darstellung, selbst, wie es uns scheint, durch manche eigene Bemerkungen, zeichnen sich aber die obigen Büchelchen nach unserer Meinung vortheilhaft aus, und weisen wir daher auf dieselben hin, wie wir dies von jetzt an in ähnlichen Fällen öfter thun werden, aber freilich immer nur ganz im Allgemeinen, da zu ausführlichern Bemerkungen bei solchen Büchern uns ganz der Raum fehlt. Mögen pädagogische Zeitschriften sich deren ausführlicherer Besprechung unterziehen.

Mechanik.

On equally attracting bodies. By Dr. T. A. Hirst. With a Plate. (From the Philosophical Magazine for May 1857.) London 1857. 8.

Diese in vieler Rücksicht interessante Abhandlung, auf die wir die Aufmerksamkeit unserer Leser zu lenken für unsere Pflicht halten, soll aus den drei folgenden Theilen bestehen:

I. Equally attracting curves;

II. Equally attracting surfaces;

III. Equally attracting solids.

Die erste Abtheilung über, einen Punkt auf gleiche Weise anziehende Curven liegt uns jetzt vor. Das Problem, mit dessen Lösung der Herr Verfasser sich beschäftigt, ist folgendes:

Man soll alle die Curven finden, deren Elemente einen gegebenen Punkt, den Pol, auf dieselbe Art anziehen wie die correspondirenden Elemente einer gegebenen Curve.

Polare Coordinaten werden zu Grunde gelegt. Der angezogene Punkt wird als Pol angenommen. Alle auf demselben Radius vector liegende Punkte der beiden Curven werden correspondirende Punkte genannt. Die zwischen denselben zwei Vectoren liegenden Bogen der beiden Curven heissen correspondirende Bogen oder Elemente; correspondirende Elemente, unbestimmt verlängert gedacht, heissen correspondirende Tangenten.

Die Gleichung der gegebenen Curve sei

$$r = f(\theta);$$

dann ist die Anziehung eines Elements derselben auf den Pol proportional der Grösse

$$\frac{\partial s}{r^2} = \frac{\partial\theta}{r^2}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2} = \partial\theta\sqrt{u^2 + u'^2},$$

wenn der Kürze wegen

$$u = \frac{1}{r}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial\theta}$$

gesetzt wird. Bezeichnen wir das von dem Pol auf die Tangente gefällte Perpendikel durch p, so ist bekanntlich

$$p : r = r\partial\theta : \partial s,$$

also

$$\frac{\partial\theta}{p} = \frac{\partial s}{r^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{\partial\theta}{p} = \frac{\partial\theta}{r^2}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2} = \partial\theta\sqrt{u^2 + u'^2}.$$

Ist nun

$$r_1 = f_1(\theta)$$

die Gleichung einer anderen Curve, so ist $\frac{\partial\theta}{p_1}$ die Anziehung des correspondirenden Elements, und man kann nun leicht schliessen, dass die correspondirenden Elemente zweier oder mehrerer Curven, und also auch die Curven selbst, den Pol auf gleiche Weise anziehen, wenn ihre correspondirenden Tangenten gleich weit vom Pole entfernt sind.

Nach dem Obigen ist also die Bedingungsgleichung, dass die correspondirenden Elemente der beiden Curven

$$r = f(\theta), \quad r_1 = f_1(\theta)$$

den Pol auf gleiche Weise anziehen, die Differentialgleichung

$$u^2 + u'^2 = u_1{}^2 + u_1{}'^2,$$

welche für alle Werthe von θ erfüllt sein muss. Diese Gleichung kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{u' + u_1'}{u + u_1} \cdot \frac{u' - u_1'}{u - u_1} = -1;$$

oder, wenn wir

$$2v = u + u_1, \quad 2v_1 = u - u_1$$

setzen, auf folgende Art:

$$\frac{v'}{v} \cdot \frac{v_1'}{v_1} = -1.$$

Diese Gleichung ist aber, wenn $F(\theta)$ eine beliebige Function von θ bezeichnet, erfüllt, wenn

$$\frac{v'}{v} = F(\theta), \quad \frac{v_1'}{v_1} = -\frac{1}{F(\theta)}$$

ist. Integriren wir diese Gleichungen und führen zwei willkührliche Constanten c und c_1 ein, so erhalten wir:

$$v = ce^{\int F(\theta)\partial\theta}, \quad v_1 = c_1 e^{-\int \frac{\partial\theta}{F(\theta)}};$$

woraus sich durch Addition und Subtraction die beiden folgenden Gleichungen zweier Curven ergeben, welche den Pol auf gleiche Weise anziehen:

$$u = \frac{1}{r} = ce^{\int F(\theta)\partial\theta} + c_1 e^{-\int \frac{\partial\theta}{F(\theta)}},$$

$$u_1 = \frac{1}{r_1} = ce^{\int F(\theta)\partial\theta} - c_1 e^{-\int \frac{\partial\theta}{F(\theta)}}.$$

Der Raum gestattet uns leider hier nicht, dem Herrn Verfasser in seinen interessanten Betrachtungen, namentlich der Anwendung dieser allgemeinen Gleichungen auf specielle Fälle, weiter zu folgen; die obigen Mittheilungen werden aber schon hinreichen, unsere Leser auf den interessanten Inhalt der vorliegenden Abhandlung aufmerksam zu machen und ihnen dieselbe zu sorgfältigster Beachtung recht sehr zu empfehlen.

Wir wünschen sehr, dass der geehrte Herr Verfasser recht bald die, Flächen und Körper in ähnlicher Weise behandelnden Fortsetzungen der hier besprochenen verdienstlichen Abhandlung

veröffentlichen möge; uns hat er durch dieselbe eine sehr interessante Lectüre gewährt *).

Vermischte Schriften.

Mathematisches von Johann Rogner. (Aus dem Jahresberichte der st. st. Ober-Realschule in Gratz für das Studienjahr 1857 besonders abgedruckt.)

Die in dieser Schrift mitgetheilten Untersuchungen haben, wie es bei solchen Schulschriften ganz recht ist, neben ihrem wissenschaftlichen Werthe an sich, hauptsächlich auch das Bedürfniss der Schüler im Auge und gehen nicht, oder wenigstens nicht viel, über deren Gesichtskreis hinaus, indem sie vorzugsweise den Zweck haben, dieselben in einzelnen Partieen der Elementar-Mathematik etwas weiter zu führen, als es in den eigentlichen Lehrstunden möglich ist, oder ihnen Gelegenheit zu eigenen Uebungen zu geben, was Alles natürlich nicht bloss dem mathematischen Unterrichte auf der besondern Lehranstalt, durch welche die Schrift in's Leben gerufen ist, sondern überhaupt dem mathematischen Unterrichte auf allen auf gleicher Stufe stehenden Unterrichtsanstalten förderlich ist, und den letzteren zu Gute kommt, weshalb wir auch diese Schrift zu allgemeinerer Beachtung gern empfehlen und ihren Inhalt im Folgenden etwas genauer angeben werden, woraus zugleich erhellen wird, dass dieselbe auch an sich nicht ohne wissenschaftlichen Werth ist.

A. Uebungen in der Analysis für Schüler am Schlusse des Studienjahres.

Diese Uebungen betreffen die folgende

Aufgabe.

Ein Kapital K liege zu P Procenten an, wie gross wird dasselbe nach n Jahren geworden sein, wenn

a) nach dieser Zeit die einfachen Zinsen hinzugeschlagen werden;

b) wenn nach jedem Jahre die Zinsen zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinst werden;

c) wenn nach jedem kleinen Zeitraume von $\frac{1}{v}$ Jahren, wobei $v > 1$ ist, die Interessen zum Kapitale geschlagen werden;

---

*) Diese Schrift hätte immerhin auch unter die Rubrik Geometrie gebracht werden können; denn ihr Inhalt ist vorzugsweise geometrisch.

d) wenn nach jedem Augenblicke die Interessen zum Kapitale gelegt werden, und sonach die Kapitalisation mit Zinseszinsen jeden Augenblick vor sich geht?

Wissenschaftlich ist der letzte Theil dieser Aufgabe natürlich von dem meisten Interesse. In lehrreicher Weise hat der Herr Verfasser diese Partie der Aufgabe auf doppelte Art mittelst der Binomialreihe und der Reihe für e^x, die wohl auch auf Schulen theilweise als bekannt vorausgesetzt werden können, und mittelst der Differential- und Integralrechnung behandelt, wobei er in beiden Fällen zu demselben Resultate gelangt.

B. Beweise zu vier von Dr. **Lilienthal**, Director des Progymnasiums zu **Rössel**, bekannt gemachten Sätzen über das rechtwinklige Dreieck.

Der Herr Verfasser liefert hier eine recht verdienstliche neue Behandlung der vier Sätze von dem rechtwinkligen Dreieck, die Herr Director Lilienthal in Rössel schon in dem Archiv. Thl. XXI. S. 99. einer ausführlichen Untersuchung unterworfen hat, nachdem er dieselben bereits unter den im Programm des Gymnasiums zu Braunsberg von 1845 gelieferten vier und funfzig Aufgaben unter Nr. 16, 17, 47, 48 mitgetheilt hatte. Dieselben sind besonders bemerkenswerth, weil sie auf Gleichungen des dritten und vierten Grades führen und daher eine besondere Behandlung erfordern. Wir machen auf die in dem vorliegenden Programm gegebene Untersuchung des Herrn Prof. Rogner besonders aufmerksam.

C. Historische Skizze vom Kreise als Curve von der Eigenschaft, dass der Quotient der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten eine constante gegebene Grösse sei.

Dieser Abschnitt des verdienstlichen Programms ist uns wegen der darin enthaltenen, mit grosser Sorgfalt und Umsicht und grosser Vollständigkeit gesammelten historischen Notizen über den fraglichen Gegenstand sowohl überhaupt, als auch namentlich deshalb sehr interessant gewesen, weil wir selbst diesem Gegenstande gelegentlich im Archiv. Thl. XXV. S. 231. unsere Aufmerksamkeit gewidmet haben, was auch der geehrte Herr Verfasser keineswegs zu bemerken und besonders zu beachten unterlassen hat. Wir, und gewiss viele Leser des Archivs mit uns, halten uns daher dem Herrn Verfasser für seine in der vorliegenden Schrift gegebenen sorgfältigen historischen Untersuchungen zu ganz besonderem Danke verpflichtet, und haben daraus wiederholt gesehen, wie oft auch in der Mathematik der Ausspruch sich bewährt: „dass nichts Neues unter der Sonne sei.“ Da jedoch in der Mathematik so viel auf die Behandlung eines Gegenstandes selbst ankommt, weil man zu demselben Resultate oft auf vielen sehr verschiedenen Wegen gelangen kann, so trägt in dieser Beziehung eine mathematische Untersuchung doch oft ein besonderes Verdienst in sich, wenn auch das gewonnene Resultat an sich

nicht neu sein sollte, was ja auch der Herr Verfasser gern anzuerkennen bereit sein wird.

Wir hoffen, dass diese Bemerkungen hinreichen werden, auf das vorliegende Programm aufmerksam zu machen, das sich sonst leicht der verdienten Beachtung entziehen könnte.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (S. Literar. Ber. Nr. CXVI. S. 14.)

Maggio 1857. Sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo de' centri di curvatura d'una superficie qualunque. Memoria del prof. Delfino Codazzi. (Cont. e fine. p. 161.) — Intorno ad una linea situata in una superficie sviluppabile. Nota del prof. Delfino Codazzi. p. 165. — Sur l'induction électrostatique. Note par M. A. De la Rive. p. 168. — Formule generali sul manometro ad arià compresso, e per lo stereometro. Nota del P. Volpicelli. p. 169. (Sehr beachtenswerth.) — Applicazione della teorica de determinanti. Nota di R. Rubini. p. 179. — Sur un théorème d'Abel. Note par M. A. Cayley. p. 201. — Ricerche riguardanti la risoluzione per serie di qualunque equazione. Lettera del prof. Emmanuele Fergola. p. 104.

Giugno 1857. Sulla trasformazione delle funzioni ellittiche. Memoria del dott. Felice Casorati. p. 209.

Luglio 1857. Sulla trasformazione delle funzioni ellittiche. Memoria del dott. Felice Casorati. p. 257. — Leonardo Pisano matematico del secolo XIII. Articolo del sig. Angelo Genocchi. p. 261. — Riduzione d'un integrale multiplo. Nota del sig. Angelo Genocchi. p. 284.

ROMA 2. DICEMBRE 1857

ANNUNZIO SCIENTIFICO PER L'ANNO 1858

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

PUBBLICATI DA B. TORTOLINI

E COMPILATI DA

E. BETTI a PISA — A. GENOCCHI a TORINO

F. BRIOSCHI a PAVIA — B. TORTOLINI a ROMA

(In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche.)

Il rapido e continuo incremento delle Scienze Matematiche, in questi ultimi tempi, è dovuto principalmente alla facilità con cui le molte e varie ricerche appena intraprese, le nuove verità

appena scoperte possono subito estendersi e fecondarsi da molti geometri contemporaneamente in varie parti d'Europa. Quindi per tutte le nazioni, che vogliono cooperare a questo progresso, la necessità di periodici che diffondano con prestezza e regolarità i nuovi trovati dei loro dotti, e che agevolino il modo di seguire il generale avanzamento della Scienza. In Italia gli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, fondati fino dal 1850 da uno di noi, intendevano soltanto al primo di questi due fini, nè esisteva finora alcun periodico che si proponesse il secondo. Noi abbiamo perciò creduto di potere far cosa utile agli studj matematici nel nostro paese, associandoci per trasformare i suddetti Annali in un giornale che avesse questo doppio intendimento.

Il nuovo Giornale sarà distinto in due parti. Nella prima di esse troveranno luogo gli scritti originali contenenti nuove verità acquistate alla scienza, o dimostrazioni nuove di importanti verità conosciute. Nella seconda parte si daranno estratti, più o meno estesi, de memorie pubblicate nei giornali matematici stranieri e negli Atti delle Academie, corredandoli di tutte quelle notizie bibliografiche e di quelle indicazioni delle fonti originali, che possano dare agli estratti medesimi l'efficacia di un mezzo di istruzione; ed a raggiungere questo scopo si daranno anche alcune monografie di quei nuovi rami della scienza, a conoscere i quali richiedesi, per difetto di trattati speciali, lo studio di molte memorie sparse in varie pubblicazioni. Queste monografie però potranno essere inserite nella prima parte, allorquando conterranno cose non ancora note sia sostanzialmente, sia riguardo al metodo. Da ultimo nella seconda parte si renderà conto dei libri recentemente pubblicati, delle questione matematiche proposte dalle Società scientifiche per concorso a premii, ed in generale di tutto quanto concerne i progressi delle singole discipline matematiche.

I compilatori sentono tutta la gravità dell' impresa alla quale si accingono, e dei doveri che assumono; ma non potranno renderla veramente utile alla Scienza, e decorosa per l'Italia, senza la cooperazione dei geometri e specialmente dei loro connazionali, ai quali e a tutti i cultori delle matematiche raccomandano il nuovo Giornale. Essi confidano (ed altrimenti non avrebbero intrapresa questa pubblicazione) che i geometri Italiani si impegneranno perchè un giornale che si propone di rappresentare lo stato della scienza tra noi, possa richiamare l'attenzione continua dei dotti degli altri paesi; e far cessare il lamento che i nostri lavori non sono conosciuti fuori d'Italia.

E. BETTI. **A. GENOCCHI.**
F. BRIOSCHI. **B. TORTOLINI.**

Der Preis für Deutschland ist 23 Fr., für ganz Oesterreich Jt. Lire 19.

Die obigen Annali di Matematica pura ed applicata, welche vom Jahre 1858 an die Herren B. Tortolini, E. Betti, F. Brioschi, A. Genocchi in Quart-Format herausgeben werden, sind als eine Fortsetzung der Annali di scienze matematiche e fisiche zu betrachten, welche bisher von Herrn Tortolini allein so trefflich redigirt und in Octav herausgegeben wurden. Wie viele treffliche Beiträge zur Mathematik und Physik dieses letztere Journal, durch dessen Herausgabe Herr Tortolini sich ein so grosses Verdienst um die Wissenschaft erworben hat, enthält, ist bekannt. G.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Th. Du Moncel, Notice historique et théorique sur le tonnerre et les éclairs. In-8°. Paris.

H. Slomann, Leibnitzens Anspruch auf die Erfindung der Differenzialrechnung. Leipzig 4°. 1 Thlr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Leitfaden der Planimetrie und Elementar-Arithmetik. 2. Aufl. 8°. geb. Leipzig und Görlitz. 5 Ngr.

Arithmetik.

J. J. Egli, Leitfaden der Arithmetik für Mittelschulen. 8°. geh. Zürich. 9 Ngr.

F. Hoffmann, Sammlung der wichtigsten Sätze aus der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. gr. 8°. geh. Bayreuth. 4 Ngr.

W. Nerling, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, nebst Beispielen und Aufgaben. gr. 8°. Dorpat. geh. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

W. Nerling, Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. gr. 8°. geh. Dorpat. $\frac{5}{6}$ Thlr. — Die Auflösungen dazu gr. 8°. geh. ebendas. $\frac{2}{3}$ Thlr.

A. Paulsen, Lehrbuch der reinen Arithmetik gr. 8°. geh. Dorpat. $\frac{1}{3}$ Thlr.

F. X. Pollak, Sammlung algebraischer Aufgaben. Der Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben 2. Abtheilung. 3. Aufl. gr. 8. geh. Augsburg. $\frac{5}{6}$ Thlr.

C. Rauch, Elementare Arithmetik für Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Mühlheim. 1 Thlr.

A. P. Reyer, Beiträge zum Studium der Arithmetik und Algebra für Unter-Gymnasial- und Realschulen. gr. 8°. geh. Triest. 1 Thlr.

B. Riemann, Theorie der Abelschen Functionen. gr. 4°. geh. Berlin. $\frac{2}{3}$ Thlr.

S. Stampfer, Logarithmisch trigonometrische Tafeln nebst verschiedenen anderen nützlichen Tafeln etc. 5. Aufl. gr. 8⁰. geh. Wien. $^2/_3$ Thlr.

Geometrie.

W. Berkhan, Die Anwendung der Algebra auf Geometrie. Eine Anleitung zum Auflösen geometrischer Aufgaben vermittelst der algebraischen Analysis. gr. 8⁰. geh. Halle 24 Ngr.

W. Blumberger, Grundzüge einiger Theorien aus der neueren Geometrie in ihrer engeren Beziehung auf die ebene Geometrie. gr. 8⁰. geh. Halle. 1 Thlr. 26 Ngr.

W. C. F. Fischer, Lehrbuch der Planimetrie mit Rücksicht auf Wöckels Sammlung geometrischer Aufgaben. 8⁰. geh. Nürnberg. 21 Ngr.

J. C. Lückenhof, Anfangsgründe der Geometrie 2. Thl. Stereometrie, sphärische Trigonometrie und Kegelschnitte. 2. Aufl. 8⁰. geh. Münster. $12^1/_2$ Ngr.

B. Witzschel, Grundlinien der neueren Geometrie mit besond. Berücksicht. der metr. Verhältnisse an Systemen von Punkten in einer Graden und einer Ebene. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 2 Thlr.

Zorer, Grundriss der ebenen Geometrie. I. Abth. Lex. 8⁰. geh. Ellwangen und Tübingen. 6 Ngr.

Mechanik.

Js. Didion, Lois de la résistance de l'air sur les projectiles. Paris. 8⁰. 1 Thlr. 5 Ngr.

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Ins Deutsche übertragen von O. Schlömilch. 2. Aufl. 4. u. 5. Lfr. gr. 8⁰. geh. Leipzig. à 10 Ngr.

H. B. Lübsen, Einleitnng in die Mechanik. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. 1. Thl. gr. 8⁰ geh. Hamburg. 24 Ngr.

J. C. F. Otto, Neue ballistische Tafeln. 2 Abthlgn. Mit Holzschnitten im Texte. Berlin. 4⁰. 2 Thlr.

Astronomie.

The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the Year 1861. 8⁰. London. 2 s. 6 d.

Annuaire pour l'an 1858 publié par le Bureau des Longitudes. In 16. Paris. 1 Fr.

G. F. W. Baehr, Over de draaijende beweging van een ligchaam om een vast punt, en de beweging der aarde om haar zwaartepunt. Uitgeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. 4⁰. Amsterdam. 80 c.

J. E. Bode, Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. Herausgegeben von C. Bremiker. 11. Ausg. 1. Lfr. gr. 8⁰. geh. Berlin. $^1/_3$ Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lfr. Neu rev. Ausg. 17. 18. 19. 20. Lfr. qu. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1860. Herausgegeben von J. F. Encke unter Mitwirkung von Wolfers. gr. 8⁰. geh. Berlin. 4 Thlr.

J. Kepleri, astronomi, opera omnia ed. C. Frisch. Vol. I. Pars II. Lex. 8. geh. Frankfurt a. M. 2 Thlr. 6 Ngr.

C. Ramus, Grundtraek i Astronomien. Udg. af A. Steen. M. 2 Tab. 8°. Scandinavien. 21 Ngr.

C. Rauch, Populäre Astronomie f. Schule und Haus. 2. Aufl. gr. 8. geh. Mülheim. 1 Thlr.

J. F. P. Schmidt, Resultate aus eilfjähriger Beobachtung der Sonnenflecken. 4°. geh. Olmütz. 2 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Red. von Heis. Neue Folge. 1. Jhrg. (Der „Astronomischen Unterhaltungen" 12. Jahrg.) Nr. 1. gr. 8°. Halle. Preis für den vollständigen Jahrgang 3 Thlr.

Nautik.

J. M. Knudsen, See Merke-Buch, ein Handbuch für Seefahrende. 12°. Neustadt und Altona. 1855. cart. 3/4 Thlr.

Physik.

E. Dorville, Monographie de la pile électrique. Sa forme, ses applications, ses perfectionnements. Paris. 8°. Mit Abbildungen. 12½ Ngr.

B. Ellner, Der Höhenrauch und dessen Geburtsstätte. 8°. geh. Frankfurt a. M. 7 Ngr.

A. v. Ettingshausen, Die Principien der heutigen Physik. Hoch 4°. Wien. geh. 7½ Ngr.

W. B. Feddersen, Beiträge zur Kenntniss des elektrischen Funkens, mit 2 Steintafeln. gr. 8°. (Inaug. diss.) Kiel. 10 Ngr.

J. C. Galle, Grundzüge der schlesischen Klimatologie. Aus den, von der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur, seit dem Jahre 1836 veranlassten und einigen älteren Beobachtungen ermittelt und nach den in den Jahren 1852—55 ausgeführten Rechnungen der Herren W. Günther, R. Büttner und H von Rothkirch zusammengestellt, und für den Druck vorbereitet. Breslau. 4°. 2 Thlr.

E. Kahl, Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. 2 Thle. gr. 8°. geh. Leipzig. 1 Thlr. 14 Ngr.

J. Lamont, Resultate aus den an der Königl. Sternwarte veranstalteten meteorologischen Untersuchungen. gr. 4°. geh. München. ½ Thlr.

Physikalisches Lexicon. 2. Aufl. Von O. Marbach. Fortges. von C. S. Cornelius. 59. 60. Lfr. Lex. 8°. geh. Leipzig. ½ Thlr.

Fr. Marron y Villodas, Disertacion teórica sobre el modo de producir un motor permanente sin consumo de combustible ni otra materia alguna, por medio de la combinacion de la presion atmosférica con la fuerza elastica de un resorte sólido poligonal, ó sea resolucion teórica del célebre problema del movimiento continuo. Madrid. 8°. Mit 3 Taf. 3 Thlr. 6 Ngr.

A. Mühry, Klimatologische Untersuchungen oder Grundzüge der Klimatologie in ihrer Beziehung auf Gesundheitsverhälnisse der Bevölkerungen. 2 Abthlgn. gr. 8°. geh. Leipzig. 4 Thlr.

J. Müller, Lehrbuch der Physik und Meterologie. Theil-

weise nach Pouillets Lehrbuch der Physik selbständig bearbeitet. 5. Aufl. 2. Bd. 1.—6. Lfr. gr. 8°. geh. Braunschw. à 15 Ngr.

M. A. F. Prestel, Die mittlere Windrichtung an der Nordwestküste Deutschlands für jeden Tag im Jahre. gr. 4°. cart. Bonn. 2⅔ Thlr.

Results from Meteorological Observations made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope, between Jan. 1842 and Jan. 1856.

P. K. Robida, Vibrations-Theorie der Elektricität. gr. 8°. geh. Klagenfurt. ⅓ Thlr.

E. Schering, Zur mathemat. Theorie elektrischer Ströme. gr. 4°. Göttingen. ½ Thlr.

Webster, W. H. Bailey, The Recurring Monthly Periods and Periodic System of the Atmospheric Actions, with Evidences of the Transfer of Heat and Electricity, and General Observations on Meteorology. London. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

F. Zantedeschi, De mutationibus quae contingunt in spectro solari fixo. gr. 4°. geh. München. ⅙ Thlr.

Zantedeschi, Delle unità di misura dei suoni musicali, dei loro limiti, della durata della vibrazioni sul nervo acustico dell' uomo etc. 8°. geh. Wien. 20 Ngr.

Zantedeschi, Delle dottrine del terzo suono, ossia della coincidenza delle vibrazioni sonore, con un cenno sulla analogia, che presentano le vibrazioni luminose dello spettro solare. Memoria I. Lex. 8°. geh. Wien. 7½ Ngr.

Zantedeschi, Della corrispondenza che mostrano fra loro in corpi sonori nella risonanza di più suoni in uno. Memoria II. Lex. 8°. geh. Wien. 6 Ngr.

W. F. A. Zimmermann, Die Macht der Elemente. 8 Lfr. gr. 8°. geh. Berlin. 7½ Ngr.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 8. Bd. 1. Abth. gr. 8°. München. 2⅔ Thlr.

F. Arago, Oeuvres complèts. Publiées d'après son ordre sous la direction de J. A. Barral. Tome IX. (Instructions, rapports et notices sur les questions à résoudre pendant les voyages scientifiques). gr. 8°. geh. Leipzig. 2 Thlr.

Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome XV. Pétersbourg. 4°. Mit 5 Taf. 3 Thlr.

Mélanges mathématiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome II. Livr. 5. Lex. 8°. geh. Leipz. u. Petersb. 17 Ngr.

Mémoires de Al'cadémie des sciences de St. Pétersbourg. 6. Série. Sciences mathématiques et physiques. Tome VI. gr. 4°. geh. Leipzig und Petersburg. 6 Thlr. 28 Ngr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. XXIV. Bd. 1. u. 2. Hft. Wien. 8°. Mit 2 Plänen, 1 Karte u. 16 Tafeln. 2 Thlr. 19 Ngr.

Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 25. Bd. (Jahrgang 1857) 1. Hft. Lex. 8°. Wien. 2 Thlr. 14 Ngr.

Literarischer Bericht

CXIX.

Geometrie

Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der metrischen Verhältnisse an Systemen von Punkten in einer Geraden und einer Ebene. Von Dr. Benjamin Witzschel, Lehrer der Mathematik am Krause'schen Institute zu Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. Teubner. 1858. 8.

Diese neue Darstellung der Grundlinien der sogenannten neueren Geometrie zeichnet sich durch ihre völlig elementare Haltung vor manchen früheren Bearbeitungen dieser Disciplin vortheilhaft aus, und empfiehlt sich dadurch ganz besonders auch Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichts-Anstalten, welche von derselben vielfach einen vortheilhaften Gebrauch für die Zwecke des Unterrichts zu machen Gelegenheit finden werden. Alle hierher gehörenden Arbeiten von Chasles, Möbius, v. Staudt, Steiner hat der Herr Verfasser für seine Zwecke umsichtig benutzt; die metrischen Relationen haben, wie schon der Titel besagt, besondere Berücksichtigung gefunden, und auch dem Gebrauche der Zeichen, so wie der geometrischen Deutung und Construction imaginärer Werthe und Formen ist, zum Theil in eigenthümlicher Weise, besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden, so dass wir diese auch äusserlich trefflich ausgestattete Schrift Allen, die sich für die darin abgehandelten Gegenstände interessiren, aus Ueberzeugung recht sehr empfehlen können, hier aber, des Weiteren wegen, uns mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts derselben begnügen müssen:

Erstes Kapitel. Einleitung. Princip der Zeichen und dessen Anwendung auf Abschnitte einer Geraden, auf Winkel und Flächenräume in einer Ebene. — **Zweites Kapitel.** Von den Doppelverhältnissen. — **Drittes Kapitel.** Das harmonische Verhältniss. — **Viertes Kapitel.** Von den

Involutionen. — **Fünftes Kapitel.** Geometrische Deutung und Construction imaginärer Werthe und Formen; complexe Doppelverhältnisse und Involutionen. — **Sechstes Kapitel.** Von den geometrischen Verwandtschaften der Figuren.

Möge das Buch die verdiente Beachtung finden!

Die Anwendung der Algebra auf Geometrie. Eine Anleitung zum Auflösen geometrischer Aufgaben vermittelst der geometrischen Analysis. Zum Gebrauche für die oberen Klassen in Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen, so wie auch zum Selbstunterrichte von W. Berkhan, Oberlehrer am Herzoglichen Gymnasium zu Blankenburg. Mit 8 Figurentafeln. Halle. 1858. 8.

Dieses Buch enthält eine Sammlung von durch die gewöhnliche Buchstabenrechnung und Algebra, zugleich mit Zuhülfenahme der ebenen Trigonometrie, in alter bekannter algebraischer Weise gelöster geometrischer Aufgaben, ohne irgend welchen Gebrauch der neueren streng wissenschaftlichen analytischen Geometrie, welche eben deshalb allein den Namen „streng wissenschaftlich" verdient, weil sie eine vollständige analytische Darstellung der gesammten Geometrie giebt, und dadurch, was die Hauptsache ist, zu einer in der That ganz allgemeinen Methode der Lösung aller geometrischen und, mit Zuhülfenahme der allgemeinen Grundlehren der Mechanik, auch aller mechanischen, so wie auch aller optischen und astronomischen Probleme gelangt, eine Leistung und höchst allgemeine Anwendbarkeit in allen Theilen der Wissenschaft, worin sie, von keiner anderen Wissenschaft übertroffen, namentlich auch die sogenannte neuere Geometrie weit überflügelt und gewiss stets überflügeln wird, weshalb auch die letztere in Beziehung auf allgemeine Bedeutung für die gesammte mathematische Wissenschaft der ersteren nie sich gleichstellen können wird. Eine recht zweckmässige allgemeine Einleitung und Anleitung zur Construction der gewöhnlichsten algebraischen Formen, mit Einschluss der quadratischen Gleichungen, ist beigegeben, und als ein gutes Schulbuch und zweckmässiges Hülfsmittel für manche Lehrer an Schulen kann daher die Schrift immer empfohlen werden, da sie eigentlich wissenschaftliche Ansprüche auch wohl selbst nicht macht.

Darstellende Geometrie.

Das axonometrische Zeichnen für technische Lehranstalten, Gewerbe- und Industrieschulen, dargestellt

und begründet von Ant. Ph. Largiadèr, Professor der Mathematik und des technischen Zeichnens an der Industrieschule zu Frauenfeld. Erster Theil: Theoretische Begründung. Frauenfeld und Lahn. Verlags-Comptoir. 1858. 8.

Diese Schrift enthält eine recht gute, ganz elementar gehaltene theoretische Begründung des axonometrischen Zeichnens, worunter man bekanntlich im Allgemeinen die Darstellung eines Raumgebildes auf einer Ebene oder Tafel versteht, wenn man die Punkte des Raums auf drei rechtwinklige Axen bezieht und mittelst ihrer Coordinaten ihre Lage im Raume bestimmt, das Auge in eine unendliche Entfernung von der Tafel versetzt oder, was eigentlich dasselbe ist, das betreffende Raumgebilde orthographisch auf die Tafel projicirt, und die Zeichnung dieser Projection auf der Tafel, unter der Voraussetzung, dass die wirklichen Coordinaten der zu entwerfenden Punkte vorher gemessen worden sind, mit Hülfe dreier von einem Punkte ausgehender, in jedem einzelnen Falle besonders zu bestimmender Linien oder Axen, welche die Projectionen der wirklichen Coordinatenaxen im Raume auf der Tafel sind, ausführt, welcher letztere Umstand namentlich Veranlassung gegeben hat, dieser Art der graphischen Darstellung von Gegenständen dreier Dimensionen den Namen „axonometrisches Zeichnen" beizulegen. In der Vorrede sagt der Herr Verfasser, — und hat demgemäss auch seine Schrift verfasst, — dass er entschieden der Ansicht sei, dass die Probleme der Axonometrie Probleme der Geometrie seien, auf welche die Rechnung nur dann anzuwenden ist, wenn ihre Auflösung auf geometrischem Wege — d. h. durch planimetrische Constructionen — nicht möglich ist. Wir müssen gestehen, dass wir diese Ansicht nicht vollkommen theilen können. Denn die der ganzen Operation zu Grunde zu legenden Data werden durch unmittelbare Messung gewonnen und sind demzufolge in einem gewissen bestimmten Maasse ausgedrückt, in Zahlen, also nicht als wirkliche geometrische Linien, wie bei den Problemen der reinen Geometrie, gegeben, wodurch doch jedenfalls ein wesentlicher Unterschied bedingt wird, und es uns daher immer weit zweckmässiger erscheinen will, mittelst möglichst einfacher Formeln aus diesen in Zahlen gegebenen wirklichen Coordinaten die axonometrischen Coordinaten mit aller durch die Rechnung zu erreichenden Genauigkeit abzuleiten, nach einem bestimmten Maassstabe auf die auf der Tafel vorher bestimmten, für die ganze Zeichnung als gegeben zu betrachtenden und derselben zu Grunde zu legenden projicirten Axen, deren gegenseitige Lage

auch am besten auf dem Wege der Rechnung leicht und mit erforderlicher Genauigkeit ermittelt wird, aufzutragen und aus diesen axonometrischen Coordinaten dann die zu entwerfenden Punkte durch die bekannte einfache Construction, welche man in allen Schriften über diesen Gegenstand findet, zu bestimmen. Gerade durch ihre eigenthümliche Natur scheint die von Farish erfundene axonometrische Methode sich uns vorzugsweise zu einer gemischten Anwendung des Calculs und der Construction zu eignen und darin eine besondere Bürgschaft für ihre Genauigkeit zu haben.

Wir empfehlen aber das obige Büchlein allen auf seinem Titel genannten Lehranstalten, so wie überhaupt allen denen, welche auf leichtem Wege sich eine Kenntniss der in vielen Beziehungen interessanten axonometrischen Darstellungsmethode erwerben wollen, recht sehr zur Beachtung.

Krystallographie.

1. Sulle forme cristalline di alcuni sali di Platino e del Boro adamantino per **Quintino Sella**, Membro della R. Accademia delle scienze. Torino. 1857. 4⁰.

2. Sulle forme cristalline del Boro adamantino. Seconda Memoria per **Quintino Sella**, etc. Torino. 1857. 4⁰.

3. Sulla legge di connessione delle forme cristalline di una stessa sostanza, per **Quintino Sella**, etc. Torino 1856. 8⁰.

Herr Professor Quintino Sella in Turin, der unseren Lesern schon aus seiner im Literar. Ber. Nr. CX. S. 4. angezeigten schönen, auch, wie wir zu unserer Freude gesehen haben, nach unserem a. a. O. ausgesprochenen Wunsche in's Deutsche übersetzten*) Schrift über die verschiedenen Arten des geometrischen Zeichnens (Sui principii geometrici de Disegno), insbesondere über die axonometrischen Darstellungen, von der vortheilhaftesten Seite bekannt ist, hat neuerlich die drei obigen krystallographischen Abhandlungen veröffentlicht, welche wegen ihres auch in mathematischer Rücksicht vielfach interessanten Inhalts jedenfalls eine Anzeige hier sehr verdienen, so wie wir denn

*) In der von Weisbach u. s. w. herausgegebenen Zeitschrift für Ingenieur-Wissenschaft.

überhaupt der Krystallographie, welche schon ganz eine mathematische, namentlich analytisch-geometrische Form angenommen hat, in unserem Journal und insbesondere unseren literarischen Berichten eine grössere Berücksichtigung als bisher widmen werden.

Die erste der drei obigen Abhandlungen beschäftigt sich lediglich mit der numerischen Bestimmung der krystallographischen Eigenschaften der auf ihrem Titel genannten Körper und enthält allgemeine mathematische, insbesondere analytisch-geometrische Betrachtungen und Untersuchungen nicht, scheint aber in ersterer Beziehung die sorgfältigste Berücksichtigung zu verdienen, wenn sie auch weniger in den Kreis dieser literarischen Berichte gehört.

Dagegen enthält die zweite Abhandlung in den beiden ihr beigefügten Noten: *Nota* (A). Sul cangiamento di assi in un sistema cristallino. p. 30. und *Nota* (B). Sulle proprietà geometriche di alcuni sistemi cristallini. p. 37. eine grosse Anzahl interessanter analytisch-geometrischer Betrachtungen. Insbesondere müssen wir gestehen, dass die in der zweiten Abhandlung gegebene Darstellung der allgemeinen geometrischen Eigenschaften aller krystallographischen Systeme, namentlich in Bezug auf die dabei auftretenden rationalen Verhältnisse, die auch mehrfach selbst von den Resultaten der höheren Zahlenlehre oder der Theorie der Zahlen, u. A. (pag. 45.) von einem interessanten, von Herrn Genocchi gelösten Problem *), Gebrauch macht, zu dem Besten gehört, was über diesen Gegenstand gelesen zu haben wir uns erinnern, weshalb wir auch dieser Note wohl eine deutsche Uebersetzung wünschen möchten. Wir selbst werden von derselben bei einer später in diesem Archive zu veröffentlichenden Abhandlung über das Allgemeinste in der mathematischen Krystallographie gewissenhaft

---

*) Risolvere con numeri intieri le seguenti equazioni, nelle quali a, b, c sono numeri intieri moltiplicabili o divisibili isolatamente per ogni quadrato, e tutti assieme per qualunque fattore:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{b}=\frac{x''^2+y''^2+z''^2}{c};$$

$$xx'+yy'+zz'=0,\quad x'x''+y'y''+z'z''=0,\quad x''x+y''y+z''z=0.$$

Siamo debitori della soluzione di questo interessante problema di analisi ad un nostro valente Geometra all' Avv. Genocchi. Egli trova, che onde x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' siano intieri, è necessario, e basta, che si possano trovare tre numeri intieri u, v, t, che rendano intieri i quozienti

$$\frac{u^2+ab}{c},\quad \frac{v^2+bc}{a},\quad \frac{t^2+ca}{b}$$

ovvero in altre parole, che tornano allo stesso. Il prodotto negativo di due qualunque dei numeri a, b, c deve essere residuo quadratico del terzo.

Gebrauch machen, so wie auch von der Nota (A) und der folgenden Abhandlung.

Die dritte Abhandlung gehört ganz zur allgemeinen mathematischen Krystallographie und muss gleichfalls der Beachtung unserer Leser sehr empfohlen werden. Wir heben aus derselben vorzugsweise die folgenden Sätze hervor, die wir, um uns vor jedem Missverständnisse zu wahren, ganz mit den Worten des Herrn Verfassers geben: La legge degli assi si può compendiare como segue: *Date tutte le forme cristalline di una sostanza supposte convenientemente orientate, se si assumono per assi le intersezioni di tre, o più faccie qualunque, due altre faccie qualsiasi del sistema cristallino taglieranno ciascuno dei suddetti assi a distanze tali dalla loro comune origine, che il loro quoziente starà in un rapporto razionale ai quozienti delle distanze analoghe misurate sovra ciascuno degli altri assi.* (p. 3.)

Ogni faccia del cristallo è parallela a due o piu spigoli già esistenti, o possibili nel cristallo. (p. 10.)

Abbiasi un elissoide di cui sono diametri coniugati tre spigoli del cristallo limitati in lunghezza da un quarta faccia del medesimo, ogni faccia possibile sarà parallela al piano diametrale coniugato ad un diametro parallelo ad una zona possibile, ed inversamente ogni zona possibile sarà parallela al diametro coniugato ad un piano diametrale parallelo ad un faccia possibile. (p. 12.)

Möge das Obige geeignet sein, die allgemeine Aufmerksamkeit auf diese neuen verdienstlichen Arbeiten des Herrn Verfassers zu lenken. G.

Physik.

Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet von Emil Kahl, Lieutenant der Artillerie und Lehrer der Physik und Chemie an der Königlichen Kriegsschule zu Dresden. I. Theil: Aufgaben. — II. Theil: Auflösungen. Mit in den Text gedruckten Holzschn. Leipzig. Teubner. 1857. 8.

Diese neue Sammlung physikalischer Aufgaben reihet sich den früheren Sammlungen dieser Art von Fliedner, Bary (von Korschel übersetzt) in würdigster Weise an, und unterscheidet sich von denselben durch eine noch weiter gehende Anwendung sowohl der Mathematik überhaupt, als auch, indem sie namentlich

einen durchgreifenden Gebrauch von der Differential- und Integralrechnung in allen Fällen, wo dieselbe erforderlich und bequem ist, macht und zulässt. Schon dieser letztere Umstand zeigt, dass hier von einem eigentlichen Schulbuche, d. h. von einer für Gymnasien, Realschulen, u. s. w. bestimmten Aufgaben-Sammlung nicht die Rede sein kann; und so sehr wir die Anwendung der sogenannten höheren Analysis bei einem für solche Anstalten bestimmten Buche tadeln würden, so sehr billigen wir dieselbe bei einem Buche, welches wie das vorliegende zweifelsohne vorzugsweise für solche Lehranstalten wie Kriegsschulen, polytechnische, höhere Gewerbschulen u. s. w. bestimmt ist, auf denen die höhere Analysis einen wesentlichen Bestandtheil des gesammten mathematischen Unterrichts ausmacht. Im Interesse dieser letzteren Lehranstalten haben wir daher auch das vorliegende Buch, welches wir in den meisten Beziehungen für vollkommen zweckentsprechend, d. h. namentlich in einer sehr richtigen Mitte zwischen eigentlicher Physik und sogenannter angewandter Mathematik sich bewegend, halten, mit besonderer Freude begrüsst, und wünschen der Königlich Sächsischen Kriegsschule aufrichtig Glück zu einem so mathematisch gebildeten Lehrer der Physik, wie der Herr Verfasser dieses Buches ist. Aber auch, abgesehen von den obengenannten besonderen Lehranstalten, begrüssen wir jedes, und also auch dieses Buch mit besonderer Freude, welches in der Physik der Anwendung der Mathematik ihr wohl begründetes Recht sichert; da wir jeden physikalischen Unterricht für verfehlt halten, welcher nicht vorzugsweise ein mathematisches, durch die Natur der betreffenden Lehranstalt natürlich gehörig begränztes Gepräge trägt. Wie man aber namentlich auf vielen Universitäten, wo die Physik leider nur zu oft bloss im Dienste der Medicin steht, sich bei den betreffenden Vorlesungen jetzt noch der Anwendung der Mathematik ganz entschlagen kann, ist uns noch unbegreiflicher als bisher geworden, als uns vor Kurzem Behufs einiger von uns zu gebenden mathematischen Erläuterungen die uns bisher unbekannt gebliebenen neuesten Lehrbücher der anatomischen Physiologie von Donders und Anderen vorgelegt wurden, in denen wir zu unserer Freude in vielen Partieen eine sehr durchgreifende Anwendung der durch die mathematische Analysis begründeten Mechanik fanden.

Nochmals heissen wir also auch diese, eine sehr umsichtige Auswahl lehrreicher Aufgaben nebst ihren davon zweckmässig gesonderten Auflösungen enthaltende, auch äusserlich trefflich ausgestattete Sammlung willkommen, und schliessen mit der folgenden Angabe ihres Hauptinhalts:

Erste Abtheilung. Mechanische Naturlehre. — Zweite Abtheilung. Akustik. — Dritte Abtheilung. Optik. — Vierte

Abtheilung. Wärme. — Fünfte Abtheilung. Magnetismus. — Sechste Abtheilung. Elektricität.

Eine genauere Einsicht in das vollständige Inhaltsverzeichniss selbst wird einen Jeden auf der Stelle von der Reichhaltigkeit und der möglichst gleichmässigen Berücksichtigung aller Partieen der Physik, indem auch der praktischen Anwendung, besonders in der Mechanik, gehörig Rechnung getragen worden ist, überzeugen, so dass wir dem Buche zum Schlusse nur noch recht vielfache Verbreitung wünschen können.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (S. Liter. Ber. Nr. CXVIII. p. 7.)

Agosto 1857. Intorno ad una somma di derivate successive. Nota del sig. Angelo Genocchi. p. 289. — Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche. Nota del sig. prof. F. Brioschi. p. 297. — Intorno ad alcuni teoremi di Dupin. Nota del sig. prof. Delfino Codazzi. (Continuerà.) p. 309.

Wir freuen uns sehr, im Folgenden schon den Inhalt der uns vorliegenden ersten Nummer der im Literar. Ber. Nr. CXVIII. angekündigten „Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da B. Tortolini, e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma" unseren Lesern mittheilen zu können:

Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da Barnaba Tortolini, e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4⁰.

N⁰ 1. (Genn. e Febbr. 1858.) Avviso dei Compilatori. pag. V. — L'Editore a chi legge. p. VII. — Sopra l'Equazioni algebriche con più incognite. Memoria del Prof. Enrico Betti. p. 1. — Sullo sviluppo di un determinante. Nota del Prof. Francesco Brioschi. p. 9. — Sulle funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie. Memoria del Prof. F. Brioschi. p. 12. — Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane. Memoria del Prof. F. Brioschi. p. 20. — Sopra una costruzione del teorema di Abel. Nota del Prof. Angelo Genocchi. p. 33.

Rivista bibliografica. Sullo sviluppo delle funzioni Jacobiane secondo le potenze ascendenti dell' argomento. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 41. — Intorno ad un teorema del Sig. Borchardt. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 43. — Sopra un opera del Sig. D. Richardt Baltzer sotto il titolo „Theorie und Anwendung der Determinanten." Articolo del Sig. Dr. Felice Casorati. p. 45. — Sopra una Memoria del Prof. Ottaviano Fabrizio Mossotti sotto il titolo „Nuova teoria degli stromenti ottici." Osservazioni del Prof. Francesco Cattaneo. p. 48. — Pubblicazioni recenti. p. 56.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

James D. Forbes, A. Review of the Progress of Mathematical and Physical Science in more recent Times. 4. (Edinburgh.) London. 8 s. 6 d.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Jos. Ph. Herr, Lehrbuch der höheren Mathematik. 2 Bde. Wien. 8⁰. 4 Thlr.

Arithmetik.

C. L. Schoof, Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 3. Hft. gr. 8⁰. Hannover. 17½ Ngr.

Geometrie.

A. P. Largiadèr, Das axonometrische Zeichnen für technische Lehranstalten, Gewerbe- und Industrieschulen dargestellt. I. Thl.: Theoretische Begründung. gr. 8⁰. geh. Frauenfeld. ⅓ Thlr.

F. Mann, Die Elemente des geometrischen Zeichnens, Grund- und Aufrisse, verjüngter Maassstab etc. qu. 4⁰. geh. Langensalza. 12 Ngr.

K. G. Chr. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. 2. Hft. Nürnberg. 8⁰. Jedes Heft 27 Ngr.

G. Weiland, Raumlehre. Lehrbuch der elementaren Geometrie. gr. 8⁰. geh. Berlin. ⅓ Thlr.

Geodäsie.

J. J. Vorlaender, Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen. Lex. 8. geh. Leipzig. ⅓ Thlr.

Mechanik.

C. Delaunay, Traité de mécanique rationnelle. 2ᵉ édition. Paris. 8⁰. Mit 300 in den Text gedr. Abbild. 2 Thlr. 15 Ngr.

Jos. Didion, Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles. In-8. Avec une planche. Paris. 3 fr. 50 c.

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Dynamik. Deutsch herausgegeben von O. Schlömilch. 2. Aufl. 6 Lief. gr. 8°. geh. Leipzig. ⅓ Thlr.

L. Matthiessen, Ueber die Gleichgewichts-Figuren homogener freier rotirender Flüssigkeiten. gr. 8. Kiel. geh. ½ Thlr.

Praktische Mechanik.

H. Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris. 4°. Mit Atlas in Fol. 6 Thlr. 20 Ngr.

Edm. Potier, Tables cyclographiques pour le tracé des courbes de raccordement des voies de communication, précédées des instructions nécessaires sur la manière de les calculer et d'en faire usage, etc. Paris. 8°. 2 Thlr. 15 Ngr.

Optik.

C. F. A. Leroy, Traité de stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. 2. édition revue et annotée par E. Martelet. 2 vol. 4°. Paris. Mit 74 Taf. 8 Thlr. 20 Ngr.

P. Harting, De nieuwste verbeteringen van het mikroskoop en zijn gebruik sedert 1850. gr. 8°. Met 2 gelith. paten. Tiel. 2 fr. 20 s.

Astronomie.

Annalen der Königl. Sternwarte bei München, auf öffentliche Kosten herausg. von J. Lamont. IX. Bd. (Der vollständ. Sammlung XXIV. Bd.) München. 8°. 1 Thlr. 20 Ngr.

Fr. Arago, Astronomie populaire, publiée sous la direct. de J. A. Barral. Tome IV. Schluss. Paris. 8°. Mit 6 Taf. Jeder Band 2½ Thlr.

A. Drechsler, Die Sonnen- und Mondfinsternisse in ihrem Verlaufe oder Anleitung, wie diese durch Rechnung und Zeichnung zu ermitteln sind. Lex. 8°. geh. Dresden. 1⅓ Thlr.

C. Herold, Leitfaden der physikalischen und politischen Geographie. gr. 8°. geh. Nürnberg. 7½ Ngr.

Jo. Kepleri, Astronomi, opera omnia edid. Ch. Frisch. Vol. I. Pars I. Frankfurt a. M. 8°. Mit eingedr. Holzschn. 1 Thlr. 24 Ngr.

B. Martin, Mémoire sur le calendrier musulman et sur le calendrier hébraïque. 8°. Paris. 1 Thlr. 5 Ngr.

A. M. Nell, Darstellung und Beschreibung der Mondfinsterniss am 27. Februar und der Sonnenfinsterniss am 15. März 1858. gr. 8°. geh. Mainz. 4 Ngr.

Nautik.

M. F. Albrecht und C. S. Vierow, Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hülfswissenschaften. Für die preuss. Navigationsschulen bearbeitet. 2. Aufl. Lex. 8°. Berlin. geh. $3\frac{1}{2}$ Thlr.

W. C. Bergen, Spherical Tables and Diagrams, with their Application to Great Circle Sailing and various Problems in Nautical Astronomy. Edinburgh. 8°. 1 Thlr. 24 Ngr.

F. A. C. Keller, Instruction sur la navigation par arc de grand cercle à l'aide du double planisphère. In 8. Paris.

Physik.

Babinet, Etudes et lectures sur les sciences d'observation et leurs applications pratiques. Vol. IV. Paris. 12°. 25 Ngr.

C. Bödeker, Die gesetzmässigen Beziehungen zwischen der Zusammensetzung, Dichtigkeit und der specifischen Wärme der Gase. Göttingen. 8°. 10 Ngr.

R. Clausius, Ueber das Wesen der Wärme, verglichen mit Licht und Schall. (Akadem. Vorträge. 3. Hft.) Zürich. 8°. 8 Ngr.

Nth. Culverwel, Of the Light of Nature: a Discourse. Edited by J. Brown, with a Critical Essay by J. Cairns. Edinburgh. 8°. 4 Thlr. 20 Ngr.

H. W. Dove, Klimatologische Beiträge. 1. Thl. Mit 2 Karten. Berlin. 8°. 1 Thlr. 20 Ngr.

Allgemeine Encyklopädie der Physik. Bearbeitet v. C. W. Brix, G. Decher, F. C. O. v. Feilitzsch, F. Grashof, F. Harms etc. Herausg. von Gst. Karsten. 3. Lfg. Leipzig. 8°. 2 Thlr. 20 Ngr. Inhalt: 1. Bd. Allgemeine Physik, von Gst. Karsten, F. Harms und G. Weger. p. 49—96. — 5. Bd. Angewandte Mechanik, von F. Grashof. p. 129—160. Mit eingedr. Holzschn. — 19. Bd. Fernewirkungen des galvanischen Stroms, von F. v. Feilitzsch. p. 81—272. Mit eingedr. Holzschn. — 21. Bd. Meteorologie, von E. E. Schmid. p. 1—48.

Edm. Külp, Lehrbuch der Experimental-Physik. 2. Bd. Die Lehre vom Schall und vom Licht. Darmstadt. 8°. 2 Thlr.

Physikalisches Lexicon. 2. Aufl. Von O. Marbach, fortgesetzt von C. S. Cornelius. 61. 62. Lief. Lex. 8°. geh. Leipzig. $\frac{1}{2}$ Thlr.

W. H. Th. Meyer, Beobachtungen über das geschichtete electrische Licht, sowie über den merkwürdigen Einfluss des Magneten auf dasselbe. 4. geh. Berlin. $27\frac{1}{2}$ Ngr.

Th. Du Moncel, Etude du magnétisme et de l'électro-magnétisme au point de vue de la construction des électro-aimants. In-8. Fig. et pl. Paris. 5 fr.

A. Mousson, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 1. Abth.: Physik der Materie. gr. 8. geh. Zürich. 1 Thlr. 14 Ngr.

E. A. Rossmässler, Das Wasser. Eine Darstellung für gebildete Leser und Leserinnen. Mit 8 Lith. u. 47 Illustrat. in Holzschn. Leipzig. 8°. 3 Thlr. 20 Ngr.

E. v. Sydow, Handbook to the series of large physical maps for school instruction. Edited by J. Tilléard. gr. 8°. 1857. geh. Gotha. 10 Ngr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Classe. XXV. Bd. 1. Hft. Wien. 8°. Mit 14 Taf. 2 Thlr. 14 Ngr. — (p. 19—30) Brücke, Ueber Gravitation und Erhaltung der Kraft. — (—70.) Spitzer, Integration der Differentialgleichung $(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$. — (—86.) Knochenhauer, Beobachtungen über zwei sich gleichzeitig entladende Batterien. — (p. 145—164.) Zantedeschi, Delle dottrine del terzo suono. Memoria I^a^. Mit 1 Taf. — (—171.) Zantedeschi, Della corrispondenza, che mostrano fra loro i corpi sonori nella risonanza di più suoni in uno. Memoria II. Mit 1 Taf. — (—184.) Zantedeschi, Della unità di misura dei suoni musicali, dei loro limite, della durata delle vibrazioni sul nervo acustico dell' uomo, e dell' innalzamento del tono fondamentale avvenuto nei diaspason di acciajo, in virtu di un movimento spontaneo molecolare. Memoria III. Mit 3 Taf. — (p. 240—250.) Fritsch, Untersuchungen über das Gesetz des Einflusses der Lufttemperatur auf die Zeiten bestimmter Entwickelungsphasen der Pflanzen mit Berücksichtigung der Insolation und Feuchtigkeit. — (—252.) Littrow, Physische Zusammenkunft der Planeten Amphitrite und Melpomene im November 1857.

Novorum actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae naturae curiosorum voluminis vicesimi sexti pars prior. A. u. d. T.: Verhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher. 26. Bd. 1. Abth. Vratislaviae et Bonnae. 4°. Mit 30 Taf. 10 Thlr. — (p. 174—188.) Cohn, Ein interessanter Blitzschlag. Mit 2 Taf. — (p. 295—369.) Prestel, Die mittlere Windrichtung an der Nordwestküste Deutschlands für jeden Tag im Jahre aus neunzehn Jahre umfassenden Beobachtungen in Emden, so wie auch für Hamburg berechnet, und numerisch und graphisch dargestellt. Mit 2 Taf. — Nachtrag.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von O. Schlömilch und B. Witzschel. 3. Bd. 1. Hft. Lex. 8°. Leipzig. Preis für den Band 5 Thlr.

Literarischer Bericht

CXX.

Arithmetik.

Welchen speciellen Werth von $(1+a+bi)^{k+k_1 i}$ gibt die Binomialreihe, welchen die logarithmische Reihe für $\log(1+a+bi)$, und gegen welche Grenzen hin convergirt der Binomialcoefficient $\binom{k+k_1 i}{\gamma}$ für $\gamma=\infty$? Von W. Denzler. (Aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich besonders abgedruckt).

Auf S. 1. spricht der Herr Verfasser über diese Abhandlung sich folgendermassen aus: „Schon in Nro. 114. der Züricher Mittheilungen haben wir die Behauptung ausgesprochen, dass die Binomialreihe für $(1+a+bi)^{k+k_1 i}$ in sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz den speciellen Werth $_0(1+a+bi)^{k+k_1 i}$ von $(1+a+bi)^{k+k_1 i}$ darbietet. Wir wollen nun zunächst im Folgenden die Wahrheit dieser Behauptung darzuthun versuchen, und hierbei die im Ganzen klassische Arbeit des für die mathematischen Wissenschaften viel zu frühe verstorbenen Abel, die sich im Journal von Crelle. Bd. 1. Nr. 29. abgedruckt findet, zu Grunde legen. Diese Arbeit gibt zwar ein Resultat, das nur in einem einzigen Falle unrichtig ist; aber die Begründung scheint uns schon in den ersten einleitenden Sätzen, die sich auf die bedeutendste Schwierigkeit des ganzen Beweises beziehen, auf einem für das Nachfolgende wesentlichem Irrthum zu beruhen. Wir werden es nicht unterlassen, im Folgenden das uns im Abel'schen Beweise vorzüglich irrthümlich Scheinende ausführlich zu besprechen".

Die vorliegende Abhandlung des Herrn Denzler in Küsnach bei Zürich ist zwar schon 1855 geschrieben*), ist uns jedoch erst jetzt bekannt geworden. Da sie aber auf die, für die gesammte neuere Analysis so ungemein wichtige Abhandlung von Abel

*) Wenigstens ist sie „den 15. November 1855" unterzeichnet.

über das Binomial-Theorem Bezug nimmt und darin Irrthümer aufzudecken und zu berichtigen sucht: so scheint es uns jedenfalls von Wichtigkeit, auf dieselbe hier auch jetzt noch aufmerksam zu machen. Wir müssen uns aber mit der blossen Anzeige ihrer Existenz begnügen; denn wo es sich um eine Arbeit eines Abel handelt, können und dürfen diese nur kurze Notizen geben sollenden literarischen Berichte sich nicht anmaassen, in kurzen Worten und ohne sorgfältigste Begründung ein Urtheil darüber abzugeben, auf welcher Seite das Richtige liegt. So viel aber können wir sagen, dass Herr Denzler sich von Neuem in dieser Abhandlung als einen Mann bekundet, welcher in der Analysis wirklich eifrig nach Wahrheit suchet und ringet, und sich nicht wie die Verfasser vieler neueren Lehrbücher, auch selbst monographischer Abhandlungen, mit den oberflächlichsten, unrichtigsten, jetzt als ganz antiquirt zu betrachtenden Vorstellungsweisen begnüget und bei denselben beruhiget, welches Letztere freilich eine sehr bequeme Manier ist, von uns aber immer eben so sehr von Neuem getadelt und bekämpft werden wird, wie wir ein solches Bestreben wie das des Verfassers der vorliegenden Abhandlung, der sich zugleich überall als einen Kenner der neueren strengen Analysis und einen eifrigen Anhänger derselben zeigt, stets in der freudigsten Weise lobend anerkennen werden. Möge daher diese Abhandlung die verdiente Beachtung finden!

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Von Dr. Eduard Heis, Professor der Mathematik an der Königlichen Akademie zu Münster, und Thomas Joseph Eschweiler, Director der höheren Bürgerschule zu Köln. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Erster Theil. Planimetrie. Köln. Du Mont-Schauberg. 1858. 8.

Wir haben die erste Auflage (1855) dieses Lehrbuches der Geometrie, aus welchem der, welcher es sorgfältig studirt, einen reichen Schatz geometrischer Kenntnisse schöpfen und eine sehr tüchtige Uebung in dieser Königin der mathematischen Wissenschaft sich erwerben kann, das auch zugleich durch nicht wenige den Herrn Verfassern eigenthümliche Beweise und Auflösungen sich auszeichnet, schon im Literar.-Ber. Nr. XCV. S. 1. als eins der vorzüglichsten neueren geometrischen Lehrbücher empfohlen. Der beste Beweis für die Richtigkeit unsers Urtheils ist gewiss die

vorliegende, schon nach etwa drei Jahren nöthig gewordene neue Auflage, die wir daher unseren Lesern von Neuem zur sorgfältigsten Beachtung dringend ans Herz legen. Nach der Angabe der Herrn Verfasser selbst hat dieselbe zwar Berichtigungen sinnstörender Druckfehler und verschiedene Zusätze erhalten, aber wesentliche Veränderungen in keiner Weise erfahren, was auch bei der unzweifelhaften Güte des Buches nicht nöthig war. Deshalb können wir uns im Uebrigen auf unsere frühere Anzeige beziehen, indem wir das dort Gesagte auch jetzt noch vollkommen unterschreiben, und den Herrn Verfassern nur noch zu dieser ausgezeichneten Arbeit, die dem Schulunterrichte gewiss wesentlichen Nutzen bringen wird und schon gebracht hat, so wie den preussischen Lehranstalten zu solchen trefflichen Lehrern aufrichtigst Glück wünschen.

Geometrische Betrachtung über die Brennpunkts- und Mittelpunktskreise der Kegelschnitte. Von Hellwig, Oberlehrer an der Realschule zu Erfurt (Programm der Realschule zu Erfurt von Ostern 1858). Erfurt. 1858. 4.

Wir empfehlen dieses Programm, in welchem der Herr Verfasser, von der gewöhnlichen Definition der Kegelschnitte ausgehend, theils eine Reihe neuer bemerkenswerther Beziehungen, theils auch mehrere bekannte Eigenschaften der Kegelschnitte in eigenthümlicher Weise elementar entwickelt, der Aufmersamkeit und Beachtung unserer Leser recht sehr. Auch darf sich der Herausgeber des Archivs wohl erlauben, dem Herrn Verfasser dafür zu danken, dass er den von ihm in der Abhandlung Nr. II. in diesem Theile des Archivs gefundenen neuen Sätzen über der Ellipse ein- und umschriebene Figuren seine Aufmerksamkeit geschenkt, und für einige der betreffenden, auf analytischem Wege von dem Herausgeber gefundenen Ausdrücke neue recht beachtenswerthe elementare Beweise gegeben hat. Im Allgemeinen aber empfehlen wir dieses Schul-Programm wegen seines lehrreichen und mehrfach interessanten Inhalts unsern Lesern nochmals recht sehr zur Beachtung.

Astronomie.

Die Sonnen- und Mondfinsternisse in ihrem Verlaufe oder Anleitung, wie diese durch Rechnung oder

Zeichnung zu ermitteln sind. Allgemein fasslich dargestellt und durch Beispiele erläutert von Dr. Adolph Drechsler, Lehrer der Mathematik an der Handelsschule zu Dresden. Dresden. 1858. 8.

Diese Schrift hätte immerhin ungedruckt bleiben können, denn ihres Gleichen giebt es schon mehrere ältere und neuere. Auch enthalten die grösseren astronomischen Lehrbücher — wir erinnern nur z. B. an ein Paar sehr vorzügliche Hülfsmittel, nämlich den Traité élémentaire d'Astronomie physique von Biot in den älteren und der neuesten noch nicht ganz vollendeten Ausgabe und an die Astronomie pratique von Francoeur, besonders aber an den Abriss der praktischen Astronomie von Sawitsch, durch dessen Uebertragung aus dem Russischen (Hamburg 1851.) Herr Dr. Götze sich so sehr verdient gemacht hat — meistens viel bessere Anleitungen in grösserer Kürze. Von den rein analytischen Arbeiten neuerer Astronomen über die Finsternisse und Sternbedeckungen*) enthält natürlich die vorliegende Schrift gar Nichts, und dergleichen Arbeiten liegen überhaupt wohl auch nicht im Gesichtskreise des Herrn Verfassers, wenn man wenigstens aus dem ziemlich veralteten Standpunkte, auf welchem er in dieser Schrift steht, auf die Weite jenes Gesichtskreises einen Schluss zu machen berechtigt sein soll. Indess mag mancher Liebhaber der Astronomie, dessen mathematische Kenntnisse nicht über die ersten Anfangsgründe der Trigonometrie hinausgehen, dem Herrn Verfasser für diese Schrift Dank wissen, so wenig die Wissenschaft an sich von derselben weitere Notiz nehmen wird.

---

*) Der Herausgeber des Archivs darf sich wohl erlauben, auf seine beiden ausführlichen analytischen Abhandlungen über diesen Gegenstand zu verweisen, die in den Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien unter folgenden Titeln erschienen sind: Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen für einen gegebenen Ort der Erde. Von J. A. Grunert. (Denkschriften der mathemat.-naturw. Classe. Band VII. Wien 1854. 4°). und: Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen für die Erde überhaupt. Von J. A. Grunert. (Denkschriften der mathem.-naturw. Classe. Band VIII. Wien 1855. 4°).

Physik.

Jahresbericht über die Fortschritte und Leistungen im Gebiete der Fotografie, mit genauer Nachweisung der Literatur. 1855. Von Karl Jos. Kreutzer. Wien. 1858. 8.

Dieser mit dem grössten Fleisse und der grössten Sorgfalt ausgearbeitete literarische Jahresbericht über die Fortschritte einer der wichtigsten neueren physikalischen*) Künste ist jedenfalls sehr verdienstlich, weshalb wir hier alle, welche sich mit photographischen Arbeiten beschäftigen oder zu beschäftigen beabsichtigen, auf denselben aufmerksam machen. Nur die reichen literarischen Hülfsmittel, welche dem Herrn Verfasser in seiner Stellung bei der Bibliothek des k. k. polytechnischen Instituts in Wien zu Gebote standen, konnten die Abfassung desselben möchlich machen. Auf 55 Seiten ist eine so grosse Anzahl einzelner Abhandlungen aus den verschiedensten Journalen und besonderen Schriften namhaft gemacht, deren Inhalt und die dadurch bedingten Fortschritte der Photographie überall angegeben sind, dass, wie gesagt, Niemand, der sich mit dieser Kunst beschäftigt, diesen Bericht entbehren kann. Der ganze Bericht ist in die folgenden Hauptabtheilungen gebracht: I. Die Erzeugung von Lichtbildern und die dabei vorkommenden Arbeiten. A. Fotografie auf Metall. — B. Fotografie auf Papier. a) Negative Papiere und Bilder. b) Positive Papiere und Bilder. c) Ueber fotografische Papiere. C) Fotografie auf Glas. a) Bilder auf Kollod. b) Glasbilder auf mit Eiweiss überzogenem Kollod. c) Glasbilder mit Eiweiss, Kleber, Leim. — D) Fotografie auf Elfenbein, Wachsleinwand, Wachstafft und anderen Geweben, Email, Porcellan, Glas u. dgl. — II. Erzeugung von Fotografien Behufs der Vervielfältigung durch die Presse. — III. Anwendungen der Fotografie. — IV. Apparate, Instrumente, Vorrichtungen. — V. Fisikalische und chemische Bemerkungen. — VI. Verschiedenes. — Literatur. Ein sorgfältiges Register erleichtert den Gebrauch sehr.

Möge der Herr Verfasser sein Versprechen, einen ähnlichen Bericht für 1856 zu veröffentlichen, bald erfüllen.

Vermischte Schriften.

Annali di Mathematica pura ed applicata, pubblicati da Barnaba Tortolini, e compilati da E. Betti a Pisa,

*) Man wird diesen Ausdruck wohl mit Recht gebrauchen dürfen.

F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXIX. S. 8.)

No. 2. (Marzo e Aprile 1858). Aus dieser neuen Nummer werden die Leser des Archivs das regelmässige Erscheinen dieser neuen trefflichen mathematischen Zeitschrift, welcher wir den ungestörtesten Fortgang, und allen ihren hochachtbaren Herren Herausgebern die ungeschwächteste Kraft bei ihrem schwierigen Unternehmen von Herzen wünschen, ersehen. Der Inhalt dieser viele treffliche Aufsätze enthaltenden neuen Nummer ist folgender:

Nuove ricerche relative alla sostituzione lineare per la riduzione delle funzioni ellittiche di prima specie, del Prof. Barnaba Tortolini. p. 57. — Mémoire sur la probabilité des erreurs dans la somme, ou dans la moyenne de plusieurs observations par le P. M. Jullien S. J. p. 76. — Intorno alla questione: riportare in una superficie piana, o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell' imagine, e della figura abbiano le aree in rapporto costante. Memoria del Prof. Delfino Codazzi. p. 89. — Note relative a la construction de diverses courbes a 3. points multiples des degrés supérieurs, et théorème relatif à ces courbes. Par E. de Jonquières. p. 110. — Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en Astronomie. Par E. de Jonquières. p. 110. — Dimostrazione di una formola di Jacobi. Nota del Prof. Francesco Brioschi. p. 117.

Rivista bibliografica. Intorno ad una formola di Integrali definiti. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 119. — Sopra una Memoria del Prof. Ottaviano Fabrizio Mossotti sotto il titolo „Nuova teoria degli stromenti ottici.“ Osservazioni del Prof. Francesco Cattaneo. (Continuazione.) p. 120. — Sopra un' opera del Sig. Dr. Georg Karl Christian v. Staudt sotto il titolo: „Beiträge zur Geometrie der Lage.“ Articolo del Prof. Luigi Cremona. p. 125.

Soggetti per premj proposti dall' accademia delle Scienze di Parigi. p. 128. — Pubblicazioni recenti.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (S. Literar. Ber. Nr. CXIX. S. 8.)

Settembre 1857. Intorno ad alcuni teoremi di Dupin. Nota del sig. prof. Delfino Codazzi. (Cont. e fine.) p. 321. — Cristophe Rudolf. Article de M. Terquem. p. 325. — Dimostrazione dell' ultimo teorema di Fermat. Nota del prof. Luigi Cal-

zolari. p. 339. — Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura. Nota del prof. Delfino Codazzi. p. 346. — Ricerche analitiche sulle curve coniche circoscritte ad un triangolo. Di Barnaba Tortolini. p. 356.

Dieses Journal wird nur bis zum Ende des Jahrgangs 1857 fortgesetzt, wo dann bloss die vorher angezeigten Annali di Matematica pura ed applicata, welche schon von Anfang 1858 an erscheinen, an dessen Stelle tritt. Wie viele Mühe muss aber Herrn Tortolini jetzt die Redaction dieser beiden Journale auf Ein Mal machen, und wie sehr verdient er dafür den Dank der Wissenschaft!

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 385—407. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXVI. S. 15.)

Hermann Kinkelin, Die Fundamentalgleichungen der Function $\Gamma(x)$. Nr. 385 und 386. S. 1.

F. A. Flückiger, Bemerkungen und Versuche über Ozonometrie. Nr. 387. S. 17.

M. Hipp, Ueber eine neue Anwendung der Elektricität. (Bezieht sich auf eine mangelhaft isolirte unterseeische Telegraphenleitung und scheint allerdings für die technische Telegraphie von Bedeutung zu sein, weshalb wir auf diesen Aufsatz aufmerksam machen.) Nr. 391—393. S. 66.

C. Brunner, Ueber Darstellung und Eigenschaften des Mangans. Nr. 394—396. S. 73.

Koch, Meteorologische Beobachtungen in Bern, Burgdorf und Saanen im Sommer und Herbst 1856. Nr. 394—396. S. 82. — Diese Beobachtungen reichen bis November 1856 und sind fortgesetzt vom December 1856 bis Mai 1857 in Nr. 401—403. S. 141.

R. Wolf, Auszug aus dem Chronicon Bernensi Abrahami Musculi ab Anno 1581 ad Annum 1587. Nr. 397—398. S. 107. (Enthält verschiedene meteorologische und andere Aufzeichnungen über Erdbeben u. dergl.)

W. Beetz, Ueber die elektromagnetische Wirkung Volta'scher Ströme verschiedener Quellen. Nr. 399—400. S. 113.

Em. Schinz, Ueber das Polar-Planimeter von Prof. Amsler in Schaffhausen. Nr. 404—407. S. 153. (Je mehr die Verbreitung und der allgemeinere Gebrauch des Amsler'schen Planimeters zu wünschen ist, desto dankenswerther ist diese, gegenüber

der von Herrn **Amsler** selbst in seiner Schrift: „**Ueber mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Schaffhausen, A. Beck und Sohn**“ gegebenen eleganten, in wenigen Schritten zum Ziele führenden Theorie ganz elementar gehaltene Theorie des empfehlenswerthen Instruments.)

Preisaufgaben der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

Perfectionner en quelque point important la théorie géometrique des polyèdres.

(Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de trois mille francs. Les Mémoires destinés au concours devront être remis, francs de port, au Sécretariat de l'Institut avant le 1r. Juillet 1861.)

Quels peuvent être les nombres de valeurs des fonctions bien définies qui contiennent un nombre donné de lettres, et comment peut-on former les fonctions pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs?

(Sans exiger des concurrents une solution complète, qui serait sans doute bien difficile, l'Académie pourra accorder le prix (medaille d'or de la valeur de trois mille francs) à l'auteur d'un Mémoire qui ferait faire un progrès notable à cette théorie. Les Mémoires devront être remis avant le 1r. Juillet 1860.)

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XX.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

F. Coyteux, Exposé des vrais principes des mathématiques, examen critique des principales théories ou doctrines qui ont été admises ou émises en cette science et reflexions au sujet de l'enseignement des mathématiques. In-8. Avec 2 pl. Paris.

J. Salomon, Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Ober-Realschulen. I. Bd. 2. Aufl. gr. 8. geh. Wien. 1⅔ Thlr.

Th. Wittstein, Kurzer Abriss der Elementar-Mathematik zum Gebrauch für den Unterricht und bei Repetitionen. 2. Aufl. gr. 8. geh. Hannover. 8 Ngr.

Arithmetik.

F. Krancke, Arithmetisches Exempelbuch für Volksschulen. 2. Hft. 22. Aufl. gr. 8°. Hannover. 7½ Ngr.

S. Spitzer, Bemerkungen über die Integration linearer Differential-Gleichungen mit Coefficienten, die bezüglich der unabhängig Variablen von der ersten Potenz sind. Lex. 8. geh. Wien. ⅓ Thlr.

S. Spitzer, Integration verschiedener linearer Differential-Gleichungen. Lex. 8. geh. Wien. ¼ Thlr.

Geometrie.

W. Blumberger, Grundzüge einiger Theorien aus der neueren Geometrie in ihrer engern Beziehung auf die ebene Geometrie. Halle. 8. 1 Thlr. 26 Ngr.

E. Heis und T. J. Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. I. Thl.: Planimetrie. 2. Aufl. gr. 8. geh. Köln. ⅔ Thlr.

Geodäsie.

J. J. Baeyer, Die Verbindungen der preussischen und russischen Dreieckskettten bei Thorn und Tarnowitz. Ausgeführt von der trigonometrischen Abtheilung des Generalstabs. 4. cart. Berlin. 6 Thlr.

Mechanik.

B. Peierie, Physical and Celestial Mechanics. Developed in Four Systems of Analytic Mechanics, Celestial Mechanics, Potential Physics and Analytic Morphology. 4. (Boston.) London. cloth. 48 s.

Praktische Mechanik.

J. B. Belanger, Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides dont les dimensions transversales sont petites relativement à leur longueur. In-8. avec une pl. Paris. 3 fr.

P. Rittinger, Centrifugal-Ventilatoren und Centrifugal-Pumpen. Theorie und Bau aller Arten derselben, mit Berücksichtigung der Resultate zahlreicher selbstausgeführter Versuche. Wien. 8. Mit 7 Tab. 2 Thlr. 15 Ngr.

Optik.

A. E. Aderheldt, Die Theorie des Regenbogens in fasslicher Darstellung. qu. Fol. geh. Jena. 27½ Ngr.

P. Harting, De nieuwste verbeteringen van het mikroskoop en zijn gebruik sedert 1850. Tiel. 8. Mit 2 Taf. 1 Thlr. 16 Ngr.

J. Petzval, Bericht über dioptrische Untersuchungen. Lex. 8. geh. Wien. ⅓ Thlr.

Astronomie.

J. E. Bode's Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. Herausgegeben von C. Bremiker. 11. Ausg. 2. und 3. Lief. gr. 8. geh. Berlin. à 10 Ngr.

A. Coester, Sonnenfinsterniss am Nachmittag des 15. März 1858, zunächst für Berlin und Potsdam, beziehungsweise für Hamburg berechnet und dargestellt. 1 Blatt in 4. aufgezogen. Cassel. ⅓ Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lief. Neu red. Ausgabe. 21. 22. Lief. qu. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, fortges. von P. A. Hansen und C. A. F. Peters. 48. 49. Bd. No. 1. gr. 4. Hamburg. à Bd. 5 Thlr.

A. M. Nell, Der Planetenlauf, eine graphische Darstellung der Bahnen der Planeten, um mit Leichtigkeit ihren jedesmaligen Ort unter den Gestirnen auf eine Reihe von Jahren voraus zu bestimmen. Mit Atlas. gr. 8. geh. Braunschweig. 1⅙ Thlr.

W. Oeltzen, Argelander's Zonen-Beobachtungen vom 15ten bis 31sten Grade südl. Declination in mittleren Positionen für 1850. Lex. 8. geh. Wien. 14 Ngr.

F. Piper, Karls des Grossen Kalendarium und Ostertafel aus der Pariser Urschrift, herausgegeb. und erläut. nebst einer Abhandlung über die lateinischen und griechischen Ostercyklen des Mittelalters. Lex. 8. Geh. Berlin. 1 Thlr.

Nautik.

C. Bremiker, Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1860 zur Bestimmung der Länge, Breite und Zeit zur See nach astronomischen Beobachtungen. gr. 8. geh. Berlin. 15 Ngr.

Physik.

M. Benedikt, Ueber die Abhängigkeit des elektrischen Leitungswiderstandes von der Grösse und Dauer des Stromes. Lex. 8. geh. Wien. 2 Ngr.

Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation, par MM. Babinet et Housel. Paris. 8. 2 Thlr.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1855. 11. Jahrg. Red. von A. Krönig. 1. Abth. gr. 8. geh. Berlin. 2 Thlr.

G. W. Hankel, Elektrische Untersuchungen, dritte Abhandlung über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. gr. Lex. 8. geh. Leipzig. 16 Ngr.

Observations météorologiques faites à Nijné-Taguilsk (monts Ourals, gouvernement de Perm). Résumé des dix années 1845—1854 et année 1855. Paris. 8.

J. J. Pohl, Ueber den Gebrauch des Thermo-Hypsometers zu chemischen und physikalischen Untersuchungen. Lex. 8. geh. Wien. 4 Ngr.

J. F. J. Schmidt, Untersuchungen über die Leistungen der Bourdon'schen Metallbarometer mit Hinweisung auf den Nutzen dieser Instrumente für die Marine. 4. geh. Olmütz. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 25. Bd. 2. Hft. Lex. 8. geh. Wien. 1 Thlr. 4 Ngr.

2

Fig. 9.

E

A F G B

K

C H D

1

2

0 0,1

Fig. 8.

1

1,2

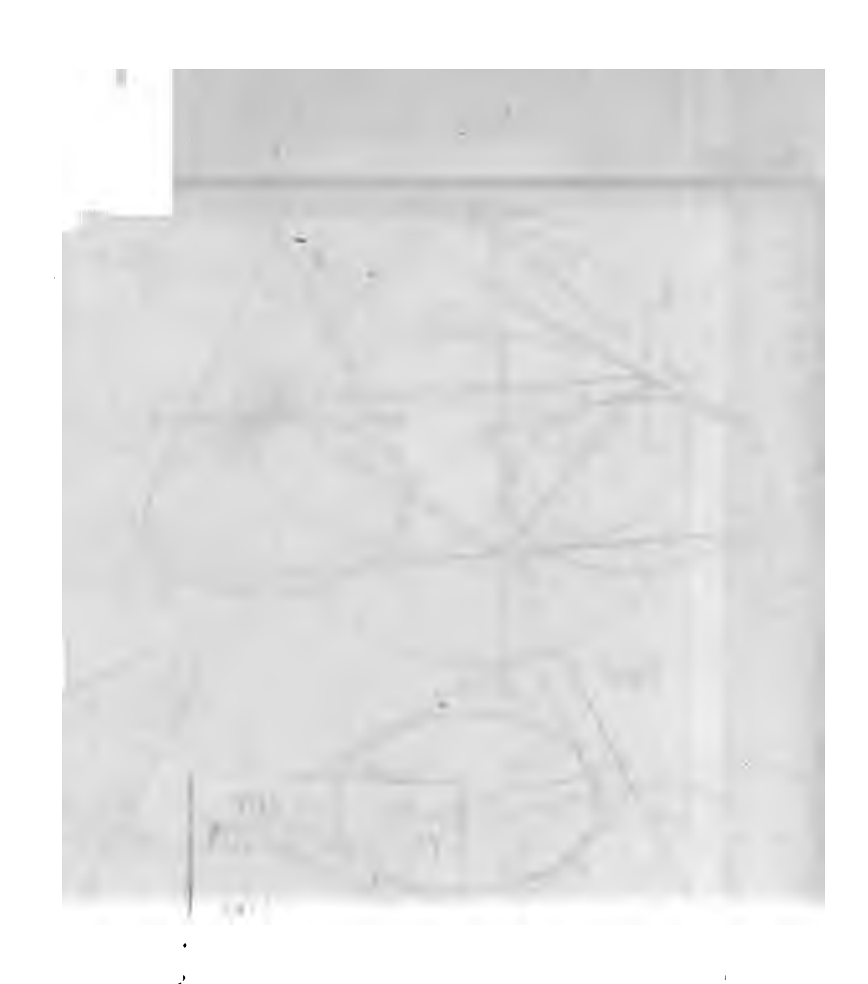
0

2

10.

2,0

B"



γ γ'
β β'
α α'
a b c
δ δ'
ε ε'
a' b' c'

Fig. 6.

g'
π
a
b
c
κ
d
e
f
g

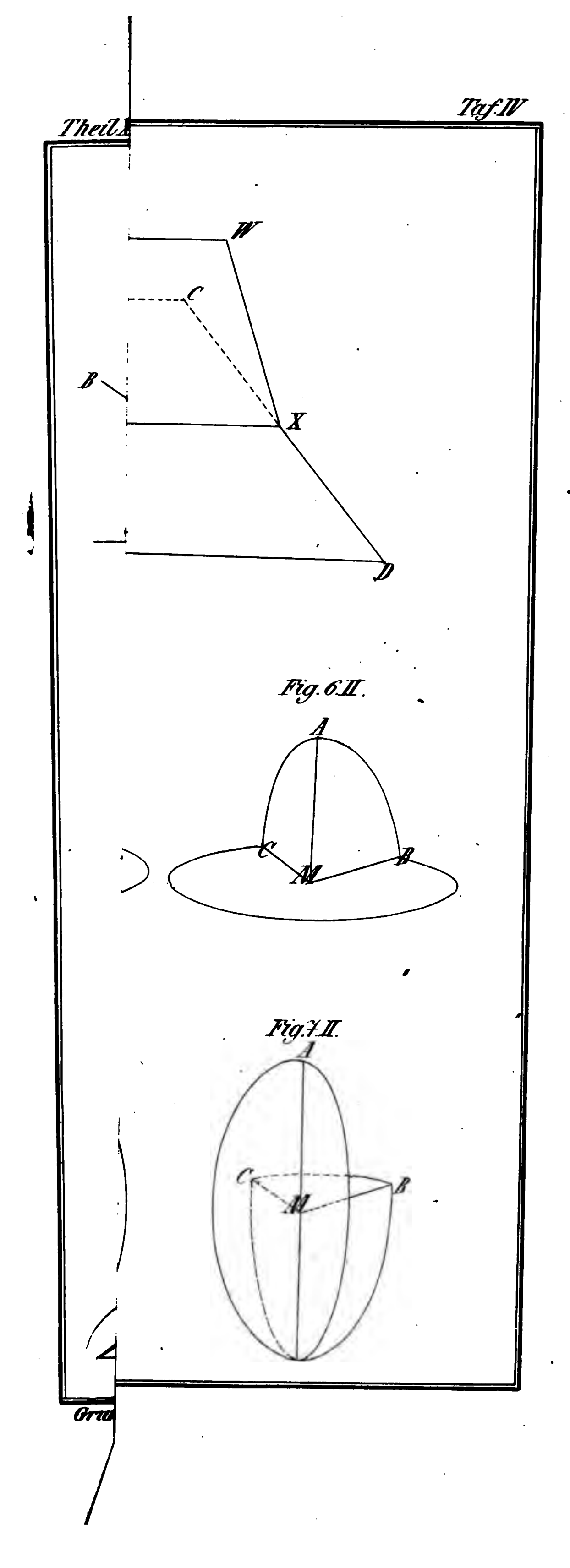


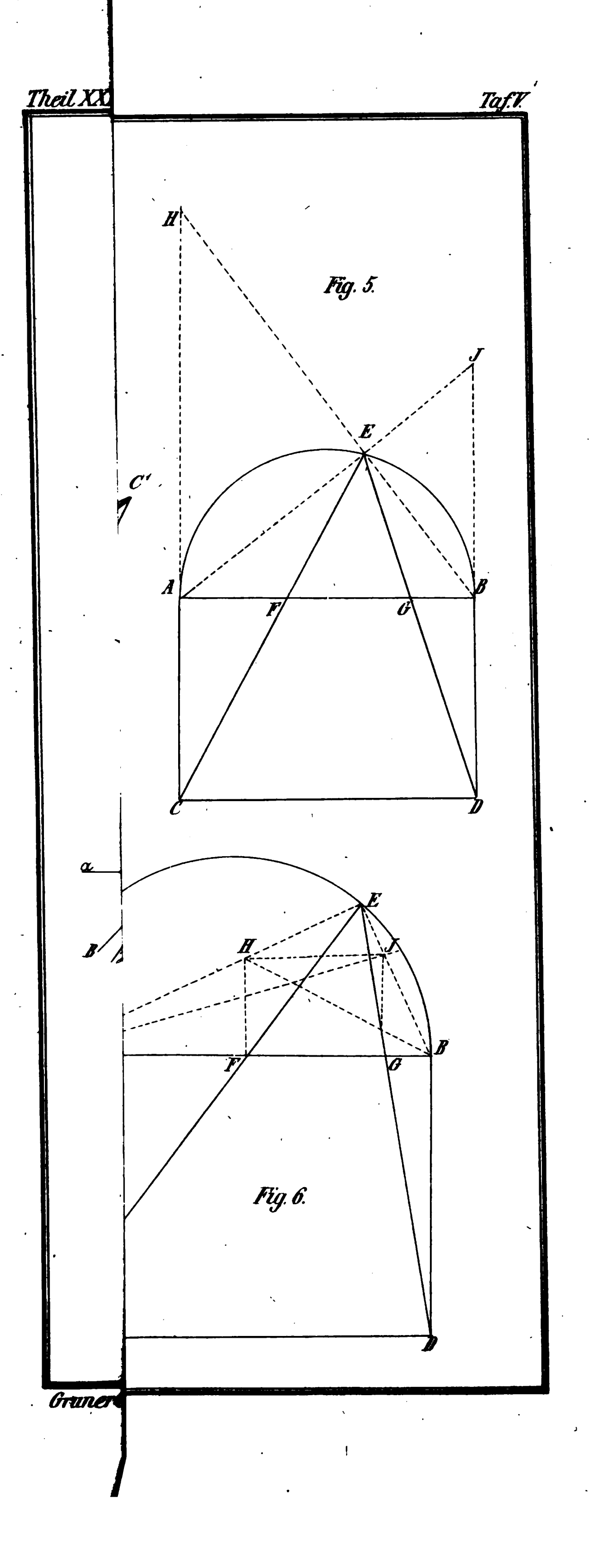
Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 1.

Fig. 8.


Theil I
Taf. IV
W
C
B
X
D
Fig. 6 II.
A
C
B
M
Fig. 7 II.
A
C
B
M
Gru


H
J
E
C'
A
B
F
G
C
D
Fig. 5.
a
B
E
H
J
B
F
G
D
Fig. 6.

Taf. VI.

Parabel. M_1 B

N A

O

Fig. 11. α

Fig. 12. α

Fig. 14. α

Fig. 13. α

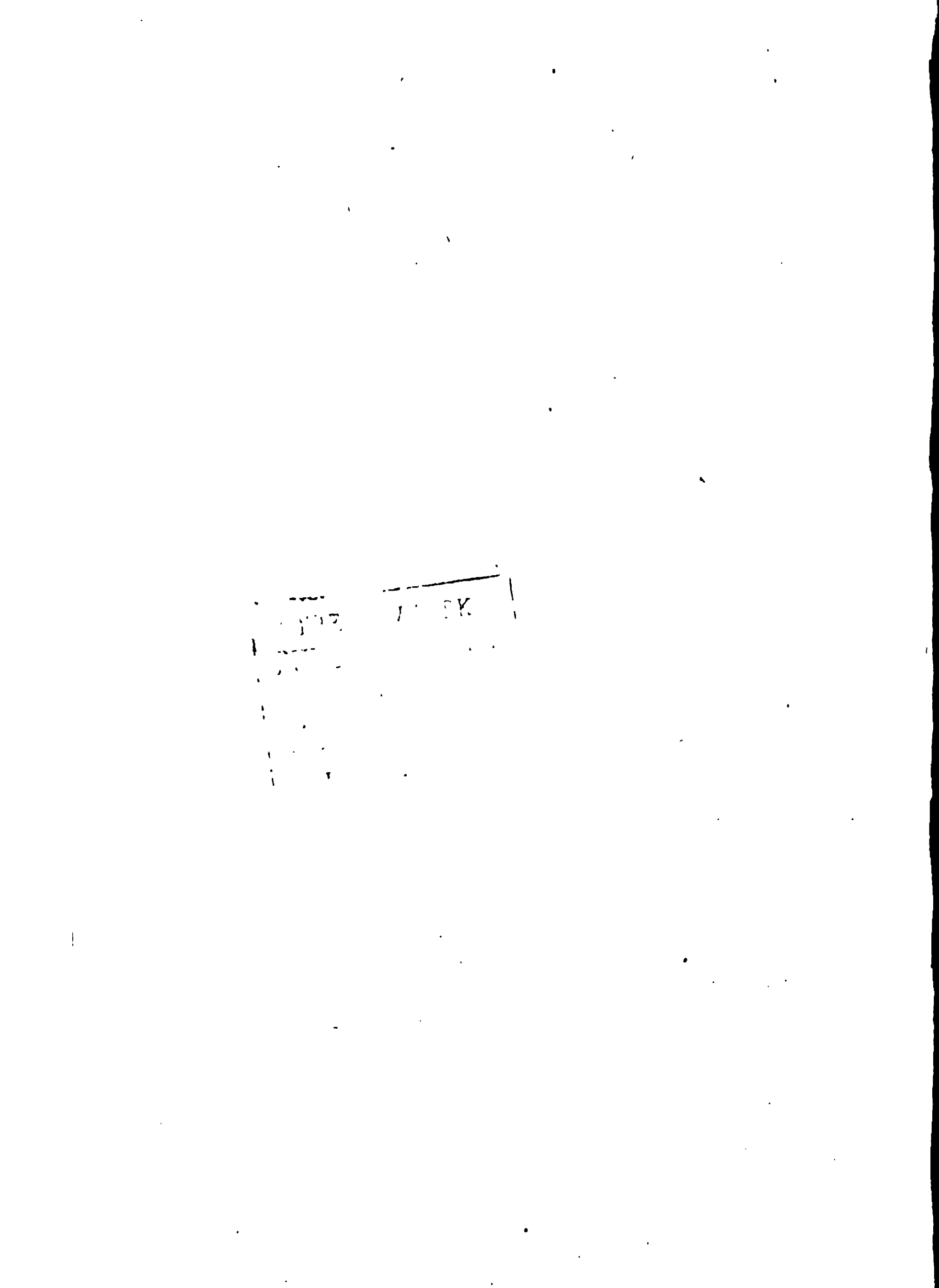


Fig. II.

A' B' C' A

Fig. IV

A' C' B'

Fig. V.

P A A_4

Fig. II.

A'

B'

C'

Fig. IV.

A'

C'

B'

A_4'

Fig. V.

P

P

A_4

